Bài tập và lời giải của các Trường Đại học nổi tiếng Hoa Kỳ

Major American Universities Ph.D. Qualifying Questions and Solutions

Bài Tập và Lời Giải Vật lý Nguyên Tử, Hạt Nhân và Các Hạt Cơ Bản

Problems and Solutions on Atomic, Nuclear and Particle Physics

Biên soạn:
Trường Đại học Khoa học và Công nghệ Trung Hoa

Chủ biên:
Yung-Kuo Lim



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

BÀI TẬP & LỜI GIẢI

VẬT LÝ NGUYÊN TỬ, HẠT NHÂN VÀ CÁC HẠT CƠ BẢN

(Tái bản lần thứ nhất)

Người dịch:

PGS. TS. DƯƠNG NGỌC HUYỀN

PGS. TS. NGUYỄN TRƯỜNG LUYỆN

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Problems and Solutions on Atomic, Nuclear and Particles Physics

Compiled by
The Physics Coaching Class
University of Science and Technology of China

Edited by
Lim Yung-kuo
National University of Singapore

First published 200
Reprinted 2003

114-2010/CXB/44-129/GD Mã số: 8Z073z0-SBQ

LỜI NHÀ XUẤT BẢN

*Bộ sách **Bài tập và lời giải Vật lý** gồm bảy cuốn:*

1. *Cơ học*
2. *Cơ học Lượng tử*
3. *Quang học*
4. *Nhiệt động lực học & Vật lý thống kê*
5. *Điện từ học*
6. *Vật lý Nguyên tử, Hạt nhân và Các hạt cơ bản*
7. *Vật lý chất rắn, Thuyết tương đối & Các vấn đề liên quan*

Đây là tuyển tập gồm 2550 bài tập được lựa chọn kĩ lưỡng từ 3100 đề thi vào đại học và thi tuyển nghiên cứu sinh chuyên ngành vật lý của 7 trường đại học nổi tiếng ở Mỹ (Đại học California ở Berkeley, Đại học Columbia, Đại học Chicago, Viện Công nghệ Massachusetts (MIT), Đại học Bang New York ở Buffalo, Đại học Princeton, Đại học Wiscosin). Trong số này còn có các đề thi trong chương trình CUSPEA và các đề thi do nhà vật lý đoạt giải Nobel người Mỹ gốc Trung Quốc C. C Ting (CCT) soạn đề tuyển chọn sinh viên Trung Quốc đi du học ở Hoa Kỳ. Những đề thi này được xuất bản kèm theo lời giải của hơn 70 nhà vật lý có uy tín của Trung Quốc và 20 nhà vật lý nổi tiếng kiểm tra, hiệu đính. Tất cả các cuốn sách trên đã được tái bản, riêng cuốn Điện từ học đã được tái bản 6 lần.

Điểm đáng lưu ý về bộ sách này là nó bao quát được mọi vấn đề của vật lý học, từ cổ điển đến hiện đại. Bên cạnh những bài tập đơn giản nhằm khắc sâu những khái niệm cơ bản của Vật lý học, không cần những công cụ toán học phức tạp cũng giải được, bộ sách còn có những bài tập khó và hay, đòi hỏi phải có kiến thức và tư duy vật lý sâu sắc với các phương pháp và kĩ thuật toán học phức tạp hơn mới giải được. Có thể nói đây là một tài liệu bổ sung vô giá cho sách giáo khoa và giáo trình đại học ngành vật lý, phục vụ một phạm vi đối tượng rất rộng, từ các giáo viên vật lý phổ thông, giảng viên các trường đại học cho đến học sinh các lớp chuyên lý, sinh viên khoa vật lý và sinh viên các lớp tài năng của các trường đại học khoa học tự nhiên, đặc biệt là cho những ai muốn du học ở Mỹ.

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam trân trọng giới thiệu bộ sách tới độc giả.

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

LỜI NÓI ĐẦU

Làm bài tập là một việc tất yếu và quan trọng trong quá trình học Vật lý nhằm củng cố lý thuyết đã học và trau dồi kĩ năng thực hành. Trong cuốn ***Vật lý Nguyên tử, Hạt nhân và Các hạt cơ bản*** *này có 483 bài tập được chia ra thành bốn phần: Vật lý nguyên tử và phân tử (142 bài), Vật lý hạt nhân (120 bài), Vật lý hạt cơ bản (90 bài), Phương pháp thực nghiệm và các chủ đề đa dạng (131 bài). Hầu hết các bài chọn đưa vào cuốn sách này đều phù hợp với chương trình vật lý bậc đại học và sau đại học của chuyên ngành vật lý nói trên. Ngoài ra, một số kết quả nghiên cứu gần đây cũng được đưa vào cuốn sách nhằm giúp người học không chỉ nắm bắt lý thuyết cơ bản mà còn có thể vận dụng kiến thức cơ bản một cách sáng tạo vào việc học tập và nghiên cứu.*

MỤC LỤC

PHẦN I

VẬT LÝ NGUYÊN TỬ VÀ VẬT LÝ PHÂN TỬ

1. VẬT LÝ NGUYÊN TỬ (1001–1122)

1001

Giả sử rằng có một thông báo về một phương pháp tuyệt vời có khả năng đặt tất cả nội dung của một thư viện vào một bưu ảnh rất phẳng. Có thể đọc được nó nhờ một hiển vi điện tử không? Hãy giải thích.

(*Columbia*)

Lời giải:

Giả sử có 10^6 quyển sách trong thư viện, mỗi quyển 500 trang và mỗi trang lớn bằng 2 bưu ảnh (cho mỗi bưu ảnh là có thể đọc được). Cho một bưu ảnh để đọc được, độ phóng đại phẳng sẽ là $2 \times 500 \times 10^6 \approx 10^9$, tương ứng với độ phóng đại dài là $10^{4,5}$. Khi độ phóng đại dài của một kính hiển vi điện tử là 800.000, độ phóng đại phẳng của nó lớn cỡ 10^{11}, là đủ để đọc được bưu ảnh.

1002

Tại 10^{10} K, mỗi cm^3 bức xạ vật đen tuyệt đối nặng (1 tấn, 1 g, 10^{-6} g, 10^{-16} g)?

(*Columbia*)

Lời giải:

Câu trả lời gần nhất là 1 tấn trong 1 cm^3.

Mật độ năng lượng bức xạ được cho bởi $u = 4\sigma T^4/c$, trong đó $\sigma = 5,67 \times 10^{-8}$ Wm^{-2} K^{-4} là hằng số Stefan–Boltzmann. Từ hệ thức năng lượng - khối lượng Einstein, chúng ta thu được khối lượng của bức xạ vật đen tuyệt đối trong một đơn vị thể tích là $u = 4\sigma T^4/c^3 = 4 \times 5,67 \times 10^{-8} \times 10^{40}/(3 \times 10^8)^3 \approx 10^8$ kg/m^3 $= 0,1$ tấn/cm^3.

1003

Bán kính Bohr của nguyên tử hydro khi được so sánh với bước sóng Compton của electron có độ lớn xấp xỉ là

(a) 100 lần lớn hơn.

(b) 1000 lần lớn hơn.

(c) tương tự nhau.

(*CCT*)

Lời giải:

Bán kính Bohr của nguyên tử hydro và bước sóng Compton của electron được cho tương ứng là $a = \frac{\hbar^2}{me^2}$ và $\lambda_c = \frac{h}{mc}$. Từ đó $\frac{a}{\lambda_c} = \frac{1}{2\pi}(\frac{e^2}{\hbar c})^{-1} = \frac{137}{2\pi} = 22$, trong đó $e^2/\hbar c$ là hằng số cấu trúc tinh tế. Do đó, câu trả lời là (a).

1004

Hãy đánh giá điện trường cần thiết để giải phóng $1e$ ra khỏi nguyên tử so với điện trường cần thiết cho e chuyển động quanh hạt nhân.

(*Columbia*)

Lời giải:

Khảo sát một nguyên tử tương tự nguyên tử hydro có điện tích hạt nhân Ze. Năng lượng ion hoá (hoặc năng lượng cần thiết để tách e) là 13,6Z^2 eV. Điện tử chuyển động trên quỹ đạo có khoảng cách trung bình từ hạt nhân là $a = a_0/Z$, trong đó $a_0 = 0,53 \times 10^{-8}$ cm là bán kính Bohr. Điện tử di chuyển quanh hạt nhân trong điện trường E trong một nửa vòng có thể có năng lượng eEa. Do đó, để giải phóng electron cần phải thoả mãn

$$eEa \gtrsim 13,6\ Z^2\ \text{eV},$$

hay là

$$E \gtrsim \frac{13,6\ Z^3}{0,53 \times 10^{-8}} \approx 2 \times 10^9\ Z^3\ \text{V/cm},$$

1005

Khi ta đi ra khỏi tâm nguyên tử, mật độ e sẽ

(a) giảm theo hàm Gauss.

(b) giảm theo hàm mũ.

(c) dao động với biên độ giảm chậm.

(*CCT*)

Lời giải:

Câu trả lời là (c).

1006

Một chuyển dời e trong các ion của ^{12}C dẫn đến phát xạ photon vào khoảng $\lambda = 500$ nm ($h\nu = 2,5$ eV). Các ion ở trạng thái cân bằng nhiệt tại nhiệt độ ion $kT = 20$ eV, mật độ $n = 10^{24}\ m^{-3}$, và một từ trường không đồng nhất lên tới $B = 1$ Tesla.

(a) Hãy thảo luận vắn tắt cơ chế mở rộng có thể tạo nên sự dịch chuyển có bề rộng được quan sát $\Delta\lambda$ lớn hơn độ rộng đã tìm được cho những giá trị rất nhỏ của T, n và B.

(b) Cho một trong các cơ chế này, hãy tính độ rộng vạch được mở rộng $\Delta\lambda$, sử dụng cỡ độ lớn để đánh giá các tham số cần thiết.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Vạch phổ thường có độ rộng riêng được tạo ra do độ bất định ở các mức năng lượng nguyên tử, nó xuất hiện do khoảng hữu hạn của thời gian có liên quan tới quá trình bức xạ, theo nguyên lý bất định Heisenberg. Sự mở rộng đã được quan sát cũng có thể do những giới hạn dụng cụ như quang sai thấu kính, nhiễu xạ... Nói thêm, các nguyên nhân chính của sự mở rộng là:

Hiệu ứng Doppler: Các nguyên tử và phân tử chuyển động nhiệt không đổi tại $T > 0$ K. Tần số đã quan sát của một vạch phổ có thể thay đổi một ít nếu như chuyển động của các nguyên tử phát xạ có một thành phần dọc theo hướng ngắm, do hiệu ứng Doppler. Vì các nguyên tử hoặc phân tử có phân bố vận tốc, một vạch được phát xạ nhờ các các nguyên tử sẽ bao gồm một khoảng tần số được phân bố xung quanh tần số gốc, đóng góp vào độ rộng vạch quan sát.

Các va chạm: Một hệ nguyên tử có thể bị nhiễu loạn bởi những ảnh hưởng bên ngoài như các điện trường và từ trường do các nguồn ngoài hoặc các nguyên tử lân cận. Nhưng những ảnh hưởng đó thông thường tạo ra sự dịch chuyển các mức năng lượng hơn là mở rộng chúng. Tuy nhiên, sự mở rộng cũng có thể bắt nguồn từ những va chạm nguyên tử, tạo nên những thay đổi pha trong bức xạ và do đó tạo ra sự mở rộng mức năng lượng.

(b) *Sự mở rộng Doppler:* Dịch chuyển tần số Doppler bậc nhất được cho bởi $\Delta\nu = \frac{\nu_0 v_x}{c}$, với trục x dọc theo hướng quan sát. Định luật phân bố vận tốc Maxwell cho

$$dn \propto \exp\left(-\frac{Mv_x^2}{2kT}\right) dv_x = \exp\left[-\frac{Mc^2}{2kT}\left(\frac{\Delta\nu}{\nu_0}\right)^2\right] dv_x\,,$$

với M là khối lượng của nguyên tử bức xạ. Sự phân bố tần số của cường độ bức xạ cũng có quan hệ như thế. Tại một nửa cường độ cực đại

$$\Delta\nu = \nu_0\sqrt{\frac{(\ln 2)2kT}{Mc^2}}\,.$$

Do đó, độ rộng vạch tại một nửa cường độ cực đại là

$$2\Delta\nu = \frac{1,67c}{\lambda_0}\sqrt{\frac{2kT}{Mc^2}}\,.$$

Theo đơn vị số sóng $\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c}$ ta có

$$\Gamma_D = 2\Delta\tilde{\nu} = \frac{1,67}{\lambda_0}\sqrt{\frac{2kT}{Mc^2}}\,.$$

Với $kT = 20$ eV, $Mc^2 = 12 \times 938$ MeV, $\lambda_0 = 5 \times 10^{-7}$ m,

$$\Gamma_D = \frac{1,67}{5\times 10^{-7}}\sqrt{\frac{2\times 20}{12\times 938\times 10^6}} = 199\ \text{m}^{-1} \approx 2\ \text{cm}^{-1}\,.$$

Sự mở rộng do va chạm: Quãng đường tự do trung bình cho va chạm l được định nghĩa $nl\pi d^2 = 1$, với d là đường kính nguyên tử hiệu dụng cho va chạm đủ gần để ảnh hưởng đến quá trình bức xạ. Vận tốc trung bình $\bar{v}$ của 1 nguyên tử có thể làm xấp xỉ nhờ vận tốc căn quân phương $\frac{1}{2}M\overline{v^2} = \frac{3}{2}kT$. Từ đó

$$\bar{v} \approx \sqrt{\frac{3kT}{M}}\,.$$

Lúc đó, thời gian trung bình giữa các lần va chạm kế tiếp là

$$t = \frac{l}{\bar{v}} = \frac{1}{n\pi d^2}\sqrt{\frac{M}{3kT}}\,.$$

Độ bất định năng lượng ΔE do va chạm có thể được ước lượng từ nguyên lý bất định $\Delta E \cdot t \approx \hbar$, cho ta

$$\Delta\nu_c \approx \frac{1}{2\pi t},$$

hay theo đơn vị số sóng,

$$\Gamma_c = \frac{1}{2} n d^2 \sqrt{\frac{3kT}{Mc^2}} \sim \frac{3 \times 10^{-3}}{\lambda_0} \sqrt{\frac{2kT}{Mc^2}},$$

nếu ta lấy $d \approx 2a_0 \sim 10^{-10}$ m, a_0 là bán kính Bohr. Sự mở rộng này nhỏ hơn nhiều sự mở rộng Doppler tại mật độ ion đã cho.

1007

(I) Năng lượng ion hoá E_I của 3 nguyên tố đầu tiên

Z	Nguyên tố	E_I
1	H	13,6 eV
2	He	24,6 eV
3	Li	5,4 eV

(a) Giải thích định lượng sự thay đổi của E_I từ H, He đến Li.

(b) Năng lượng ion hoá thứ cấp của He, tức là năng lượng cần để giải phóng điện tử thứ 2 sau khi điện tử thứ nhất đã được giải phóng là bao nhiêu?

(c) Các mức năng lượng của trạng thái $n = 3$ của điện tử hoá trị ecủa Na (bỏ qua spin riêng) được chỉ ra trong hình 1.1.

Tại sao các mức năng lượng phụ thuộc vào số lượng tử l?

(*SUNY, Buffalo*)

Hình 1.1

Lời giải:

(a) Bảng chỉ ra năng lượng ion hoá của He lớn hơn nhiều năng lượng ion hoá của H. Nguyên nhân chính là do điện tích hạt nhân của He gấp đôi điện tích hạt nhân của H, trong khi tất cả các electron của chúng đều ở lớp vỏ thứ nhất, có nghĩa là thế năng của các electron là thấp hơn nhiều trong trường hợp của He. Năng lượng ion hoá rất thấp của Li là do sự che chắn điện tích hạt nhân nhờ các electron ở lớp vỏ bên trong. Nhờ đó mà với electron ở lớp vỏ ngoài, điện tích hạt nhân hiệu dụng trở nên nhỏ hơn và do đó thế năng lớn hơn. Điều này có nghĩa là năng lượng cần thiết cho việc giải phóng electron là nhỏ hơn.

(b) Các mức năng lượng của nguyên tử giống hydro được cho bởi

$$E_n = -\frac{Z^2}{n^2} \times 13,6 \text{ eV}.$$

Cho $Z = 2$, $n = 1$ ta có

$$E_I = 4 \times 13,6 = 54,4 \text{ eV}.$$

(c) Cho các trạng thái $n = 3$, điện tử hoá trị có l càng nhỏ, sự lệch tâm khỏi quỹ đạo của nó càng lớn. Điều này có khuynh hướng làm cho các hạt nhân nguyên tử bị phân cực nhiều hơn. Hơn nữa, l càng nhỏ thì hiệu ứng thẩm thấu quỹ đạo sẽ càng lớn. Các hiệu ứng này làm cho thế năng của điện tử giảm đi theo chiều giảm của l.

1008

Mô tả vắn tắt lần lượt các hiệu ứng sau, trong các trường hợp quy tắc, nêu rõ quy tắc:

(a) Hiệu ứng Auger

(b) Hiệu ứng Zeeman dị thường

(c) Dịch chuyển Lamb

(d) Quy tắc khoảng Landé

(e) Các quy tắc Hund cho các mức nguyên tử.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Hiệu ứng Auger: Khi một electron nằm ở lớp vỏ trong (lớp vỏ K) của

một nguyên tử được lấy ra, một electron liên kết có năng lượng nhỏ hơn (lớp L) có thể nhảy vào lỗ trống do electron đã được lấy đi, làm phát xạ một photon. Nếu quá trình xảy ra nhưng không phát xạ photon, thay thế vào đó, lớp vỏ có năng lượng cạo hơn (lớp vỏ L) được ion hoá do mất đi một electron. Quá trình này được gọi là hiệu ứng Auger và electron nhảy ra đó được gọi là electron Auger: nguyên tử được ion hoá 2 lần và quá trình chuyển dời không phát xạ photon.

(b) Hiệu ứng Zeeman dị thường: Hiệu ứng đã được Zeeman quan sát năm 1896, khi nguyên tử bị kích thích đặt trong từ trường ngoài. Phổ phát xạ trong quá trình khử kích thích tách thành 3 vạch phổ cách đều nhau. Đó là hiệu ứng Zeeman thường. Sự tách vạch được hiểu dựa trên lý thuyết cổ điển đã được Lorentz phát triển. Tuy nhiên, người ta đã phát hiện ra số vạch tách của vạch phổ khác nhiều, thường lớn hơn 3. Sự tách vạch phổ như thế chưa thể giải thích được cho đến khi xuất hiện khái niệm spin electron, đó là hiệu ứng Zeeman dị thường.

Trong lý thuyết lượng tử hiện đại, cả 2 hiệu ứng có thể hiểu dễ dàng. Khi một nguyên tử đặt trong từ trường yếu, do tương tác giữa momen lưỡng cực từ của cả nguyên tử với từ trường ngoài nên cả 2 mức năng lượng ban đầu và cuối cùng được tách ra một vài thành phần. Những dịch chuyển quang học giữa 2 trạng thái đa bội làm tăng thêm số vạch. Hiệu ứng Zeeman thường chỉ là trường hợp đặc biệt, ở đây, những chuyển dời giữa các trạng thái đơn bội trong một nguyên tử với số chẵn các electron quang hoạt.

(c) Dịch chuyển Lamb: Khi không có cấu trúc siêu tinh tế, các trạng thái $2^2S_{1/2}$ và $2^2P_{1/2}$ của nguyên tử hydro sẽ bị suy biến đối với số lượng tử quỹ đạo l vì chúng tương ứng với momen động lượng toàn phần $j = 1/2$. Tuy nhiên, bằng thực nghiệm Lamb đã quan sát thấy năng lượng của mức $2^2S_{1/2}$ cao hơn năng lượng của mức $2^2P_{1/2}$ là 0,035 cm^{-1}. Đó là dịch chuyển Lamb. Dịch chuyển Lamb là do tương tác giữa electron và trường bức xạ điện từ.

(d) Quy tắc khoảng Landé: Đối với liên kết LS, hiệu năng lượng giữa 2 mức J liền kề, trong giới hạn LS đã cho là tỉ lệ với giá trị lớn hơn trong hai giá trị của J.

(e) Các quy tắc Hund cho các mức nguyên tử là:

(1) Nếu cấu hình điện tử có nhiều hơn 1 kí hiệu phổ, cấu hình với spin toàn phần cực đại S có năng lượng thấp nhất.

(2) Nếu spin toàn phần cực đại S tương ứng với một vài kí hiệu thì cấu hình với L cực đại có năng lượng thấp nhất.

(3) Nếu lớp vỏ ngoài của nguyên tử nhỏ hơn một nửa đầy, kí hiệu phổ với momen động lượng toàn phần J cực tiểu có năng lượng thấp nhất. Nếu số electron của lớp vỏ này lớn hơn một nửa đầy kí hiệu phổ với J cực đại có năng lượng thấp nhất. Quy tắc này chỉ áp dụng cho liên kết LS.

1009

Hãy đưa ra các biểu thức cho các đại lượng sau trong các thuật ngữ e, h, c, k, m_e và m_p.

(a) Năng lượng cần thiết để ion hoá một nguyên tử hydro.

(b) Sự khác nhau về tần số của vạch α - Lyman trong các nguyên tử hydro và nguyên tử đoteri.

(c) Momen từ của electron.

(d) Sự mở rộng trong phép đo của khối lượng π^0 cho rằng thời gian sống π^0 đã cho là τ.

(e) Từ trường B có dư 10^{-4} proton tự do theo 1 hướng spin ở nhiệt độ T.

(f) Sự tách cấu trúc tinh tế ở trạng thái $n = 2$ của hydro.

(Columbia)

Lời giải:

(a)

$$E_I = \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{m_e}{2\hbar^2},$$

ε_0 là hằng số điện môi của không gian tự do.

(b) Sự khác nhau của tần số do sự thay đổi hằng số Rydberg với khối lượng hạt nhân. Số sóng của vạch α của nguyên tử hydro là

$$\tilde{\nu}_H = R_H\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}R_H,$$

và số sóng của vạch α của nguyên tử đoteri là

$$\tilde{\nu}_D = \frac{3}{4}R_D.$$

Hằng số Rydberg là

$$R = \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{m_r}{m_e} = \frac{m_r}{m_e}R_\infty,$$

ở đây m_r là khối lượng rút gọn của electron quỹ đạo trong hệ nguyên tử và

$$R_\infty = \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{m_e}{4\pi\hbar^3 c}\,.$$

Với nguyên tử H, $m_r = \frac{m_p m_e}{m_p + m_e}$, và với nguyên tử D,

$$m_r = \frac{2m_p m_e}{2m_p + m_e}\,,$$

m_p là khối lượng nuclon, ta có

$$\Delta\nu = c\Delta\tilde{\nu} = \frac{3}{4}c(R_D - R_H) = \frac{3}{4}cR_\infty\left(\frac{1}{1+\dfrac{m_e}{2m_p}} - \frac{1}{1+\dfrac{m_e}{m_p}}\right)$$

$$\approx \frac{3}{4}cR_\infty\frac{m_e}{2m_p} = \frac{3}{4}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{\pi^2}{h^3}\frac{m_e^2}{m_p}\,.$$

(c) Momen từ gắn với spin electron là

$$\mu_e = \frac{he}{4\pi m_e} = \mu_B\,,$$

μ_B là manheton Bohr.

(d) Sự phân tán khối lượng đo được (trong thệ đơn vị năng lượng) liên quan đến thời gian sống τ theo nguyên lý bất định

$$\Delta E\cdot\tau \gtrsim \hbar\,.$$

từ đó

$$\Delta E \gtrsim \frac{\hbar}{\tau}\,.$$

(e) Giả định các proton tự do như là 1 khí lý tưởng, trong đó các spin proton có 2 hướng được lượng tử hoá: song song với B với năng lượng $E_p = -\mu_p B$ và đối song với B với năng lượng $E_p = \mu_p B$, ở đây $\mu_p = \frac{he}{2m_p}$ là momen từ của proton. Vì mật độ số hạt $n \propto \exp(\frac{-E_p}{kT})$, ta có

$$\frac{\exp\left(\dfrac{\mu_p B}{kT}\right) - \exp\left(\dfrac{-\mu_p B}{kT}\right)}{\exp\left(\dfrac{\mu_p B}{kT}\right) + \exp\left(\dfrac{-\mu_p B}{kT}\right)} = 10^{-4}\,.$$

hay là

$$\exp\left(\frac{2\mu_p B}{kT}\right) = \frac{1+10^{-4}}{1-10^{-4}},$$

cho

$$\frac{2\mu_p B}{kT} \approx 2 \times 10^{-4},$$

tức là

$$B = \frac{kT}{\mu_p} \times 10^{-4}.$$

(f) Các số lượng tử của trạng thái $n = 2$ là $n = 2$, $l = 1$, $j_1 = 3/2$, $j_2 = 1/2$ (trạng thái $l = 0$ không tách và không cần khảo sát ở đây). Từ biểu thức cho các mức năng lượng cấu trúc tinh tế của hydro ta thu được

$$\Delta E = -\frac{2\pi Rhc\alpha^2}{n^3}\left(\frac{1}{j_1+\frac{1}{2}} - \frac{1}{j_2+\frac{1}{2}}\right) = \frac{\pi Rhc\alpha^2}{8},$$

trong đó

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c}$$

là hằng số cấu trúc tinh tế,

$$R = \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{m_e}{4\pi\hbar^3 c}$$

là hằng số Rydberg.

1010

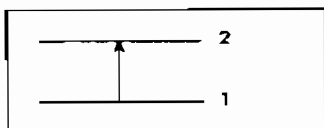
Như đã chỉ ra trong hình 1.2 chiếu ánh sáng lên các nguyên tử natri. Hãy tính tiết diện ngang cộng hưởng kích thích của các nguyên tử từ trạng thái cơ bản đến trạng thái kích thích đầu tiên (tương ứng với vạch vàng quen thuộc của natri).

Hãy ước lượng độ rộng vạch cộng hưởng. Không cần thiết dùng những kết quả này từ những nguyên lý ban đầu nếu như nhớ lại các suy luận gợi ý thích hợp.

(*Princeton*)

Lời giải:

Tiết diện ngang được định nghĩa $\sigma_A = P_\omega / I_\omega$, trong đó $P_\omega d\omega$ là năng lượng hấp thụ do các nguyên tử trong khoảng tần số ω tới $\omega + d\omega$ trong một



Hình 1.2

đơn vị thời gian, $I_\omega d\omega$ là năng lượng tới trên một đơn vị diện tích trong một đơn vị thời gian trong cùng khoảng tần số. Theo định nghĩa,

$$\int P_\omega d\omega = B_{12}\hbar\omega N_\omega\,,$$

trong đó B_{12} là hệ số B của Einstein cho xác suất nguyên tử ở trạng thái 1 hấp thụ một lượng tử $\hbar\omega$ trong một đơn vị thời gian và $N_\omega d\omega$ là mật độ năng lượng trong khoảng tần số ω tới $\omega + d\omega$. Hệ thức Einstein

$$B_{12} = \frac{\pi^2 c^3}{\hbar\omega^3} \cdot \frac{g_1}{g_2} A_{21}$$

cho ta

$$B_{12} = \frac{\pi^2 c^3}{\hbar\omega^3} \cdot \frac{g_1}{g_2} \cdot \frac{1}{\tau} = \frac{\pi^2 c^3}{\hbar^2\omega^3} \cdot \frac{g_1}{g_2}\Gamma\,,$$

trong đó τ là thời gian sống của trạng thái kích thích 2, độ rộng vạch tự nhiên của nó là $\Gamma \approx \frac{\hbar}{\tau}$, g_1, g_2 là độ suy biến của các trạng thái 1 và 2, sử dụng quan hệ $A_{12} = 1/\tau$ và nguyên lý bất định $\Gamma\tau \approx \hbar$. Vì $N_\omega = I_\omega/c$, c là vận tốc ánh sáng trong không gian tự do, ta có

$$P_\omega = \frac{\pi^2 c^2}{\hbar\omega^2} \cdot \frac{g_1}{g_2}\Gamma I_\omega\,.$$

Đưa vào thừa số dạng $g(\omega)$ và khảo sát ω và I_ω như những giá trị trung bình trong dải $g(\omega)$, ta có thể viết đại lượng trên như sau

$$P_\omega = \frac{\pi^2 c^2}{\hbar\omega^2} \cdot \frac{g_1}{g_2}\Gamma I_\omega g(\omega)\,.$$

Thừa nhận $g(\omega)$ có biên dạng Lorentz

$$g(\omega) = \frac{\hbar}{2\pi}\frac{\Gamma}{(E_2 - E_1 - \hbar\omega)^2 + \dfrac{\Gamma^2}{4}}\,.$$

Tại điểm cộng hưởng,

$$E_2 - E_1 = \hbar\omega ,$$

và

$$g\left(\omega = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}\right) = \frac{2\hbar}{\pi\Gamma} .$$

Từ đó

$$\sigma_A = \frac{\pi^2 c^2}{\hbar\omega^2} \cdot \frac{g_1}{g_2} \cdot \frac{2\hbar}{\pi} = \frac{2\pi c^2}{\omega^2} \cdot \frac{g_1}{g_2} .$$

Với ánh sáng vàng Na (vạch D), $g_1 = 2$, $g_2 = 6$, $\lambda = 5890$ Å, và

$$\sigma_A = \frac{1}{3} \cdot \frac{\lambda^2}{2\pi} = 1,84 \times 10^{-10}\ \text{cm}^2 .$$

Với vạch D của Na, $\tau \approx 10^{-8}$ s và độ rộng vạch tại nửa cường độ là

$$\Gamma \approx \frac{\hbar}{\tau} = 6,6 \times 10^{-8}\ \text{eV} .$$

Vì

$$\Gamma = \Delta E = \hbar\Delta\omega = \hbar\Delta\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right) = 2\pi\hbar c\Delta\tilde{\nu} ,$$

độ rộng vạch theo số sóng là

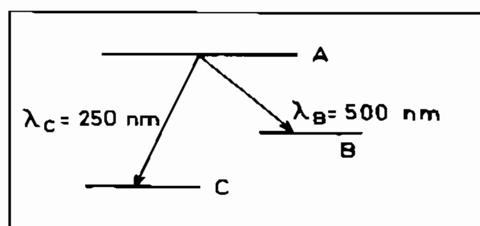
$$\Delta\tilde{\nu} = \frac{\Gamma}{2\pi\hbar c} \approx \frac{1}{2\pi c\tau} = 5,3 \times 10^{-4}\ \text{cm}^{-1} .$$

1011

Tiết diện ngang của kích thích do va chạm electron ở một mức nguyên tử nào đó A là $\sigma_A = 1,4 \times 10^{-20}$ cm^2. Mức năng lượng có thời gian sống $\tau = 2 \times 10^{-8}$ s, và phân rã 10% thời gian đến mức B và 90% đến mức C (hình 1.3).

(a) Hãy tính số nguyên tử cân bằng trong cm^3 ở mức A khi một chùm tia electron 5 mA/cm^2 đi qua qua hơi nguyên tử này ở áp suất 0,05 torr.

(b) Hãy tính cường độ ánh sáng phát ra trên cm^3 trong dịch chuyển $A \to B$, biểu diễn bằng oat/steradian.



Hình 1.3

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Theo hệ thức Einstein, số dịch chuyển $B, C \to A$ trong một đơn vị thời gian (tốc độ sinh A) là

$$\frac{dN_{BC\to A}}{dt} = n_0\sigma_A N_{BC} ,$$

và số phân rã $A \to B, C$ trong đơn vị thời gian là

$$\frac{dN_{A\to BC}}{dt} = \left(\frac{1}{\tau} + n_0\sigma_A\right) N_A ,$$

trong đó N_{BC} và N_A là số nguyên tử ở các mức năng lượng B, C và A, n_0 là số electron qua trên một đơn vị diện tích trong một đơn vị thời gian. Khi cân bằng,

$$\frac{dN_{BC\to A}}{dt} = \frac{dN_{A\to BC}}{dt} ,$$

từ đó tìm được

$$N_A = \frac{n_0\sigma_A N}{\frac{1}{\tau} + 2n_0\sigma_A} \approx n_0\sigma_A N\tau , \qquad (N = N_A + N_{BC})$$

do $n_0 = 5\times 10^{-3}/1,6\times 10^{-19} = 3,1\times 10^{16}$ cm^{-2} s^{-1} và như vậy $\frac{1}{\tau} \gg 2n_0\sigma_A$.

Từ đó, số nguyên tử trong một đơn vị thể tích ở mức năng lượng A ở cân bằng là

$$n = \frac{N_A}{V} = \frac{\tau n_0\sigma_A N}{V} = \frac{\tau n_0\sigma_A p}{kT}$$

$$= 2\times 10^{-8}\times 3,1\times 10^{16}\times 1,4\times 10^{-20}\times \frac{0,05\times 1,333\times 10^3}{1,38\times 10^{-16}\times 300}$$

$$= 1,4\times 10^4 \text{ cm}^{-3} ,$$

ở đây, nhiệt độ phòng là $T = 300$ K.

(b) Xác suất phân rã nguyên tử từ $A \rightarrow B$ là

$$\lambda_1 = \frac{0,1}{\tau}.$$

Bước sóng của bức xạ phát ra trong dịch chuyển $A \rightarrow B$ là $\lambda_B = 500$ nm. Cường độ ánh sáng I trong đơn vị thể tích, trong một đơn vị góc đặc được cho bởi

$$4\pi I = n\lambda_1 hc/\lambda_B ,$$

nghĩa là,

$$I = \frac{nhc}{40\pi\tau\lambda_B} = \frac{1,4 \times 10^4 \times 6,63 \times 10^{-27} \times 3 \times 10^{10}}{40\pi \times 2 \times 10^{-8} \times 500 \times 10^{-7}}$$
$$= 2,2 \times 10^{-2}\ \text{erg} \cdot \text{s}^{-1}\ \text{sr}^{-1} = 2,2 \times 10^{-9}\ \text{W sr}^{-1} .$$

1012

Trường điện từ do môi trường xung quanh nguyên tử trong phân tử hay tinh thể có thể ảnh hưởng đáng kể đến tính chất trạng thái cơ bản của nguyên tử. Ví dụ rất đáng quan tâm là hiện tượng dập tắt momen động lượng của nguyên tử sắt trong nhóm hem trong hemoglobin của máu. Tất nhiên, sắt và hemoglobin là rất phức tạp. Giả sử một nguyên tử chứa một electron hoá trị chuyển động trong trường thế xuyên tâm của nguyên tử, ở mức $l = 1$. Bỏ qua spin, điều gì sẽ xảy ra ở mức này khi electron bị tác động bởi thế bên ngoài xung quanh nguyên tử tăng lên. Lấy thế ngoài có dạng là

$$V_{\text{pert}} = Ax^2 + By^2 - (A + B)z^2$$

(Hạt nhân nguyên tử ở gốc toạ độ) và khảo sát thế đến bậc thấp nhất.

(a) Bây giờ mức $l = 1$ tách thành ba mức phân biệt. Như đã khẳng định, mỗi một mức tương ứng hàm sóng dạng

$$\Psi = (\alpha x + \beta y + \gamma z)f(r) ,$$

trong đó, $f(r)$ là hàm xuyên tâm chung và mỗi một mức có một tập hợp riêng các hằng số (α, β, γ), mà cần phải xác định nó. Hãy phác họa sơ đồ mức năng

lượng, chỉ rõ những dịch chuyển *tương đối* ΔE theo các tham số A và B, nghĩa là tính ba dịch chuyển đến thừa số chung.

(b) Quan tâm hơn, tính giá trị kì vọng vủa L_z, thành phần z của momen động lượng cho mỗi một trong ba mức.

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Trường thế ngoài V có thể được viết dưới dạng

$$V = \frac{1}{2}(A+B)r^2 - \frac{3}{2}(A+B)z^2 + \frac{1}{2}(A-B)(x^2-y^2).$$

Độ suy biến của trạng thái $n = 2$, $l = 1$ là 3 khi không có nhiễu loạn với hàm sóng

$$\Psi_{210} = \left(\frac{1}{32\pi a^3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{r}{a} \exp\left(-\frac{r}{2a}\right) \cos\theta,$$

$$\Psi_{21\pm1} = \mp\left(\frac{1}{64\pi a^3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{r}{a} \exp\left(-\frac{r}{2a}\right) \exp(\pm i\varphi) \sin\theta,$$

trong đó $a = \hbar^2/\mu e^2$, μ khối lượng rút gọn của electron hoá trị.

Sau khi tương tác với thế ngoài V, các hàm sóng thay đổi là

$$\Psi = a_1\Psi_{211} + a_2\Psi_{21-1} + a_3\Psi_{210}.$$

Lý thuyết nhiễu loạn cho các hệ suy biến dẫn đến phương trình ma trận cho năng lượng nhiễu loạn E'

$$\begin{pmatrix} C+A'-E' & B' & 0 \\ B' & C+A'-E' & 0 \\ 0 & 0 & C+3A'-E' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0,$$

trong đó

$$\begin{aligned} C &= \langle\Psi_{211}|\frac{1}{2}(A+B)r^2|\Psi_{211}\rangle \\ &= \langle\Psi_{21-1}|\frac{1}{2}(A+B)r^2|\Psi_{21-1} \\ &= \langle\Psi_{210}|\frac{1}{2}(A+B)r^2|\Psi_{210}\rangle \end{aligned}$$

$$= 15a^2(A+B),$$

$$A' = -\langle \Psi_{211}|\frac{3}{2}(A+B)z^2|\Psi_{211}\rangle$$

$$= -\langle \Psi_{21-1}|\frac{3}{2}(A+B)z^2|\Psi_{21-1}\rangle$$

$$= -\frac{1}{3}\langle \Psi_{210}|\frac{3}{2}(A+B)z^2|\Psi_{210}\rangle$$

$$= -9a^2(A+B),$$

$$B' = \langle \Psi_{211}|\frac{1}{2}(A-B)(x^2-y^2)|\Psi_{21-1}\rangle$$

$$= \langle \Psi_{21-1}|\frac{1}{2}(A-B)(x^2-y^2)|\Psi_{211}\rangle$$

$$= -\frac{3}{2}a^2(A-B).$$

Đặt định thức của các hệ số bằng 0, chúng ta tìm được các hiệu chính năng lượng

$$E' = C + 3A', C + A' \pm B'.$$

Cho $E' = C + 3A' = -12(A+B)a^2$, hàm sóng là

$$\Psi_1 = \Psi_{210} = \left(\frac{1}{32\pi a^3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{r}{a} \exp\left(-\frac{r}{2a}\right)\cos\theta = f(r)z,$$

trong đó

$$f(r) = \left(\frac{1}{32\pi a^3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{a} \cdot \exp\left(-\frac{r}{2a}\right),$$

tương ứng với $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1$.

Cho $E' = C + A' + B' = \frac{3}{2}(5A + 3B)a^2$, hàm sóng là

$$\Psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_{211} + \Psi_{21-1}) = -i\left(\frac{1}{32\pi a^3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{r}{a} \exp\left(-\frac{r}{2a}\right)\sin\theta\sin\varphi$$

$$= -if(r)y,$$

tương ứng với $\alpha = \gamma = 0$, $\beta = -i$.

Cho $E' = C + A' - B' = \frac{3}{2}(3A + 5B)a^2$, hàm sóng là

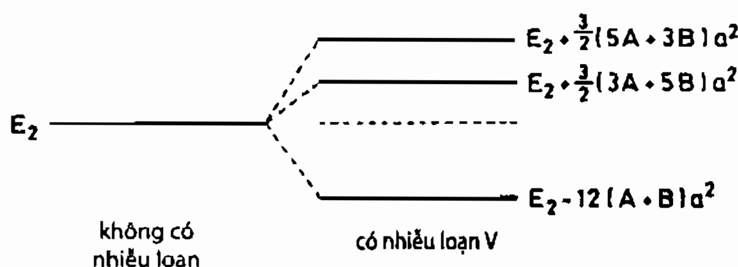
$$\Psi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_{211} - \Psi_{21-1}) = -f(r)x\,,$$

tương ứng với $\alpha = -1$, $\beta = \gamma = 0$.

Như thế, mức năng lượng không suy biến E_2, khi có nhiễu loạn V, tách thành ba mức

$$E_2 - 12(A + B)a^2\,, \quad E_2 + \frac{3}{2}(3A + 5B)a^2\,, \quad E_2 + \frac{3}{2}(5A + 3B)a^2\,,$$

như đã chỉ ra trong hình 1.4.



Hình 1.4

(b) Hàm sóng đã được hiệu chỉnh là

$$\langle\Psi_1|l_z|\Psi_1\rangle = \langle\Psi_2|l_z|\Psi_2\rangle = \langle\Psi_3|l_z|\Psi_3\rangle = 0\,.$$

Do đó, giá trị kì vọng của thành phần z của momen động lượng là bằng không cho tất cả ba mức năng lượng.

1013

Mô hình Thomas-Fermi của các nguyên tử mô tả đám mây điện tử trong một nguyên tử như một phân bố liên tục $\rho(x)$ của điện tích. Một điện tử đơn lẻ được giả thiết chuyển động trong một thế được xác định bởi hạt nhân có điện tích Ze và của đám mây này. Hãy viết phương trình cho thế tĩnh điện theo các bước sau:

(a) Giả thiết điện tích đám mây điều chỉnh cục bộ đến khi các điện tử tại mặt cầu Fermi có năng lượng 0, tìm quan hệ giữa thế ϕ và động lượng Fermi p_F.

(b) Sử dụng quan hệ thu được từ (a) để tìm hệ thức đại số giữa mật độ điện tích $\rho(x)$ và thế $\phi(x)$.

(c) Đặt kết quả của (b) vào phương trình Poisson để tìm phương trình vi phân riêng phi tuyến cho ϕ.

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Với một điện tử liên kết, năng lượng của nó $E = \frac{p^2}{2m} - e\phi(\mathbf{x})$ phải thấp hơn năng lượng liên kết của một điện tử trên bề mặt Fermi. Do đó

$$\frac{p_{\max}^2}{2m} - e\phi(\mathbf{x}) = 0\,,$$

trong đó $p_{\max} = p_f$, động lượng Fermi.

Từ đó

$$p_f^2 = 2me\phi(\mathbf{x})\,.$$

(b) Coi các điện tử như một khí Fermi. Số điện tử lấp đầy các trạng thái với các động lượng từ 0 đến p_f là

$$N = \frac{Vp_f^3}{3\pi^2\hbar^3}\,.$$

Mật độ điện tích là

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{eN}{V} = \frac{ep_f^3}{3\pi^2\hbar^3} = \frac{e}{3\pi^2\hbar^3}[2me\phi(\mathbf{x})]^{\frac{3}{2}}\,.$$

(c) Thay $\rho(\mathbf{x})$ vào phương trình Poisson

$$\nabla^2\phi = 4\pi\rho(\mathbf{x})$$

cho ta

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi(\mathbf{x}) = \frac{4e}{3\pi\hbar^3}[2me\phi(\mathbf{x})]^{\frac{3}{2}}\,.$$

Với giả thiết ϕ là đối xứng cầu, phương trình sẽ được viết gọn lại

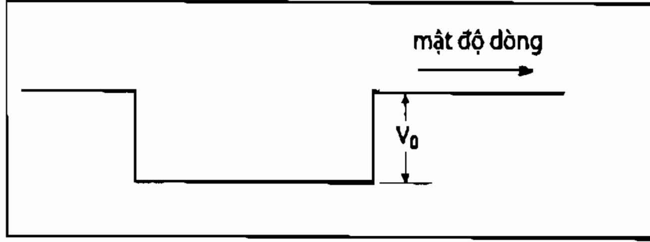
$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}[r\phi(r)] = \frac{4e}{3\pi\hbar^3}[2me\phi(r)]^{\frac{3}{2}}\,.$$

1014

Trong một bức tranh thô sơ, kim loại được minh hoạ như một hệ các điện tử tự do được giam trong một cái giếng có hiệu thế V_0. Do chuyển động nhiệt,

các điện tử với năng lượng đủ lớn sẽ thoát khỏi giếng. Tìm và mô tả mật độ dòng bức xạ cho mô hình này.

(*SUNY, Buffalo*)



Hình 1.5

Lời giải:

Số lượng trạng thái trong yếu tố thể tích $dp_xdp_ydp_z$ trong không gian động lượng là $dN = \frac{2}{h^3}dp_xdp_ydp_z$. Mỗi trạng thái ε có độ suy biến $\exp(-\frac{\varepsilon-\mu}{kT})$, trong đó ε là năng lượng của điện tử và μ là năng lượng Fermi.

Chỉ có các điện tử với thành phần động lượng $p_z > (2mV_0)^{1/2}$ có thể thoát ra khỏi giếng thế, trục z được chọn là song song với pháp tuyến ngoài của bề mặt kim loại. Do đó, số lượng điện tử thoát ra khỏi yếu tố thể tích trong khoảng thời gian dt là

$$dN' = Av_zdt\frac{2}{h^3}dp_xdp_ydp_z\exp\left(-\frac{\varepsilon-\mu}{kT}\right),$$

trong đó v_z là thành phần vận tốc của các điện tử theo hướng z thoả mãn điều kiện $mv_z > (2mV_0)^{1/2}$, A là diện tích của bề mặt kim loại. Vì thế, số lượng điện tử thoát khỏi bề mặt kim loại trên một đơn vị diện tích trong một đơn vị thời gian là

$$\begin{aligned}
R &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{(2mV_0)^{1/2}}^{+\infty}\frac{2v_z}{h^3}\exp\left(-\frac{\varepsilon-\mu}{kT}\right)dp_xdp_ydp_z \\
&= \frac{2}{mh^3}\exp\left(\frac{\mu}{kT}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{p_x^2}{2mkT}\right)dp_x\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{p_y^2}{2mkT}\right)dp_y \\
&\quad\times\int_{(2mV_0)^{1/2}}^{+\infty}p_z\exp\left(-\frac{p_z^2}{2mkT}\right)dp_z \\
&= \frac{4\pi mk^2T^2}{h^3}\exp\left(\frac{\mu-V_0}{kT}\right),
\end{aligned}$$

và mật độ dòng bức xạ là

$$J = -eR = -\frac{4\pi mek^2T^2}{h^3}\exp\left(\frac{\mu - V_0}{kT}\right),$$

được gọi là phương trình Richardson-Dushman.

1015

Một chùm tia hẹp các hạt trung hoà với spin 1/2 và momen từ μ hướng dọc theo trục x đi qua một thiết bị "Stern-Gerlach", thiết bị này tách chùm tia theo các giá trị của μ_z trong chùm tia. (Cơ bản, thiết bị gồm nhiều nam châm tạo ra một từ trường không đồng nhất $B_z(z)$, từ lực của nó trên các momen hạt gây ra độ dịch chuyển Δz tỉ lệ với $\mu_z B_z$).

(a) Hãy mô tả ảnh tách các trường hợp sau:

(i) Chùm tia phân cực dọc theo hướng $+z$.

(ii) Chùm tia phân cực dọc theo hướng $+x$.

(iii) Chùm tia phân cực dọc theo hướng $+y$.

(iv) Chùm tia không bị phân cực.

(b) Đối với các trường hợp trên, nếu trường hợp nào đó với các kết quả không thể phân biệt, hãy mô tả người ta phải làm như thế nào để phân biệt một trong số các trường hợp này nhờ các thực nghiệm bổ sung thêm, các thực nghiệm bổ sung này sử dụng thiết bị Stern-Gerlach trên và một vài thiết bị bổ sung khả dĩ.

(*Columbia*)

Lời giải:

(a) (i) Chùm tia phân cực dọc theo hướng $+z$ không bị tách nhưng hướng của nó bị thay đổi.

(ii) Chùm tia bị phân cực dọc theo hướng $+x$ tách thành 2 tia, một tia lệch theo hướng $+z$, một tia khác theo hướng $-z$.

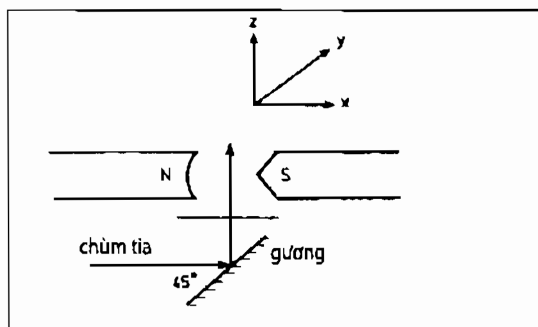
(iii) Cũng như trong (ii).

(iv) Chùm tia không phân cực bị tách thành 2 tia, một tia lệch theo hướng $+z$ và một tia lệch theo hướng $-z$.

(b) Các chùm tia của (ii), (iii) và (iv) không phân biệt được, chúng có thể phân biệt nhờ cách sau.

(1) Quay từ trường theo hướng $+y$. Điều này cho phân biệt (iii) từ (ii) và (iv), khi chùm tia trong (iii) không bị tách nhưng bị lệch, trong khi đó các chùm tia trong (ii) và (iv) mỗi chùm tia tách thành 2 chùm.

(2) Đặt một gương phản xạ ở mặt trước thiết bị, nó sẽ làm thay đổi các vị trí tương đối của nguồn và thiết bị (hình 1.6). Khi đó, chùm (ii) không tách mặc dù bị lệch, còn chùm tia (iv) tách thành 2.



Hình 1.6

1016

Phạm vi hoạt động của thế giữa 2 nguyên tử hydro là xấp xỉ 4 Å. Cho khí ở trạng thái cân bằng nhiệt, đánh giá bằng số nhiệt độ khí mà dưới nhiệt độ này, tán xạ nguyên tử - nguyên tử cơ bản là sóng s.

(*MIT*)

Lời giải:

Sóng tán xạ chủ yếu là sóng s khi $ka \leq 1$, trong đó a là độ dài tương tác giữa các nguyên tử hydro, k là số sóng de Broglie .

$$k = \frac{p}{\hbar} = \frac{\sqrt{2mE_k}}{\hbar} = \frac{\sqrt{2m \cdot \frac{3}{2}k_B T}}{\hbar} = \frac{\sqrt{3mk_B T}}{\hbar},$$

trong đó p là động lượng, E_k là động năng, m là khối lượng của nguyên tử hydro và k_B là hằng số Boltzmann. Điều kiện

$$ka = \sqrt{3mk_B T} \cdot \frac{a}{\hbar} \leq 1$$

cho

$$T \leq \frac{\hbar^2}{3mk_B a^2} = \frac{(1,06 \times 10^{-34})^2}{3 \times 1,67 \times 10^{-27} \times 1,38 \times 10^{-23} \times (4 \times 10^{-10})^2}$$

$$\approx 1 \text{ K}$$

1017

(a) Nếu bạn nhớ, hãy ghi lên giấy tiết diện ngang vi phân đối với tán xạ Rutherford theo đơn vị cm^2/sr. Nếu bạn không nhớ, thì hãy ghi lên giấy phỏng đoán tốt nhất của mình. Đảm bảo sự phụ thuộc Z, phụ thuộc năng lượng, phụ thuộc góc và các thứ nguyên là hợp lý. Hãy sử dụng biểu thức đó, hoặc là đúng hoặc là những suy đoán tốt nhất của bạn để đánh giá các phần (b-e) dưới đây.

Một máy gia tốc cung cấp 1 chùm tia proton 10^{12} hạt trong 1 giây và động lượng 200 MeV/c. Chùm tia này đi qua một cửa sổ nhôm 0,01 cm. (Mật độ nhôm $\rho = 2,7$ gm/cm^3, độ dài bức xạ của nhôm $x_0 = 24$ gm/cm^2, $Z = 13$, $A = 27$).

(b) Hãy tính tiết diện tán xạ Rutherford vi phân trong đơn vị cm^2/sr tại góc $30°$ cho chùm tia Al trên.

(c) Có bao nhiêu proton đến ống đếm tròn bán kính 1 cm cách nguồn một khoảng 2 m và lệch góc $30°$ với hướng chùm tia trong 1 giây?

(d) Hãy tính tiết diện ngang tán xạ Rutherford tích phân cho các góc $> 5°$. (Gợi ý: $\sin\theta d\theta = 4\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\frac{\theta}{2}$)

(e) Có bao nhiêu proton tán xạ ra ngoài chùm tia vào các góc $> 5°$?

(f) Hãy tính góc tán xạ Coulomb bội số căn quân phương thiết kế cho chùm tia proton qua cửa sổ trên. Lấy hằng số trong biểu thức cho tán xa Coulomb nhiều lần là 15 MeV/c.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Tiết diện ngang vi phân cho tán xạ Rutherford là

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{zZe^2}{2mv^2}\right)^2 \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-4}.$$

Công thức này có thể dùng cho hằng số không thứ nguyên, nếu ta nhớ

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-4},$$

và thừa nhận nó cũng phụ thuộc vào ze, Ze và $E = \frac{1}{2}mv^2$.

Đặt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = K(zZe^2)^x E^y \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-4},$$

trong đó K hằng số không thứ nguyên. Khi phân tích thứ nguyên cho

$$[L]^2 = (e^2)^x E^y .$$

Vì

$$\left[\frac{e^2}{r}\right] = [E],$$

từ đó

$$x = 2, y = -x = -2 .$$

(b) Cho các proton,

$$\beta \equiv \frac{v}{c} = \frac{pc}{\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}} = \frac{200}{\sqrt{938^2 + 200^2}} = 0,2085 .$$

Ta có

$$\frac{e^2}{mv^2} = r_0\left(\frac{m_e}{m}\right)\left(\frac{v}{c}\right)^{-2},$$

trong đó $r_0 = \frac{e^2}{m_ec^2} = 2,82 \times 10^{-13}$ cm là bán kính cổ điển của electron. Từ đó, tại $\theta = 30°$,

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \left(\frac{13}{2}\right)^2 r_0^2 \left(\frac{m_e}{m}\right)^2 \left(\frac{v}{c}\right)^{-4} \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-4} \\ &= \left(\frac{6,5 \times 2,82 \times 10^{-13}}{1836 \times 0,2085^2}\right)^2 \times (\sin 15°)^{-4} \\ &= 5,27 \times 10^{-28} \times (\sin 15°)^{-4} = 1,18 \times 10^{-25} \text{ cm}^2/\text{sr} .\end{aligned}$$

(c) Ống đếm đối diện với nguồn với góc đặc

$$d\Omega = \frac{\pi(0,01)^2}{2^2} = 7,85 \times 10^{-5} \text{ sr} .$$

Số proton tán xạ trên ống đếm trong 1 đơn vị thời gian là

$$\delta n = n\left(\frac{\rho t}{27}\right)A_v\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)\delta\Omega$$
$$= 10^{12}\times\left(\frac{2,7\times 0,01}{27}\right)\times 6,02\times 10^{23}\times 1,18\times 10^{-25}\times 7,85\times 10^{-5}$$
$$= 5,58\times 10^{3}\ \mathrm{s}^{-1}\,.$$

(d)

$$\sigma_I = \int\frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega = 2\pi\int_{5^\circ}^{180^\circ}\left(\frac{Ze^2}{2mv^2}\right)^2\frac{\sin\theta}{\sin^4\frac{\theta}{2}}d\theta$$
$$= 8\pi\left(\frac{Ze^2}{2mv^2}\right)^2\int_{5^\circ}^{180^\circ}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-3}d\sin\frac{\theta}{2}$$
$$= 4\pi\left(\frac{Ze^2}{2mv^2}\right)^2\left[\frac{1}{(\sin 2,5^\circ)^2}-1\right]$$
$$= 4\pi\times 5,27\times 10^{-28}\times\left[\frac{1}{(\sin 2,5^\circ)^2}-1\right]$$
$$= 3,47\times 10^{-24}\ \mathrm{cm}^2\,.$$

(e) Số proton tán xạ trong góc $\theta \geq 5^\circ$ là

$$\delta n = n\left(\frac{\rho t}{27}\right)A_v\sigma_I = 2,09\times 10^{9}\ \mathrm{s}^{-1}\,,$$

trong đó $A_v = 6,02\times 10^{23}$ là số Avogadro.

(f) Góc phản xạ Coulomb bội số căn quân phương được thiết kế cho chùm tia proton qua cửa sổ Al là

$$\theta_{\mathrm{rms}} = \frac{kZ}{\sqrt{2}\beta p}\sqrt{\frac{t}{x_0}}\left[1+\frac{1}{9}\ln\left(\frac{t}{x_0}\right)\right]\,,$$

trong đó k là hằng số bằng 15 MeV/c. Do $Z = 13$, $p = 200$ MeV/c, $\beta = 0,2085$, $t = 0,01\times 2,7$ g cm^{-2}, $x_0 = 24$ g cm^{-2}, $t/x_0 = 1,125\times 10^{-3}$, ta có

$$\theta_{rms} = \frac{15 \times 13}{\sqrt{2} \times 0,2085 \times 200} \times \sqrt{1,125 \times 10^{-3}} \left[1 + \frac{1}{9}\ln(1,125 \times 10^{-3})\right]$$

$$= 2,72 \times 10^{-2} \text{ rad}.$$

1018

Thời gian sống điển hình với 1 nguyên tử bị kích thích là 10^{-1}, 10^{-8}, 10^{-13}, 10^{-23} s.

(*Columbia*)

Lời giải:

Trả lời là 10^{-8} s.

1019

Một nguyên tử có khả năng kích thích ở 2 trạng thái: Trạng thái cơ bản, khối lượng M và trạng thái đã kích thích khối lượng $M + \Delta$. Nếu dịch chuyển từ trạng thái cơ bản đến trạng thái kích thích do hấp thụ một photon, tần số photon trong phòng thí nghiệm là bao nhiêu, ở đây nguyên tử ban đầu đứng yên?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Gọi tần số của photon là ν và động lượng của nguyên tử ở trạng thái kích thích là p. Định luật bảo toàn năng lượng và bảo toàn động lượng cho ta

$$Mc^2 + h\nu = [(M + \Delta)^2c^4 + p^2c^2]^{1/2},$$

$$\frac{h\nu}{c} = p,$$

từ đó có

$$\nu = \frac{\Delta c^2}{h}\left(1 + \frac{\Delta}{2M}\right).$$

1020

Nếu người ta đổi các toạ độ không gian của 2 electron ở một trạng thái mà

spin tổng cộng bằng 0:

(a) hàm sóng thay đổi dấu,

(b) hàm sóng không thay đổi dấu,

(c) hàm sóng thay đổi thành hàm sóng khác hoàn toàn.

(*CCT*)

Lời giải:

Trạng thái của spin tổng cộng bằng 0 có tính chẵn, nghĩa là đối xứng không gian. Từ đó, hàm sóng không thay đổi khi toạ độ không gian của các điện tử bị tráo đổi.

Như vậy, câu trả lời là (b).

1021

Độ rộng Doppler của 1 vạch quang phổ từ nguyên tử trong ngọn lửa là 10^6, 10^9, 10^{13}, 10^{16} Hz.

(*Columbia*)

Lời giải:

Hãy nhớ lại nguyên lý phân bố đều năng lượng $m\overline{v^2}/2 = 3kT/2$ với hydro ở nhiệt độ trong phòng $mc^2 \approx 10^9$ eV, $T = 300$ K, như thế ta có

$$\beta = \frac{v}{c} \approx \frac{\sqrt{\overline{v^2}}}{c} = \sqrt{\frac{3kT}{mc^2}} \sim 10^{-5} ,$$

trong đó, $k = 8,6 \times 10^{-5}$ eV/K là hằng số Boltzmann.

Độ rộng Doppler vào cỡ

$$\Delta\nu \approx \nu_0\beta .$$

Với ánh sáng khả kiến, $\nu_0 \sim 10^{14}$ Hz. Từ đó $\Delta\nu \sim 10^9$ Hz.

1022

Hãy đánh giá cỡ độ rộng Doppler của vạch phát xạ bước sóng $\lambda = 5000$ Å

của agon $A = 40$, $Z = 18$, tại $T = 300$ K. (*Columbia*)

Lời giải:

Từ nguyên lý phâp bố đều năng lượng $\frac{1}{2}m\bar{v^2} = \frac{3}{2}kT$ cho

$$v \approx \sqrt{\bar{v^2}} = c\sqrt{\frac{3kT}{mc^2}}$$

với $mc^2 = 40 \times 938$ MeV, $kT = 8,6 \times 10^{-5} \times 300 = 2,58 \times 10^{-2}$ eV. Như thế

$$\beta = \frac{v}{c} = 1,44 \times 10^{-6}$$

độ rộng Doppler đầy đủ là

$$\Delta\lambda \approx 2\beta\lambda = 1,44 \times 10^{-2}\ \text{Å}\,.$$

1023

Tiết diện ngang điển hình cho tán xạ electron nguyên tử năng lượng thấp là 10^{-16}, 10^{-24}, 10^{-32}, 10^{-40} cm^2.

(*Columbia*)

Lời giải:

Chiều dài của nguyên tử cỡ 10^{-8} cm, vậy tiết diện ngang là cỡ $(10^{-8})^2 = 10^{-16}$ cm^2.

1024

Một electron bị nhốt trong một hốc cầu rỗng, bán kính R với vách không thẩm thấu. Hãy tìm biểu thức cho áp suất tác dụng lên các vách hốc bởi electron ở trạng thái cơ bản.

(*MIT*)

Lời giải:

Giả thiết bán kính hốc tăng dR. Công thực hiện bởi electron trong quá trình là $4\pi R^2 P dR$, làm giảm năng lượng của electron là dE. Từ đó, áp suất nén lên vách bởi electron là

$$P = -\frac{1}{4\pi R^2}\frac{dE}{dR}\,.$$

Với electron ở trạng thái cơ bản, mômen động lượng = 0 và hàm sóng có dạng

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{\chi(r)}{r} ,$$

trong đó, $\chi(r)$ là phần nghiệm xuyên tâm của phương trình Schrödinger,

$$\chi''(r) + k^2\chi(r) = 0 ,$$

với $k^2 = 2mE/\hbar^2$ và $\chi(r) = 0$ tại $r = 0$. Do vậy,

$$\chi(r) = A \sin kr .$$

Do các vách không thẩm thấu, $\chi(r) = 0$ tại $r = R$, cho $k = \pi/R$. Từ đó, năng lượng electron ở trạng thái cơ bản là

$$E = \frac{\pi^2 h^2}{2mR^2} ,$$

và áp suất là

$$P = -\frac{1}{4\pi R^2}\frac{dE}{dR} = \frac{\pi h^2}{4mR^5} .$$

1025

Một hạt với mômen từ $\mu = \mu_0$s và độ lớn spin s là 1/2 đặt trong từ trường không đổi **B** hướng dọc trục x. Tại $t = 0$, hạt tìm thấy có $s_z = +1/2$. Tìm xác suất hạt với $s_y = \pm 1/2$ tại một thời điểm bất kì sau đó.

(*Columbia*)

Lời giải:

Trong biểu diễn (s^2, s_x), các ma trận spin là

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

với các hàm riêng tương ứng $\binom{1}{0}$, $\binom{1}{1}$, $\binom{1}{i}$. Như vậy, Haminton của tương tác giữa momen từ của hạt và từ trường ngoài là

$$H = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = -\frac{\mu_0 B}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ,$$

và phương trình Schrödinger là

$$i\hbar\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}a(t)\\b(t)\end{pmatrix} = -\frac{\mu_0 B}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a(t)\\b(t)\end{pmatrix},$$

trong đó $\begin{pmatrix}a(t)\\b(t)\end{pmatrix}$ là hàm sóng của hạt tại thời điểm t. Ban đầu, chúng ta có $\begin{pmatrix}a(0)\\b(0)\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$, và do vậy nghiệm là

$$\begin{pmatrix}a(t)\\b(t)\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\exp\left(i\frac{\mu_0 Bt}{2\hbar}\right)\\ i\exp\left(-i\frac{\mu_0 Bt}{2\hbar}\right)\end{pmatrix}.$$

Từ đó, xác suất hạt ở trạng thái $s_y = +1/2$ tại thời điểm t là

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2}}(1\ 1)\begin{pmatrix}a(t)\\b(t)\end{pmatrix}\right|^2 = \frac{1}{4}\left|\exp\left(i\frac{\mu_0 Bt}{2\hbar}\right) + i\exp\left(-i\frac{\mu_0 Bt}{2\hbar}\right)\right|^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \sin\frac{\mu_0 Bt}{\hbar}\right).$$

Tương tự, xác suất hạt ở trạng thái $s_y = -1/2$ tại thời điểm t là $\frac{1}{2}(1 - \sin\frac{\mu_0 Bt}{\hbar})$.

1026

Trạng thái cơ bản của nguyên tử heli thực, tất nhiên là không suy biến. Tuy nhiên, hãy khảo sát một nguyên tử heli giả định, trong nó 2 electron được thay bằng 2 hạt đồng nhất điện tích âm spin 1. Bỏ qua lực phụ thuộc spin. Với nguyên tử này, độ suy biến của trạng thái cơ bản là gì? Đưa ra lập luận giả định của bạn?

(*CUSPEA*)

Lời giải:

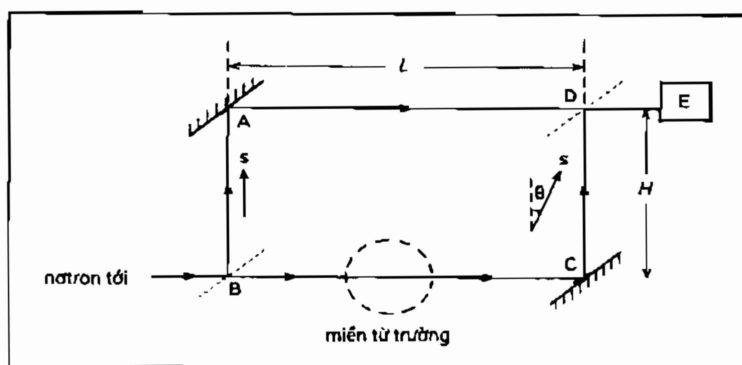
Các hạt spin 1 là boson. Như vậy, hàm sóng phải đối xứng với sự thay đổi hạt. Vì với trạng thái cơ bản hàm sóng không gian đối xứng, phần spin cũng phải đối xứng. Với 2 hạt spin 1, spin tổng cộng S có thể là 2, 1 hoặc 0. Các

hàm sóng spin cho $S = 2$ và $S = 0$ là đối xứng, trong khi đó, hàm sóng spin cho $S = 1$ là phản đối xứng. Từ đó, cho trạng thái cơ bản chúng ta có $S = 2$ hoặc $S = 0$. Độ suy biến tổng cộng là

$$(2 \times 2 + 1) + (2 \times 0 + 1) = 6 \,.$$

1027

Một chùm tia nơtron (khối lượng m) lan truyền với vận tốc phi tương đối tính v đập vào một hệ thống được vẽ trong hình 1.7 và với các gương tách chùm tia ở B và D, các gương ở A và C và một bộ thu nơtron tại E. Tất cả các góc là góc vuông và không có gương nào hoặc không có bộ tách nào ảnh hưởng đến spin nơtron. Các tia được tách tại B hợp nhất lại một cách kết hợp tại D và bộ thu E thông báo cường độ nơtron I.



Hình 1.7

(a) Trong phần này của bài toán, giả thiết hệ ở trong mặt phẳng thẳng đứng sao cho trọng lực hướng xuống dưới song song với AB và DC. Gọi cường độ thu được là I_0 đối với hệ nằm trong mặt phẳng ngang, hãy suy ra biểu thức cho cường độ I_g đối với cấu hình thẳng đứng.

(b) Với phần này của bài toán, giả sử hệ nằm trong một mặt phẳng ngang. Một từ trường đồng nhất hướng ra ngoài mặt phẳng, tác dụng trong vòng nét đứt đã vẽ, nó bao hàm 1 phần đoạn BC. Các nơtron tới bị phân cực với spin hướng dọc BA như trong hình. Các nơtron này đi qua miền từ trường, spin của chúng bị nén lại một phần tùy thuộc vào cường độ từ trường. Giả sử, giá trị kì vọng spin nén qua 1 góc θ như đã được chỉ ra. Cho $I(\theta)$ là cường độ tại bộ thu E. Hãy suy ra $I(\theta)$ như là một hàm của θ, cho biết $I(\theta = 0) = I_0$.

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Giả sử, khi hệ trong mặt phẳng ngang, 2 chùm tia nơtron tách nhau có cùng cường độ khi chúng đạt tới D và như thế, mỗi hàm sóng có biên độ $\sqrt{I_0}/2$. Bây giờ, hãy khảo sát hệ trong mặt phẳng thẳng đứng. Do BA và CD là tương đương nhau về mặt động lực học, không cần phải khảo sát chúng. Vận tốc của nơtron v trong BC và v_1 trong AD là có quan hệ với nhau qua phương trình năng lượng

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgH\,,$$

cho

$$v_1 = \sqrt{v^2 - 2gH}\,.$$

Khi hai tia tái hợp tại D, hàm sóng là

$$\Psi = \left[\frac{\sqrt{I_0}}{2}\exp\left(i\frac{mv_1}{\hbar}L\right) + \frac{\sqrt{I_0}}{2}\exp\left(i\frac{mv}{\hbar}L\right)\right]\exp\left(-i\frac{Et}{\hbar}\right)\exp(i\delta)\,,$$

và cường độ là

$$I_g = |\Psi|^2 = \frac{I_0}{2} + \frac{I_0}{2}\cos\left[\frac{mL(v-v_1)}{\hbar}\right] = I_0\cos^2\left[\frac{mL(v-v_1)}{2\hbar}\right]\,.$$

Nếu chúng ta có thể lấy $\frac{1}{2}mv^2 \gg mgH$, khi đó $v_1 \approx v - \frac{gH}{v}$ và

$$I_g \approx I_0\cos^2\left(\frac{mgHL}{2\hbar v}\right)\,.$$

(b) Lấy trục z cùng hướng BA và tiếp tục trong biểu diễn (s^2, s_z). Tại D, trạng thái spin là $\binom{1}{0}$ cho các nơtron diễn tiến dọc theo BAD và là $\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$ cho các diễn tiến đó dọc theo BCD. Sự tái tổ hợp cho biết

$$\Psi = \frac{\sqrt{I_0}}{2}\exp\left(-i\frac{Et}{\hbar}\right)\exp(i\delta)\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\cos\dfrac{\theta}{2}\\ \sin\dfrac{\theta}{2}\end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{I_0}}{2}\exp\left(-i\frac{Et}{\hbar}\right)\exp(i\delta)\begin{pmatrix}1+\cos\dfrac{\theta}{2}\\ \sin\dfrac{\theta}{2}\end{pmatrix}\,,$$

và từ đó

$$I(\theta) = |\Psi|^2 = \frac{I_0}{4}\left[\left(1 + \cos\frac{\theta}{2}\right)^2 + \sin^2\frac{\theta}{2}\right] = I_0 \cos^2\frac{\theta}{4}\,.$$

1028

Cấu trúc tinh tế của các vạch phổ nguyên tử xuất phát từ

(a) liên kết spin quỹ đạo của electron,

(b) tương tác giữa electron và hạt nhân,

(c) spin hạt nhân.

(CCT)

Lời giải:

Câu trả lời là (a).

1029

Khoảng tách siêu tinh tế của trạng thái cơ bản hydro là 10^{-7}, 10^{-5}, 10^{-3}, 10^{-1} eV.

(Columbia)

Lời giải:

Với hydro nguyên tử, khoảng độ rộng siêu tinh tế thực nghiệm $\Delta\nu_{hf} = 1,42\times 10^9$ s^{-1}. Như thế $\Delta E = h\nu_{hf} = 4,14\times 10^{-15}\times 1,42\times 10^9 = 5,9\times 10^{-6}$ eV. Vậy, câu trả lời là 10^{-5} eV.

1030

Cấu trúc siêu tinh tế của hydro

(a) quá nhỏ để phát hiện được.

(b) xuất phát từ spin hạt nhân.

(c) xuất phát từ kích cỡ hạt nhân hữu hạn. (*CCT*)

Lời giải:

Trả lời (b).

1031

Khoảng tách spin - quỹ đạo của trạng thái $2p$ hydro là 10^{-6}, 10^{-4}, 10^{-2}, 10^{0} eV.

(*Columbia*)

Lời giải:

Với trạng thái $2p$ của nguyên tử hydro, $n = 2$, $l = 1$, $s = 1/2$, $j_1 = 3/2$, $j_2 = 1/2$. Khoảng năng lượng tách do tương tác liên kết spin - quỹ đạo là

$$\Delta E_{ls} = \frac{hcR\alpha^2}{n^3 l \left(l + \frac{1}{2}\right)(l+1)} \left[\frac{j_1(j_1+1) - j_2(j_2+1)}{2}\right],$$

trong đó R là hằng số Rydberg và $hcR = 13,6$ eV là thế ion hoá của nguyên tử hydro, $\alpha = \frac{1}{137}$ là hằng số cấu trúc tinh tế. Như thế

$$\Delta E_{ls} = \frac{13,6 \times (137)^{-2}}{2^3 \times \frac{3}{2} \times 2} \times \frac{1}{2}\left(\frac{15}{4} - \frac{3}{4}\right) = 4,5 \times 10^{-5} \text{ eV}.$$

Vậy, câu trả lời là 10^{-4} eV.

1032

Dịch chuyển Lamb là

(a) sự tách giữa các mức năng lượng $1s$ và $2s$ trong nguyên tử hydro.

(b) do những thăng giáng của trường điện từ.

(c) do tiến động Thomas. (*CCT*)

Lời giải:

Câu trả lời là (b).

1033

Vận tốc trung bình của electron trên quỹ đạo Bohr thứ nhất của một nguyên tử có nguyên tử số Z trong đơn vị vận tốc ánh sáng

(a) $Z^{1/2}$.

(b) Z.

(c) Z/137. (*CCT*)

Lời giải:

Gọi vận tốc trung bình của electron là v, khối lượng của electron là m và bán kính của quỹ đạo Bohr thứ nhất là a. Do

$$\frac{mv^2}{a} = \frac{Ze^2}{a^2}, \qquad a = \frac{\hbar^2}{mZe^2},$$

Ta có

$$v = \frac{Ze^2}{\hbar} = Zc\alpha,$$

trong đó $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$ là hằng số cấu trúc tinh tế. Từ đó, câu trả lời là (c).

1034

Những thí nghiệm sau đây có ý nghĩa trong việc phát triển lý thuyết lượng tử. Chọn HAI. Trong mỗi trường hợp, mô tả tỉ mỉ thí nghiệm và trạng thái mà nó đã đóng góp vào sự phát triển của lý thuyết. Cho gần đúng ngày tháng thực nghiệm.

(a) Thí nghiệm Stern-Gerlach.

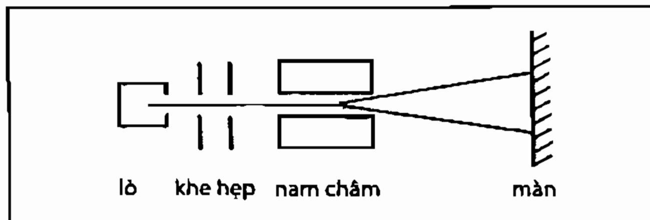
(b) Hiệu ứng Compton.

(c) Thí nghiệm Franck-Hertz.

(d) Thí nghiệm Lamb-Rutherford. (*Wisconsin*)

Lời giải:

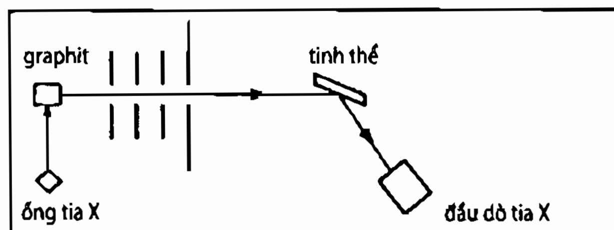
(a) *Thí nghiệm Stern-Gerlach*. Thí nghiệm đã được thực hiện năm 1921 do Stern và Gerlach sử dụng thiết bị như đã cho trong hình 1.8. Một chùm tia chuẩn trực cao ($v \approx 500$ m/s) của các nguyên tử bạc từ lò đi qua các cực của một nam châm. Các cực được tạo hình để sinh ra từ trường hoàn toàn không đồng nhất (gradien từ trường $\sim 10^3$ T/m, trong phạm vi ~ 4 cm) thẳng góc với chùm tia. Các lực do tương tác giữa thành phần μ_z của momen từ theo hướng từ trường và gradien từ trường gây ra sự lệch chùm tia, độ lớn của chúng phụ thuộc vào μ_z. Stern và Gerlach đã tìm ra là chùm tia tách thành 2, chứ không chỉ là được mở rộng sau khi đi qua từ trường. Điều đó đã cung cấp chứng cứ cho sự lượng tử hoá không gian momen động lượng nguyên tử.



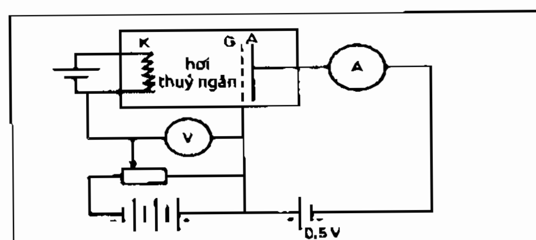
Hình 1.8

(b) *Hiệu ứng Compton*. A. H. Compton đã phát minh phát hiện ra hiện tượng các tia X đơn sắc bị tán xạ nhờ một bia thích hợp (hình 1.9), bức xạ bị tán xạ thu được gồm 2 thành phần, một thành phần không bị thay đổi phổ, còn thành phần khác với bước sóng tăng lên. Hơn nữa, Compton đã tìm được sự thay đổi bước sóng của thành phần sau là một hàm chỉ của góc phản xạ, nhưng độc lập với bước sóng của bức xạ tới và với vật liệu tán xạ. Năm 1923, sử dụng giả thuyết của Einstein về lượng tử ánh sáng và định luật bảo toàn động lượng và năng lượng, Compton đã thu được hệ thức giữa sự thay đổi bước sóng và góc tán xạ, $\Delta\lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$, nó phù hợp tuyệt vời với các kết quả thực nghiệm. Hiệu ứng Compton ủng hộ trực tiếp lý thuyết lượng tử ánh sáng của Einstein.

(c) *Thí nghiệm Franck-Hertz*. Được Franck và Hertz thực hiện năm 1914, thí nghiệm này đã chứng minh lý thuyết Bohr về lượng tử hoá các trạng thái năng lượng cũng như đã cung cấp một phương pháp để đo khoảng cách năng lượng giữa các trạng thái lượng tử. Cách bố trí thí nghiệm đã chỉ ra trong hình 1.10.



Hình 1.9



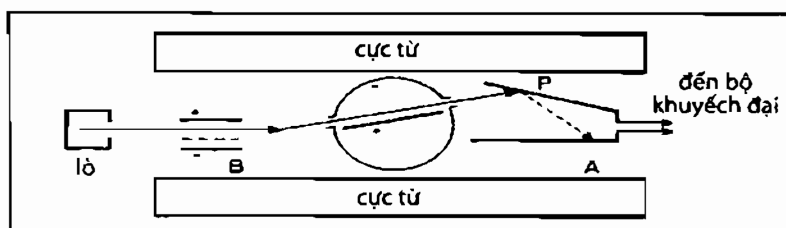
Hình 1.10

Một bình thuỷ tinh đựng đầy hơi Hg, chứa catốt K, lưới G và anốt A. Các electron nhiệt phát xạ từ K được gia tốc nhờ một điện trường đến G, ở đây, một trường hãm nhỏ ngăn chặn những electron năng lượng thấp đạt tới A. Dòng điện đã được quan sát và được phát hiện nhờ ampe kế A, đầu tiên tăng với thế tăng cho đến khi đạt 4,1 V. Sau đó, dòng giảm đột ngột cho đến khi tăng trở lại. Tại các thế 9,0 V và 13,9 V, hiện tượng tương tự được lặp lại. Điều này đã chỉ ra là dòng điện từ giảm đột ngột khi thế tăng 4,9 V (sự tăng đột ngột đầu tiên tại 4,1 V là do thế tiếp xúc của dụng cụ), chỉ ra 4,9 eV là trạng thái kích thích đầu tiên của Hg trên trạng thái cơ bản. Với những cải tiến tiếp tục trong thiết bị Franck và Hertz có khả năng quan sát những trạng thái kích thích cao hơn của nguyên tử.

(d) *Thí nghiệm Lamb-Rutherford*. Năm 1947, khi Lamb và Rutherford đo phổ nguyên tử hydro một cách chính xác nhờ sử dụng phương pháp RF, họ đã tìm ra sự khác biệt với các dự đoán lý thuyết của Dirac, lý thuyết này đòi hỏi các trạng thái cùng (n, j) nhưng l khác nhau là suy biến. Thay vào đó, họ đã tìm ra được sự tách nhỏ, sự tách đó là dịch chuyển Lamb, được giải thích trọn vẹn bằng tương tác giữa electron và trường bức xạ của nó. Thí nghiệm đã cung cấp một bằng chứng mạnh ủng hộ cho điện động lực học lượng tử.

Sơ đồ thí nghiệm được vẽ trong hình 1.11. Khi hydro chứa trong lò được

đốt nóng đến nhiệt độ 2500 K, bị ion hoá 64% (vận tốc trung bình 8×10^3 m/s). Chùm tia nguyên tử phát xạ va chạm tại B với tia e ngang qua, năng lượng cao hơn 10,2 eV chút ít và bị kích thích đến các trạng thái $2^2S_{1/2}$, $2^2P_{1/2}$, $2^2P_{3/2}$.



Hình 1.11

Các nguyên tử ở trạng thái P dịch chuyển tự phát đến trạng thái cơ bản $1^2S_{1/2}$ hầu như ngay lập tức trừ trạng thái $2^2S_{1/2}$ là trạng thái nửa bền được giữ lại. Như thế, chùm tia nguyên tử chỉ bao gồm các trạng thái $2^2S_{1/2}$ và $1^2S_{1/2}$ khi nó va chạm lên tấm vonfam P. Công thoát của vonfam nhỏ hơn 10,2 eV, do đó các nguyên tử ở trạng thái $2^2S_{1/2}$ có thể bắn electron khỏi bản vonfam P, các e này sau đó đã bay đến A, kết quả là một dòng điện giữa P và A, đo được sau khi khuếch đại. Cường độ dòng điện đã cho độ lớn số nguyên tử ở trạng thái $2^2S_{1/2}$. Bức xạ vi ba được đặt vào giữa miền kích thích và miền phát hiện tạo ra sự dịch chuyển trạng thái $2^2S_{1/2}$ đến trạng thái P, nó hầu như phân rã ngay lập tức đến trạng thái cơ bản. Kết quả là xảy ra sự sụt giảm dòng điện xảy ra. Năng lượng vi ba tương ứng với dòng điện nhỏ nhất là hiệu năng lượng giữa 2 trạng thái $2^2S_{1/2}$ và $2^2P_{1/2}$. Về mặt thực nghiệm, tần số dịch chuyển Lamb đã tìm được là 1057 MHz.

1035

(a) Xuất phát từ định luật Coulomb và sự lượng tử hoá đơn giản của momen động lượng, xác định các mức năng lượng của nguyên tử hydro.

(b) Cái gì gây ra cấu trúc vạch kép của quang phổ Na?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Lực Coulomb giữa electron và hạt nhân hydro là

$$F = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,.$$

Trong mô hình đơn giản nhất, electron chuyển động quanh hạt nhân trên một quỹ đạo tròn bán kính r với vận tốc v và momen động lượng $p_\phi = mvr$ được lượng tử hoá tương ứng với điều kiện

$$p_\phi = n\hbar\,,$$

trong đó $n = 1, 2, 3, \ldots$ và $\hbar = h/2\pi$, h là hằng số Planck. Với electron chuyển động quanh hạt nhân, ta có

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,,$$

do đó

$$v = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 n\hbar}\,.$$

Từ đó, năng lượng đã được lượng tử hoá là

$$E_n = T + V = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{1}{2}mv^2$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{me^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2\hbar^2 n^2}\,,$$

với $n = 1, 2, 3, \ldots$.

(b) Cấu trúc vạch kép của quang phổ Na do liên kết giữa momen động lượng quỹ đạo và momen động lượng spin của electron hoá trị.

1036

Chúng ta có thể tổng quát hoá hệ thức Bohr-Sommerfeld bán cổ điển

$$\oint \mathbf{p}\cdot d\mathbf{r} = \left(n + \frac{1}{2}\right)2\pi\hbar$$

(với tích phân dọc theo một quỹ đạo kín) để áp dụng cho trường hợp trường điện từ được biểu diễn bởi phép thế $\mathbf{p} \to \mathbf{p} - \frac{e\mathbf{A}}{c}$. Sử dụng điều này và phương trình chuyển động cho momen động lượng tuyến tính $\mathbf{p}$ để suy ra điều kiện lượng tử hoá trên từ thông của một điện tử bán cổ điển nằm trong từ trường

B trong một quỹ đạo bay tuỳ ý. Với các điện tử trong vật rắn, điều kiện này có thể được biểu diễn lại dưới dạng kích cỡ của quỹ đạo không gian trong không gian k. Hãy tìm điều kiện lượng tử hoá đối với S dưới dạng B. (Bỏ qua các hiệu ứng spin)?

(*Chicago*)

Lời giải:

Kí hiệu quỹ đạo kín là C. Giả sử **B** là hằng số, theo định luật II Newton

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{e}{c}\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B}$$

cho ta

$$\oint_C \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{e}{c}\oint_C (\mathbf{r} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} = \frac{e}{c}\oint_C \mathbf{B} \cdot \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = \frac{2e}{c}\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{2e}{c}\Phi\,,$$

trong đó Φ là từ thông đi qua mặt S được bao bởi quỹ đạo kín. Mặt khác, sử dụng định lý Stokes

$$-\frac{e}{c}\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{e}{c}\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{e}{c}\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{e}{c}\Phi\,.$$

Do đó

$$\oint \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right) \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r} - \frac{e}{c}\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \frac{2e}{c}\Phi - \frac{e}{c}\Phi = \frac{e}{c}\Phi\,.$$

Hệ thức Bohr-Sommerfeld suy rộng cho ta

$$\Phi = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{2\pi\hbar c}{e}\,,$$

là điều kiện lượng tử hoá đối với từ thông.

Trên mặt phẳng vuông góc với **B**,

$$\Delta p \equiv \hbar\Delta k = \frac{e}{c}B\Delta r\,,$$

nghĩa là,

$$\Delta r = \frac{\hbar c}{eB}\Delta k\,.$$

Từ đó, diện tích quỹ đạo S trong không gian k và A trong không gian r có liên quan nhờ

$$A = \left(\frac{\hbar c}{eB}\right)^2 S\,.$$

Sử dụng điều kiện lượng tử hoá đối với từ thông, ta có

$$A = \frac{\Phi}{B} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{2\pi\hbar c}{eB}\,,$$

hoặc

$$\left(\frac{\hbar c}{eB}\right)^2 S = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{2\pi\hbar c}{eB}\,.$$

Do đó, điều kiện lượng tử đối với diện tích quỹ đạo S trong không gian k là

$$S = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{2\pi e}{\hbar c}B\,.$$

1037

Nếu một quả cầu tích điện mật độ đồng nhất rất nhỏ trong một thế tĩnh điện $V(\mathbf{r})$, thế năng của nó là

$$U(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}) + \frac{r_0^2}{6}\nabla^2 V(\mathbf{r}) + \cdots$$

trong đó $\mathbf{r}$ là vị trí của tâm điện tích và r_0 là bán kính rất nhỏ của nó. Dịch chuyển Lamb có thể coi là một hiệu chỉnh nhỏ các mức năng lượng của nguyên tử hydro do điện tử vật lý có tính chất này.

Nếu số hạng r_0^2 của U được khảo sát như một nhiễu loạn rất nhỏ so với tương tác Coulomb $V(\mathbf{r}) = -e^2/r$, những dịch chuyển Lamb cho các mức $1s$ và $2p$ của nguyên tử hydro là bao nhiêu? Hãy biểu diễn kết quả dưới dạng r_0 và các hằng số cơ bản. Các hàm sóng không nhiễu loạn là

$$\psi_{1s}(\mathbf{r}) = 2a_B^{-3/2}\exp(-r/a_B)Y_0^0\,,$$

$$\psi_{2pm}(\mathbf{r}) = a_B^{-5/2} r\exp(-r/2a_B)Y_1^m/\sqrt{24}\,,$$

trong đó $a_B = \hbar^2/m_e e^2$.

(CUSPEA)

Lời giải:

Khi

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}) = -e^2\nabla^2\frac{1}{r} = 4\pi e^2\delta(\mathbf{r})\,,$$

trong đó $\delta(\mathbf{r})$ là hàm đenta Dirac được định nghĩa bởi

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r}),$$

ta có

$$\int \psi^* \nabla^2 V(\mathbf{r})\psi d^3\mathbf{r} = 4\pi e^2 \int \psi^*(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r})d^3\mathbf{r} = 4\pi e^2 \psi^*(0)\psi(0).$$

Do đó

$$\begin{aligned}\Delta E_{1s} &= \frac{r_0^2}{6} \cdot 4\pi e^2 \psi_{1s}^*(0)\psi_{1s}(0)\\ &= \frac{r_0^2}{6} \cdot 4\pi e^2 \cdot 4a_B^{-3} = \frac{8\pi e^2 r_0^2}{3} a_B^{-3},\\ \Delta E_{2p} &= \frac{r_0^2}{6} \cdot 4\pi e^2 \psi_{2p}^*(0)\psi_{2p}(0) = 0.\end{aligned}$$

1038

(a) Hãy chỉ rõ đa cực chủ yếu (như E1 (lưỡng cực điện), E2, E3 ..., M1, M2, M3...) cho bức xạ photon tự phát do điện tử nguyên tử bị kích thích trong các chuyển dịch sau,

$$2p_{1/2} \to 1s_{1/2},$$

$$2s_{1/2} \to 1s_{1/2},$$

$$3d_{3/2} \to 2s_{1/2},$$

$$2p_{3/2} \to 2p_{1/2},$$

$$3d_{3/2} \to 2p_{1/2}.$$

(b) Hãy đánh giá tốc độ của các chuyển dịch đầu tiên ở các chuyển dịch trên theo đơn vị tần số photon ω, bán kính nguyên tử a, và các hằng số vật lý cần thiết khác bất kì. Hãy đánh giá sơ bộ các tốc độ này đối với một sự chuyển dịch nguyên tử điển hình.

(c) Hãy đánh giá tỉ số của các tốc độ chuyển dịch khác (các chuyển dịch khác trong (a)) liên quan đến chuyển dịch đầu tiên cùng dạng các tham số như trong (b).

(*UC, Berkeley*)

Lời giải:

(a) Trong các chuyển dịch đa cực cho bức xạ photon tự phát, sự bảo toàn momen động lượng đòi hỏi

$$|j_i - j_f| \leq L \leq j_i + j_f \,,$$

L là bậc chuyển dịch, sự bảo toàn chẵn lẻ đòi hỏi

$$\Delta P = (-1)^L \text{ cho bức xạ đa cực điện}\,,$$

$$\Delta P = (-1)^{L+1} \text{ cho bức xạ đa cực từ}\,.$$

Sự chuyển dịch với bậc L nhỏ nhất là khả dĩ nhất. Từ đó

$$2p_{1/2} \to 1s_{1/2} : L = 1, \Delta P = -, \text{ chuyển dịch là E1}\,,$$

$$2s_{1/2} \to 1s_{1/2} : L = 0, \Delta P = +,$$

$$\text{chuyển dịch là chuyển dịch lưỡng cực photon kép}\,,$$

$$3d_{3/2} \to 2s_{1/2} : L = 1, 2, \Delta P = +, \text{ chuyển dịch là M1 hay E2}\,,$$

$$2p_{3/2} \to 2p_{1/2} : L = 1, 2, \Delta P = +, \text{ chuyển dịch là M1 hay E2}\,,$$

$$3d_{3/2} \to 2p_{1/2} : L = 1, 2, \Delta P = -, \text{ chuyển dịch là E1}\,.$$

(b) Xác suất chuyển dịch tự phát từ $2p_{1/2}$ đến $1s_{1/2}$ trong một đơn vị thời gian là

$$A_{E1} = \frac{e^2\omega^3}{3\pi\varepsilon_0\hbar c^3}|\mathbf{r}_{12}|^2 = \frac{4}{3}\alpha\omega^3\left(\frac{|\mathbf{r}_{12}|}{c}\right)^2,$$

trong đó $\alpha = e^2/(4\pi\varepsilon_0\hbar c) = 1/137$ là hằng số cấu trúc tinh tế. Khi $|\mathbf{r}_{12}| \approx a$,

$$A_{E1} \approx \frac{4}{3}\alpha\omega^3\left(\frac{a}{c}\right)^2.$$

Với $a \sim 10^{-10}$ m, $\omega \sim 10^{16}$ s^{-1}, ta có $A_{E1} \sim 10^9$ s^{-1}.

(c)

$$\frac{A(2^2s_{\frac{1}{2}} \to 1^2s_{\frac{1}{2}})}{A_{E1}} \approx 10\left(\frac{\hbar}{mc\alpha}\right),$$

$$\frac{A(3d_{\frac{3}{2}} \to 2s_{\frac{1}{2}})}{A_{E1}} \approx (ka)^2,$$

$$\frac{A(2p_{\frac{3}{2}} - 2p_{\frac{1}{2}})}{A_{E1}} \approx (ka)^2,$$

trong đó $k = \omega/c$ là số sóng của photon,

$$\frac{A(3d_{3/2} \to 2p_{1/2})}{A_{E1}} \approx \left[\frac{\omega(3d_{3/2} \to 2p_{1/2})}{\omega(2p_{1/2} \to 1s_{1/2})}\right]^3$$

1039

(a) Năng lượng của nơtrino trong phân rã beta?

(b) Sự phụ thuộc vào số hiệu nguyên tử Z của thời gian sống đối với phân rã tự phát của trạng thái $2p$ trong các nguyên tử giống nguyên tử hydro H, He^+, Li^{++}, v.v.?

(c) Cấu hình điện tử, spin tổng cộng S, momen động lượng quỹ đạo L và momen động lượng toàn phần J của trạng thái cơ bản của nguyên tử oxy là bao nhiêu?

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Năng lượng của nơtrino được bức xạ trong phân rã β điển hình là $E_\nu \approx 1$ MeV.

(b) Xác suất của chuyển dịch tự phát $2p \to 1s$ trong một đơn vị thời gian là (**Bài tập 1038(b)**) $A \propto |\mathbf{r}_{12}|^2\omega^3$, trong đó

$$|\mathbf{r}_{12}|^2 = |\langle 1s(Zr)|\mathbf{r}|2p(Zr)\rangle|^2,$$

$|1s(Zr)\rangle$ và $|2p(Zr)\rangle$ là các hàm sóng theo bán kính của nguyên tử giống hydro có điện tích hạt nhân Z, và

$$\omega = \frac{1}{\hbar}(E_2 - E_1).$$

Vì

$$1s(Zr)\rangle = \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} 2e^{\frac{-Zr}{a_0}},$$

$$2p(Zr)\rangle = \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{Zr}{a_0\sqrt{3}} e^{-\frac{Zr}{2a_0}},$$

a_0 là hằng số, với $Z > 1$, ta có

$$|\mathbf{r}_{12}|^2 \propto Z^{-2}, \qquad \omega^3 \propto Z^6,$$

và do đó $A \propto Z^4$. Từ đó, thời gian sống τ là

$$\tau \propto \frac{1}{A} \propto Z^{-4}.$$

(c) Cấu hình điện tử của trạng thái cơ bản của nguyên tử oxy là $1s^2 2s^2$ $2p^4$. Vì trạng thái có $S = 1$, $L = 1$, $J = 2$, nên nó được kí hiệu là $^3P_2$.

1040

Giả sử rằng do những lực vi phạm tính chẵn lẻ nhỏ mà mức $2^2S_{1/2}$ của nguyên tử hydro có độ tạp sóng p nhỏ

$$\Psi(n = 2, j = 1/2) = \Psi_s(n = 2, j = 1/2, l = 0) + \varepsilon\Psi_p(n = 2, j = 1/2, l = 1).$$

Phân rã bức xạ bậc nhất bằng bao nhiêu sẽ khử kích thích của trạng thái này? Dạng của yếu tố ma trận phân rã là gì? Nó sẽ trở thành gì nếu $\varepsilon \to 0$ và giải thích tại sao?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Bức xạ lưỡng cực điện sẽ khử kích thích phần sóng p của trạng thái trộn này: $\Psi_p(n = 2, j = 1/2, l = 1) \to \Psi_s(n = 1, j = 1/2, l = 0)$. Trạng thái $\Psi_s(n = 2, j = 1/2, l = 0)$ sẽ không phân rã vì nó là trạng thái nửa bền. Ma trận phân rã, tức ma trận T, là

$$\langle\Psi_f|T|\Psi_i\rangle = \varepsilon \int \Psi_f^* V(\mathbf{r})\Psi_i d^3r,$$

trong đó, cho bức xạ lưỡng cực điện, ta có

$$V(\mathbf{r}) = -(-e\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E} = erE\cos\theta\,,$$

với trục z dọc theo trường điện. Như thế

$$\langle\Psi_f|T|\Psi_i\rangle = \varepsilon eE\int R_{10}rR_{21}r^2dr\int Y_{00}Y_{10}\cos\theta d\Omega$$

$$= \frac{\varepsilon eE}{\sqrt{2a^3}}\int_0^\infty r^3\exp\left(-\frac{3r}{2a}\right)dr$$

$$= \frac{32}{27\sqrt{6}}\varepsilon eaE\int_\Omega Y_{00}Y_{10}\cos\theta d\Omega\,.$$

Vì

$$\cos\theta Y_{10} = \sqrt{\frac{4}{15}}Y_{20} + \sqrt{\frac{1}{3}}Y_{00}\,,$$

tích phân cuối cùng bằng $\sqrt{\frac{1}{3}}$ và

$$\langle\Psi_f|T|\Psi_i\rangle = \left(\frac{2}{3}\right)^4\sqrt{2}\varepsilon eaE\,.$$

Nếu $\varepsilon \to 0$, yếu tố ma trận của dịch chuyển lưỡng cực $\langle\Psi_f|T|\Psi_i\rangle \to 0$ và không xảy ra khử kích thích. Trạng thái kích thích $\Psi_s(n = 2, j = 1/2, l = 0)$ là nửa bền. Nó không thể phân rã đến trạng thái cơ bản qua dịch chuyển lưỡng cực điện (vì $\Delta l \neq 1$). Và điều đó cũng không xảy ra qua dịch chuyển lưỡng cực từ hoặc dịch chuyển lượng điện. Nó chỉ có thể phân rã đến trạng thái cơ bản nhờ dịch chuyển photon kép $2^2S_{1/2} \to 1^2S_{1/2}$, tuy nhiên với xác suất rất nhỏ.

1041

(a) Trạng thái cơ bản của nguyên tử hydro được tách ra nhờ tương tác siêu tinh tế. Hãy chỉ ra giản đồ mức và chỉ ra từ các nguyên lý đầu tiên những trạng thái nào ở mức năng lượng cao hơn.

(b) Trạng thái cơ bản của phân tử photon được tách thành các trạng thái spin hạt nhân toàn phần bội ba và đơn bội. Hãy chỉ ra từ các nguyên lý đầu tiên những trạng thái nào ở mức năng lượng cao hơn.

(*Chicago*)

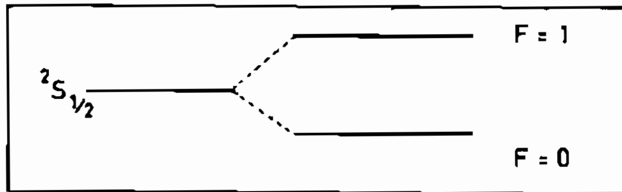
Lời giải:

(a) Tương tác tinh tế trong hydro xảy ra do tương tác từ giữa các mômen từ riêng của photon và điện tử, hàm Haminton là

$$H_{\text{int}} = -\boldsymbol{\mu}_p \cdot \mathbf{B}\,,$$

trong đó **B** là từ trường được tạo ra nhờ momen từ của điện tử và μ_p là momen từ riêng của proton.

Ở trạng thái cơ bản, mật độ điện tích điện tử là đối xứng cầu sao cho **B** có cùng hướng như momen từ riêng của điện tử μ_e. Tuy nhiên, vì điện tử mang điện tích âm, μ_e là phản song song với momen động lượng spin điện tử s_e. Với trạng thái năng lượng thấp nhất của H_{int}, $\langle \mu_p \cdot \mu_e \rangle > 0$, và do đó $\langle s_p \cdot s_e \rangle < 0$. Vì thế trạng thái đơn bội $F = 0$ là trạng thái cơ bản, còn trạng thái bội ba $F = 1$ là trạng thái bị kích thích (xem hình 1.12).



Hình 1.12

(b) Vì phân tử hydro gồm 2 nguyên tử giống nhau, mỗi nguyên tử có 1 proton (spin $\frac{1}{2}$) như hạt nhân, hệ hạt nhân phải có hàm trạng thái phản đối xứng. Sau đó, trạng thái đơn bội spin hạt nhân ($S = 0$, phản đối xứng) phải được gắn với một trạng thái quay hạt nhân đối xứng, do đó $J = 0, 2, 4, \ldots$, với trạng thái cơ bản có $J = 0$. Với trạng thái bội ba spin ($S = 1$, đối xứng), trạng thái quay phải có $J = 1, 3, \ldots$, với trạng thái cơ bản có $J = 1$. Vì năng lượng quay tỉ lệ với $J(J + 1)$, trạng thái bội ba ở mức năng lượng cao hơn.

1042

(a) Trong lý thuyết nguyên tử hydro nguyên thuỷ của Bohr (các quỹ đạo tròn), tiên đề nào dẫn đến việc lựa chọn các mức năng lượng cho phép?

(b) Sau đó, de Broglie đã chỉ ra mối quan hệ thú vị giữa định đề Bohr và bước sóng de Broglie của điện tử. Hãy trình bày mối quan hệ này?

(Wisconsin)

Lời giải:

(a) Bohr đã giả thiết điều kiện lượng tử hoá

$$mvr = n\hbar\,,$$

với m và v tương ứng là khối lượng và vận tốc của điện tử quỹ đạo, r là bán kính quỹ đạo tròn, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Điều kiện này cho những giá trị rời rạc của momen động lượng điện tử $p = mv$, và dẫn đến các mức năng lượng rời rạc.

(b) Sau đó, de Broglie đã tìm ra rằng các quỹ đạo tròn Bohr có thể bằng một số nguyên lần bước sóng de Broglie của điện tử. Vì

$$pr = n\hbar = \frac{nh}{2\pi},$$

$$2\pi r = n\frac{h}{p} = n\lambda,$$

trong đó λ là bước sóng de Broglie được gắn với vận tốc nhóm của sóng vật chất.

1043

Trong thiên văn vô tuyến, các nguyên tử hydro được quan sát, trong đó xuất hiện chẳng hạn các chuyển dịch bức xạ từ $n = 109$ đến $n = 108$.

(a) Tần số và bước sóng của bức xạ được phát ra trong dịch chuyển này là bao nhiêu?

(b) Dịch chuyển như thế cũng được quan sát trong các nguyên tử He đã bị kích thích. Tỉ số các bước sóng của bức xạ H và He là bao nhiêu?

(c) Tại sao lại khó quan sát dịch chuyển này trong phòng thí nghiệm?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Các mức năng lượng của hydro dưới dạng eV là

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2}.$$

Đối với các chuyển dời giữa các trạng thái kích thích $n = 109$ và $n = 108$ ta có

$$h\nu = \frac{13,6}{108^2} - \frac{13,6}{109^2},$$

cho ta

$$\nu = 5,15 \times 10^9 \text{ Hz},$$

hay

$$\lambda = c/\nu = 5,83 \text{ cm}.$$

(b) Đối với các trạng thái kích thích cao như thế điện tích hạt nhân hiệu dụng của nguyên tử heli bao quanh bằng một electron quỹ đạo ước lượng một cách gần đúng bằng điện tích của một proton. Từ đó, với các chuyển dời như thế, bước sóng từ He cũng gần bằng bước sóng từ H.

(c) Ở trạng thái kích thích cao như thế, các nguyên tử dễ dàng bị ion hóa do va chạm với các nguyên tử khác. Tại cùng thời điểm, xác suất chuyển dời giữa các trạng thái kích thích cao như vậy rất nhỏ. Rất khó tạo ra được điều kiện như thế ở phòng thí nghiệm mà ở đó xác suất của va chạm là rất nhỏ và không sẵn có đủ nhiều các nguyên tử bị kích thích cao như thế. (Tuy nhiên, việc có sẵn một số nguồn laze mạnh có thể kích thích một nguyên tử đạt được trạng thái kích thích cao như thế do sự kích thích của nhiều photon).

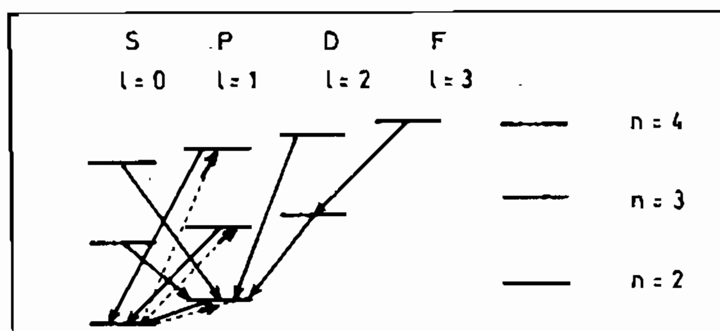
1044

Vẽ các mức năng lượng của nguyên tử Li đối với trạng thái $n = 2, 3, 4$. Chỉ ra trên giản đồ năng lượng một vài vạch có thể nhìn thấy ở sự phát xạ và một vài vạch có thể nhìn thấy ở sự hấp thụ. Hãy chỉ ra trên cùng một giản đồ các mức năng lượng của nguyên tử hydro đối với $n = 2, 3, 4$.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Do hầu hết nguyên tử ở trạng thái cơ bản, phổ hấp thụ xuất hiện từ chuyển dời từ trạng thái $2s$ đến trạng thái np ($n = 2, 3, 4$). Ở hình 1.13, các đường đứt nét biểu diễn quá trình hấp thụ, đường liền nét biểu diễn quá trình phát xạ.



Hình 1.13

1045

Mẫu nguyên tử "bánh putđing" đưa ra bởi J. J. Thomson trong thời kì đầu của lý thuyết nguyên tử bao gồm một quả cầu có bán kính a, tích điện dương với giá trị bằng Ze. Z là một số nguyên và e là điện tích nguyên tố. Electron, có điện tích $-e$, được xem là điện tích điểm nằm bên trong điện tích dương.

(a) Tìm lực tác dụng lên một electron như là hàm của khoảng cách r của nó tính từ tâm của quả cầu cho nguyên tố hydro.

(b) Electron sẽ thực hiện loại chuyển động gì?

(c) Tìm biểu thức cho tần số của chuyển động này.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Đối với nguyên tử hydro có $Z = 1$, bán kính a, mật độ điện tích dương là

$$\rho = \frac{e}{\frac{4}{3}\pi a^3} = \frac{3e}{4\pi a^3}\,.$$

Khi một electron đặt tại khoảng cách r đối với tâm của quả cầu, chỉ có điện tích dương ở bên trong quả cầu bán kính r có thể ảnh hưởng lên electron và lực tĩnh điện tác dụng lên electron là

$$F(r) = -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3\rho = -\frac{e^2 r}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\,,$$

hướng về tâm quả cầu.

(b) Dạng của lực $F(r)$ chỉ ra rằng chuyển động của electron là dao động điều hòa đơn giản.

(c) $F(r)$ có thể viết dưới dạng

$$F(r) = -kr\,,$$

ở đây, $k = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$. Tần số góc của dao động điều hòa như vậy sẽ là

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^3 m}}\,,$$

ở đây m là khối lượng electron.

1046

Vạch Lyman anpha, sự chuyển dời từ $n = 1$ đến $n = 2$ trong nguyên tử hydro là 1215 Å.

(a) Xác định miền bước sóng có khả năng ion hóa một nguyên tử H từ mức cơ bản ($n = 1$).

(b) Xác định miền bước sóng có khả năng ion hóa một nguyên tử H từ mức kích thích thứ nhất ($n = 2$).

(c) Xác định miền bước sóng có khả năng ion hóa một ion He^+ từ mức cơ bản ($n = 1$).

(d) Xác định miền bước sóng có khả năng ion hóa một ion He^+ từ mức kích thích thứ nhất ($n = 2$).

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Một dãy phổ của một nguyên tử tương tự hydro có tần số là

$$\tilde{\nu} = Z^2 R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right),$$

ở đây Z là điện tích hạt nhân, R là hằng số Rydberg, và n, m là các số nguyên dương với $m > n$. Năng lượng ion hóa của trạng thái cơ bản của nguyên tử H là giới hạn của dãy Lyman ($n = 1$) số sóng là

$$\tilde{\nu}_0 = \frac{1}{\lambda_0} = R.$$

Đối với vạch alpha của dãy Lyman,

$$\tilde{\nu}_\alpha = \frac{1}{\lambda_\alpha} = R\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{3}{4}R = \frac{3}{4\lambda_0}.$$

Do $\lambda_\alpha = 1215$ Å, $\lambda_0 = 3\lambda_\alpha/4 = 911$ Å. Từ đó, bước sóng ánh sáng có thể ion hóa nguyên tử H ở trạng thái cơ bản cần phải ngắn hơn 911 Å.

(b) Bước sóng phải nhỏ hơn giới hạn của dãy Balmer ($n = 2$), giới hạn này có số sóng là

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{R}{2^2} = \frac{1}{4\lambda_0}.$$

Từ đó, bước sóng cần phải nhỏ hơn $4\lambda_0 = 3645$ Å.

(c) Tần số giới hạn của dãy Lyman của ion He^+ ($Z = 2$) là

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{Z^2 R}{1^2} = 4R = \frac{4}{\lambda_0}.$$

Bước sóng có thể ion hóa He^+ từ trạng thái cơ bản cần phải nhỏ hơn $\lambda_0/4 = 228$ Å.

(d) Bước sóng cần phải nhỏ hơn $1/R = \lambda_0 = 1215$ Å.

1047

Một nguyên tử tritium từ trạng thái cơ bản phân rã beta xuống He^+.

(a) Ngay sau khi phân rã, xác suất của ion hêli đó ở trạng thái cơ bản là bao nhiêu?

(b) Ở trạng thái 2s là bao nhiêu?

(c) Ở trạng thái 2p là bao nhiêu?

(Bỏ qua spin ở bài toán này)

(*UC, Berkeley*)

Lời giải:

Tại thời điểm của phân rã β, sự liên tục của hàm sóng đòi hỏi

$$|1s\rangle_H = a_1|1s\rangle_{He^+} + a_2|2s\rangle_{He^+} + a_3|2p\rangle_{He^+} + \cdots,$$

ở đây

$$|1s\rangle = R_{10}(r)Y_{00}, \qquad |2s\rangle = R_{20}(r)Y_{00}, \qquad |2p\rangle = R_{21}(r)Y_{10},$$

với

$$R_{10} = \left(\frac{Z}{a}\right)^{\frac{3}{2}} 2\exp\left(-\frac{Zr}{a}\right), \qquad R_{20} = \left(\frac{Z}{2a}\right)^{\frac{3}{2}} \left(2 - \frac{Zr}{a}\right)\exp\left(-\frac{Zr}{2a}\right),$$

$$R_{21} = \left(\frac{Z}{2a}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{Zr}{a\sqrt{3}}\exp\left(-\frac{Zr}{2a}\right), \qquad a = \frac{\hbar^2}{me^2}.$$

(a)

$$a_1 = {}_{He^+}\langle 1s|1s\rangle_H = \int_0^\infty \frac{2}{a^{3/2}} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \cdot 2\left(\frac{2}{a}\right)^{3/2}$$

$$\times \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) \cdot r^2 dr \int Y_{00}^2 d\Omega = \frac{16\sqrt{2}}{27}.$$

Vì vậy, xác suất tìm thấy ion He^+ ở trạng thái cơ bản là

$$W\langle 1s\rangle = |a_1|^2 = \frac{512}{729}.$$

(b)

$$a_2 = {}_{He^+}\langle 2s|1s\rangle_H = \int_0^\infty \frac{2}{a^{3/2}} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{a}\right)^{3/2}\left(1-\frac{r}{a}\right)$$

$$\times \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \cdot r^2 dr \int Y_{00}^2 d\Omega = -\frac{1}{2}.$$

Từ đó, xác suất tìm thấy ion He^+ ở trạng thái $2s$ là

$$W\langle 2s\rangle = |a_2|^2 = \frac{1}{4}.$$

(c)

$$a_3 = {}_{He^+}\langle 2p|1s\rangle_H = \int_0^\infty \frac{2}{a^{3/2}} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{6}}\left(\frac{2}{a}\right)^{3/2} \cdot \frac{2r}{a}$$

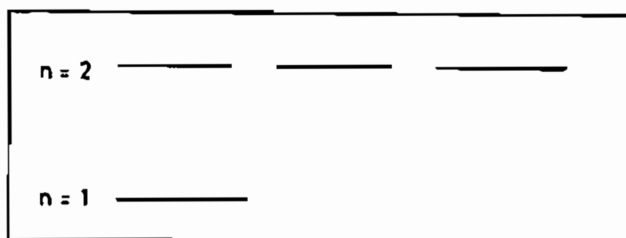
$$\times \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \cdot r^2 dr \int Y_{10}^* Y_{00} d\Omega = 0.$$

Từ đó, xác suất tìm thấy ion He^+ ở trạng thái $2p$ là

$$W\langle 2p\rangle = |a_3|^2 = 0.$$

1048

Thử nghĩ về trạng thái cơ bản và các trạng thái với $n = 2$ của nguyên tử hyđrô.



Hình 1.14

Hãy chỉ ra trên sơ đồ (hình 1. 14) kí hiệu quang phổ đầy đủ của tất cả bốn trạng thái. Có bốn hiệu chính đối với cấu trúc mức được biểu thị để giải thích các loại tách vạch được quan sát. Những hiệu chính đó là:

(a) dịch chuyển Lamb,

(b) cấu trúc tinh tế,

(c) cấu trúc siêu tinh tế,

(d) các hiệu ứng tương đối tính.

(1) Hiệu chính nào ở trên áp dụng được cho trạng thái $n = 1$?

(2) Hiệu chính nào ở trên áp dụng được cho trạng thái $n = 2, l = 0$? Trạng thái $n = 2, l = 1$?

(3) Liệt kê theo thứ tự mức độ quan trọng của bốn hiệu chỉnh trên (tức là đầu tiên là hiệu chỉnh lớn nhất còn hiệu chính nhỏ nhất cuối cùng). Hãy chỉ ra nếu có những hiệu chính có cùng bậc độ lớn.

(4) Thảo luận một cách ngắn gọn nguồn gốc vật lý của cấu trúc tinh tế. Sự thảo luận của bạn nên bao gồm sự kể đến thế tiếp xúc Fermi.

(*Wisconsin*)

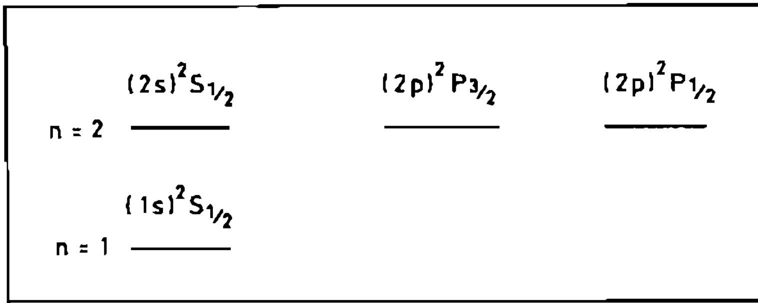
Lời giải:

Kí hiệu quang phổ đối với các mức cơ bản và mức kích thích thứ nhất của nguyên tử hydro được chỉ ra trên hình 1.15.

Ba hiệu chính gây ra cấu trúc tinh tế cho nguyên tử hydro

$$E_f = E_m + E_D + E_{so} ,$$

Ở đây E_m được gây ra ra do hiệu ứng tương đối tính khối lượng thay đổi theo vận tốc, E_D, số hạng Darwin, xuất hiện từ hiệu ứng không định xứ tương đối tính của electron, E_{so} do liên kết spin-quỹ đạo của electron. Chúng được đưa



Hình 1.15

ra bởi hệ thức

$$E_m = -\frac{\alpha^2 Z^4}{4n^4}\left(\frac{4n}{l+\frac{1}{2}} - 3\right) \times 13,6 \text{ eV},$$

$$E_D = \frac{\alpha^2 Z^4}{n^3}\delta_{l0} \times 13,6 \text{ eV},$$

$$E_{so} = \begin{cases} (1-\delta_{l0})\dfrac{\alpha^2 Z^4 l}{n^3 l(l+1)(2l+1)} \times 13,6 \text{ eV}, & \left(j = l + \dfrac{1}{2}\right) \\ -(1-\delta_{l0})\dfrac{\alpha^2 Z^4 (l+1)}{n^3 l(l+1)(2l+1)} \times 13,6 \text{ eV}. & \left(j = l - \dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

ở đây α là hằng số cấu trúc tinh tế, còn δ_{l0} là dấu đenta Kronecker thông thường.

Dịch chuyển Lamb xuất phát từ sự tương tác giữa electron và trường phát xạ của nó, gây ra một hiệu chính mà khi được khai triển đối với $Z\alpha$, có số hạng đầu tiên

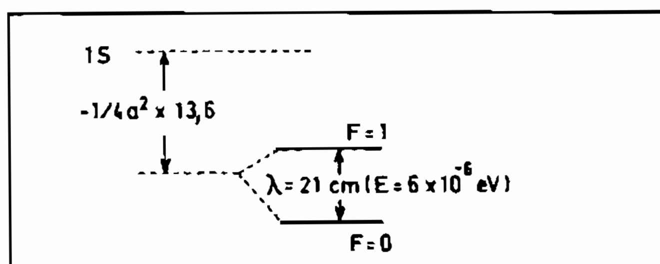
$$E_L = k(l)\frac{\alpha(Z\alpha)^4 mc^2}{2\pi n^3}$$

$$= k(l)\frac{\alpha^3 Z^4}{\pi n^3} \times 13,6 \text{ eV},$$

ở đây, $k(l)$ là một thông số liên quan với l.

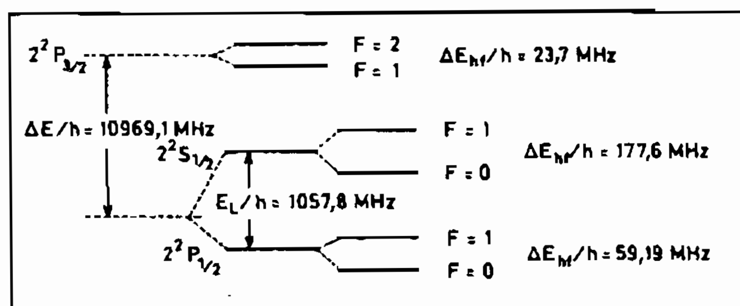
Cấu trúc siêu tính tế sinh ra do liên kết giữa momen quỹ đạo toàn phần và spin của hạt nhân.

(1) Đối với trạng thái $n = 1$, $(l = 0)$, E_m, E_D, E_L chỉ có thể gây ra dịch chuyển mức năng lượng xét chung. Khi $E_{so} = 0$ bổ chính cấu trúc tinh tế không làm tách các mức năng lượng. Mặt khác, hiệu chính cấu trúc siêu tinh tế có thể gây ra sự tách vạch như được chỉ ra trên Hình 1.16.



Hình 1.16

(2) Đối với trạng thái $n = 2$, $(l = 0$ và $l = 1)$, hiệu chính cấu trúc tinh tế gây ra sự tách vạch nhiều nhất ở mức $l = 1$, ở mức đó hiệu chính cấu trúc siêu tinh tế cũng gây ra một phần (xem hình 1.17).



Hình 1.17

(3) E_m, E_D, E_{so} cùng bậc độ lớn > dịch chuyển Lamb $\gtrsim$ cấu trúc siêu tinh tế.

(4) Cấu trúc siêu tinh tế có thể tách ra thành ba thành phần:

(a) Tương tác giữa momen từ hạt nhân và từ trường ở proton do chuyển động quỹ đạo của electron,

(b) Tương tác lưỡng cực - lưỡng cực giữa electron và momen từ của hạt

nhân,

(c) Thế tiếp xúc Fermi do sự tương tác giữa momen từ spin của electron và từ trường bên trong của proton.

1049

Sử dụng mẫu nguyên tử của Bohr,

(a) suy ra biểu thức đối với mức năng lượng của ion He^+.

(b) tính toán năng lượng của trạng thái $l = 1$ trong một từ trường, bỏ qua spin của electron.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Đặt bán kính quỹ đạo của electron là r và vận tốc của nó là v. Bohr cho rằng momen quỹ đạo L_ϕ được lượng tử hóa

$$L_\phi = mvr = n\hbar. \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots)$$

Lực hướng tâm gây ra bởi tương tác Coulomb, do đó

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Như thế năng lượng của He^+ là

$$E_n = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{1}{2}mv^2 = -\frac{2me^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 n^2\hbar^2}.$$

(b) Diện tích quỹ đạo của electron là

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{r}{2} \cdot r d\phi = \frac{1}{2}\int_0^{T} r^2\omega dt = \frac{L_\phi}{2m}T,$$

ở đây $\omega = \frac{d\phi}{dt}$, là vận tốc góc được cho bởi $L_\phi = mr^2\omega$, và T là chu kì của chuyển động tròn. Đối với $l = 1$, $L_\phi = \hbar$ và momen từ của electron do chuyển động trên quỹ đạo của nó là

$$\mu = IA = -\frac{e}{T}A = -\frac{e\hbar}{2m},$$

ở đây I là dòng điện do chuyển động quỹ đạo của electron. Năng lượng sinh ra từ tương tác giữa trạng thái $l = 1$ và từ trường $\mathbf{B}$ là

$$\Delta E = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = \begin{cases} \frac{e\hbar}{2m}B, & (\boldsymbol{\mu}//\mathbf{B}) \\ 0, & (\boldsymbol{\mu} \perp \mathbf{B}) \\ -\frac{e\hbar}{2m}B. & (\boldsymbol{\mu}// -\mathbf{B}) \end{cases}$$

1050

Một nguyên tử có một hạt nhân với điện tích Z và một electron. Hạt nhân có bán kính R, bên trong đó điện tích (proton) được phân bố đều. Ta muốn nghiên cứu ảnh hưởng của của kích thước hữu hạn của hạt nhân lên các mức của electron:

(a) Tính toán thế có tính đến kích thước hữu hạn của hạt nhân.

(b) Tính toán dịch chuyển mức do kích thước hữu hạn của hạt nhân đối với trạng thái $1s$ của ^{208}Pb sử dụng lý thuyết nhiễu loạn, cho rằng R nhỏ hơn nhiều so với bán kính Bohr và ước lượng hàm sóng tương ứng.

(c) Cho trả lời bằng số đối với (b) ở đơn vị cm^{-1} cho rằng $R = r_0 A^{1/3}$ $r_0 = 1,2$ fecmi.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Đối với $r \geq R$.

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Đối với $r < R$,

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^3 - \int_r^R \frac{e\rho 4\pi r'^2}{r'} dr' = -\frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3}(3R^2 - r^2),$$

ở đây

$$\rho = \frac{Ze}{\frac{4}{3}\pi r^3}.$$

(b) Xem sự tách ra của Hamintonian từ hạt nhân điểm như là một sự nhiễu loạn ta có

$$H' = \begin{cases} \dfrac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} - \dfrac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{r^2}{2R^2}\right) & \text{với } r < R\,, \\ 0 & \text{với } r \geq R\,. \end{cases}$$

Hàm sóng ứng với trạng thái $1s$ của ^{208}Pb là

$$|1s\rangle = 2\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\,,$$

ở đây $Z = 82$, a_0 là bán kính Bohr. Lấy xấp xỉ $r \ll a_0$, tức là, $\exp(-\frac{2r}{a_0}) \approx 1$, độ dịch chuyển năng lượng là

$$\begin{aligned} \Delta E &= \langle 1s|H'|1s\rangle \\ &= -\frac{4Z^4e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0^3}\int_0^R \left(\frac{3}{2R} - \frac{r^2}{2R^3} - \frac{1}{r}\right) r^2 dr \\ &= \frac{4}{5}Z^2|E_0|\left(\frac{R}{a_0}\right)^2, \end{aligned}$$

ở đây $E_0 = -\frac{Z^2e^2}{(4\pi\varepsilon_0)2a_0}$ là năng lượng trạng thái cơ bản của nguyên tử tương tự hydro.

(c)

$$\Delta E = \frac{4}{5} \times 82^2 \times (82^2 \times 13,6) \times \left(\frac{1,2 \times 10^{-19} \times 208^{\frac{1}{3}}}{5,29 \times 10^{-9}}\right)^2 = 8,89 \text{ eV}\,,$$

$$\Delta\tilde{\nu} = \frac{\Delta E}{hc} \approx 7,2 \times 10^4 \text{ cm}^{-1}\,.$$

1051

Nếu proton được ước lượng như là một quả cầu bán kính R phân bố điện tích đều, hãy chứng minh rằng dịch chuyển của mức năng lượng trạng thái s trong nguyên tử hydro, từ giá trị nó có thể có nếu xem proton như một điểm, ước lượng một cách gần đúng là

$$\Delta E_{ns} \approx \frac{2\pi}{5}e^2|\Psi_{ns}(0)|^2R^2\,,$$

sử dụng giả định là bán kính proton nhỏ hơn rất nhiều so với bán kính Bohr. Vì sao độ chuyển dời nhỏ hơn nhiều so với các trạng thái khác với s?

Hàm sóng của trạng thái tương tự hydro $2s$ là

$$(2a_0)^{-3/2}\pi^{-1/2}\left(1-\frac{r}{2a_0}\right)\exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right).$$

Ước lượng sự tách vạch (đơn vị eV) giữa trạng thái $2s$ và $2p$ gây ra do ảnh hưởng này là bao nhiêu? [$a_0 \approx 5\times 10^{-9}$ cm đối với H, $R \approx 10^{-13}$ cm].

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Nhiễu loạn do kích thước hữu hạn của proton là **(xem bài tập 1050)**

$$H' = \begin{cases} 0, & (r \geq R) \\ \dfrac{e^2}{r} - \dfrac{e^2}{R}\left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{r^2}{2R^2}\right). & (r < R) \end{cases}$$

Hàm sóng không nhiễu loạn là

$$\Psi_{ns} = N_{n0}\exp\left(-\frac{r}{na_0}\right)F\left(-n+1, 2, \frac{2r}{na_0}\right)Y_{00},$$

ở đây

$$N_{n0} = \frac{2}{(na_0)^{3/2}}\sqrt{\frac{n!}{(n-1)!}} \approx \frac{2}{(na_0)^{3/2}},$$

$$F\left(-n+1, 2, \frac{2r}{na_0}\right) = 1 - \frac{n-1}{2}\cdot\frac{2r}{na_0} + \frac{(n-1)(n-2)}{2\cdot 3} \times \frac{1}{2!}\left(\frac{2r}{na_0}\right)^2 + \cdots.$$

Lấy giá trị ước lượng $r \ll a_0$, ta có

$$F\left(-n+1, 2, \frac{2r}{na_0}\right) \approx 1, \qquad \exp\left(-\frac{r}{na_0}\right) \approx 1,$$

và như vậy

$$\Psi_{ns} = N_{n0}Y_{00} = \frac{2}{(na_0)^{3/2}}Y_{00}\,,$$

$$\Delta E_{ns} = \langle\Psi^*_{ns}|H'|\Psi_{ns}\rangle = \int_0^R \left[\frac{e^2}{r} - \frac{e^2}{R}\left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2}\right)\right]\Psi^*_{ns}\Psi_{ns}r^2 dr d\Omega$$

$$= \frac{2\pi}{5}\frac{e^2R^2}{\pi(na_0)^3}\,.$$

Sử dụng

$$\Psi_{ns}(0) = \frac{2}{(na_0)^{3/2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{4\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}(na_0)^{3/2}}\,,$$

ta có

$$\Delta E_{ns} = \frac{2\pi}{5}e^2|\Psi_{ns}(0)|^2R^2\,.$$

Do hàm sóng trạng thái khác s có tỉ phần không đáng kể bên trong hạt nhân và do đó nó sẽ gây ra nhiễu loạn nhỏ hơn, nên sự dịch chuyển năng lượng sẽ nhỏ hơn.

Đối với nguyên tử hydro, do $\Delta E_{2p} \ll \Delta E_{2s}$,

$$\Delta E_{ps} = \Delta E_{2s} - \Delta E_{2p} \approx \Delta E_{2s}$$
$$= \frac{2\pi}{5}e^2|\Psi_{2s}(0)|^2R\,,$$

ở đây

$$\Psi_{2s}(0) = (2a_0)^{-3/2}\pi^{-1/2}\,.$$

Từ đó

$$\Delta E_{ps} \approx \frac{2\pi}{5}e^2[(2a_0)^{-3/2}\pi^{-1/2}]^2R^2$$
$$= \frac{e^2R^2}{20a_0^3} = \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2\cdot\frac{R^2mc^2}{20a_0^2}$$
$$= \left(\frac{1}{137}\right)^2\times\frac{10^{-26}\times 0,511\times 10^6}{20\times(5\times 10^{-9})^2} \approx 5,4\times 10^{-10}\text{ eV}\,.$$

1052

Trạng thái cơ bản của nguyên tử hydro là $1s$. Khi xác định chi tiết hơn ta thấy mức năng lượng tách ra thành hai mức nhỏ.

(a) Giải thích vì sao sự tách vạch đó xảy ra.

(b) Ước lượng bằng số sự chênh lệch giữa hai mức đó.

(*Columbia*)

Lời giải:

(a) Trong phổ cấu trúc tinh tế của nguyên tử hydro, trạng thái $1s$ không tách ra. Sự tách vạch này gây ra do sự tương tác giữa momen từ của spin hạt nhân và spin của electron: $\hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{J}}$. Do $I = 1/2$, $J = 1/2$, tổng momen động lượng là $F = 1$ hay $F = 0$, tương ứng với sự tách ra 2 mức năng lượng.

(b) Momen từ của hạt nhân (proton) là $\boldsymbol{\mu} = \mu_N \boldsymbol{\sigma}_N$, ở đây $\boldsymbol{\sigma}_N$ là ma trận Pauli tác dụng lên hàm sóng của hạt nhân bao hàm cả từ trường $\mathbf{H}_m = \nabla \times \nabla \times \left(\frac{\mu_N \boldsymbol{\sigma}_N}{r}\right)$. Toán tử Hamiton của tương tác giữa $\mathbf{H}_m$ và momen từ của electron $\boldsymbol{\mu} = -\mu_e \boldsymbol{\sigma}_e$ là

$$\hat{H} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \hat{\mathbf{H}}_m = \mu_e \mu_N \boldsymbol{\sigma}_e \cdot \nabla \times \nabla \times \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}_N}{r}\right) .$$

Phép tính cho ta sự tách vạch cấu trúc siêu tinh tế là **(Bài tập 1053)**

$$\Delta E = A' \mathbf{I} \cdot \mathbf{J} ,$$

ở đây

$$A' \sim \frac{\mu_e \mu_N}{e^2 a_0^3} \approx \left(\frac{m_e}{m_N}\right) \frac{m_e c^2}{4} \cdot \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^4$$

$$\approx \frac{1}{2000} \cdot \frac{0,51 \times 10^6}{4} \times \left(\frac{1}{137}\right)^4$$

$$\approx 2 \times 10^{-7} \text{ eV} ,$$

m_e, m_N, c, a_0 tương ứng là khối lượng electron, khối lượng nucleon, vận tốc ánh sáng, bán kính Bohr.

1053

Hãy dẫn ra biểu thức mô tả sự tách vạch năng lượng của nguyên tử do

tương tác siêu tinh tế. Biểu thị kết quả của bạn bằng các số hạng liên quan đến các số lượng tử quỹ đạo thích hợp.

(*SUNY, Buffalo*)

Lời giải:

Cấu trúc siêu tinh tế được gây ra do tương tác giữa từ trường tạo ra bởi chuyển động trên quỹ đạo và spin của electron và momen từ hạt nhân $\mathbf{m}_N$. Đặt vị trí hạt nhân như là gốc tọa độ, từ trường gây ra bởi chuyển động trên quỹ đạo của electron đối với gốc tọa độ là

$$\mathbf{B}_e(0) = \frac{\mu_0 e}{4\pi}\frac{\mathbf{v}\times\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{2\mu_0\mu_B}{4\pi\hbar}\frac{\mathbf{l}}{r^3},$$

ở đây $\mathbf{v}$ là vận tốc của electron trên quỹ đạo, $\mathbf{l} = m\mathbf{r}\times\mathbf{v}$ là momen động lượng, $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$, là magnheton Bohr, ở đây m là khối lượng electron.

Toán tử Haminton của tương tác giữa momen từ hạt nhân $\mathbf{m}_N$ và $\mathbf{B}_e(0)$ là

$$H_{lI} = -\mathbf{m}_N\cdot\mathbf{B}_e(0) = \frac{2\mu_0 g_N\mu_N\mu_B}{4\pi\hbar^2 r^3}\mathbf{l}\cdot\mathbf{I},$$

ở đây $\mathbf{I}$ là spin của hạt nhân, μ_N là manheton hạt nhân, g_N là hệ số Landé g của nucleon.

Tại $\mathbf{r}+\mathbf{r}'$, thế vectơ gây bởi momen từ electron $\mathbf{m}_s = -\frac{2\mu_B\mathbf{s}}{\hbar}$ là $\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\mathbf{m}_s\times\frac{\mathbf{r}'}{r'^3}$, $\mathbf{r}'$ là vectơ bán kính từ $\mathbf{r}$ đến điểm quan sát. Do đó, từ trường sẽ là

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_s &= \nabla\times\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\left(\mathbf{m}_s\times\frac{\mathbf{r}'}{r'^3}\right)\\ &= \frac{2\mu_0\mu_B}{4\pi\hbar}\nabla'\times\left(\mathbf{s}\times\nabla'\frac{1}{r'}\right) = \frac{2\mu_0\mu_B}{4\pi\hbar}\left[\mathbf{s}\nabla'^2\frac{1}{r'} - (\mathbf{s}\cdot\nabla')\nabla'\frac{1}{r'}\right]\\ &= -\frac{2\mu_0\mu_B}{4\pi\hbar}\left[4\pi\mathbf{s}\delta(\mathbf{r}') + (\mathbf{s}\cdot\nabla')\nabla'\frac{1}{r'}\right].\end{aligned}$$

Đặt $\mathbf{r}' = -\mathbf{r}$, ta có từ trường gây ra bởi $\mathbf{m}_s$ tại gốc tọa độ là

$$\mathbf{B}_s(0) = -\frac{2\mu_0\mu_B}{4\pi\hbar}\left[4\pi\mathbf{s}\delta(\mathbf{r}) + (\mathbf{s}\cdot\nabla)\nabla\frac{1}{r}\right].$$

Do đó, toán tử Haminton của tương tác giữa $\mathbf{m}_N = \frac{g_N\mu_N\mathbf{I}}{\hbar}$ và $\mathbf{B}_s(0)$ là

$$\begin{aligned}H_{sI} &= -\mathbf{m}_N\cdot\mathbf{B}_s(0)\\ &= \frac{2\mu_0 g_N\mu_N\mu_B}{4\pi\hbar^2}\left[4\pi\mathbf{I}\cdot\mathbf{s}\delta(\mathbf{r}) + (\mathbf{s}\cdot\nabla)\left(\mathbf{I}\cdot\nabla\frac{1}{r}\right)\right].\end{aligned}$$

Toán tử Haminton toàn phần lúc đó sẽ là

$$
\begin{aligned}
H_{hf} &= H_{lI} + H_{sI} \\
&= \frac{2\mu_0 g_N \mu_N \mu_B}{4\pi\hbar^2}\left[\frac{\mathbf{l}\cdot\mathbf{I}}{r^3} + 4\pi\mathbf{s}\cdot\mathbf{I}\delta(\mathbf{r}) + (\mathbf{s}\cdot\nabla)\left(\mathbf{I}\cdot\nabla\frac{1}{r}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Ở ước lượng gần đúng bậc 0 hàm sóng là $|lsjIFM_F\rangle$, ở đây l, s và j tương ứng là các số lượng tử của momen động lượng quỹ đạo, spin và momen động lượng toàn phần của electron, I là số lượng tử của spin hạt nhân, F là số lượng tử của momen động lượng toàn phần của nguyên tử và M_F là số lượng tử thành phần z của nó. Do đó, trong nhiễu loạn bậc nhất, hiệu chính năng lượng do H_{hf} là

$$\Delta E = \langle lsjIFM_F|H_{hf}|lsjIFM_F\rangle .$$

Nếu $l \neq 0$, hàm sóng là zero tại gốc tọa độ và ta chỉ cần xem xét H_{hf} đối với $\mathbf{r} \neq 0$. Như thế

$$
\begin{aligned}
H_{hf} &= \frac{2\mu_0 g_N \mu_N \mu_B}{4\pi\hbar^2}\left[\frac{\mathbf{I}\cdot\mathbf{l}}{r^3} + (\mathbf{s}\cdot\nabla)\left(\mathbf{I}\cdot\nabla\frac{1}{r}\right)\right] \\
&= \frac{2\mu_0 g_N \mu_N \mu_B}{4\pi\hbar^2 r^3}\mathbf{G}\cdot\mathbf{I},
\end{aligned}
$$

ở đây

$$\mathbf{G} = \mathbf{l} + 3\frac{(\mathbf{s}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^2}.$$

Do đó

$$
\begin{aligned}
\Delta E &= \frac{2\mu_0 g_N \mu_N \mu_B}{4\pi\hbar^2}\left\langle\frac{1}{r^3}\mathbf{G}\cdot\mathbf{I}\right\rangle \\
&= \frac{\mu_0 g_N \mu_N \mu_B}{4\pi}\cdot\frac{l(l+1)}{j(j+1)}\cdot[F(F+1) - I(I+1) - j(j+1)]\left\langle\frac{1}{r^3}\right\rangle \\
&= \frac{\mu_0 g_N \mu_N \mu_B}{4\pi}\cdot\frac{Z^3}{a_0^3 n^3\left(l+\frac{1}{2}\right)j(j+1)}\cdot[F(F+1) \\
&\quad - I(I+1) - j(j+1)],
\end{aligned}
$$

ở đây a_0 là bán kính Bohr và Z là nguyên tử số của nguyên tử.

Đối với $l = 0$, hàm sóng là đối xứng cầu và

$$\Delta E = \frac{2\mu_0 g_N \mu_N \mu_B}{4\pi\hbar^2}\left[4\pi\langle\mathbf{s}\cdot\mathbf{I}\delta(\mathbf{r})\rangle + \left\langle(\mathbf{s}\cdot\nabla)\left(\mathbf{I}\cdot\nabla\frac{1}{r}\right)\right\rangle\right].$$

Bởi vì

$$\left\langle (\mathbf{s}\cdot\nabla)\left(\mathbf{I}\cdot\nabla\frac{1}{r}\right)\right\rangle = \left\langle \sum_{i,j=1}^{3} s_i I_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\frac{1}{r}\right)\right\rangle$$

$$= \left\langle \sum_{i,j=1}^{3} s_i I_j \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\frac{1}{r}\right)\right\rangle + \left\langle \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{3} s_i I_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\frac{1}{r}\right)\right\rangle$$

$$= \frac{1}{3}\left\langle \mathbf{s}\cdot\mathbf{I}\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)\right\rangle = -\frac{4\pi}{3}\langle \mathbf{s}\cdot\mathbf{I}\delta(\mathbf{r})\rangle ,$$

ta có

$$\Delta E = \frac{2\mu_0 g_N \mu_N \mu_B}{4\pi\hbar^2}\cdot\frac{8\pi}{3}\langle \mathbf{s}\cdot\mathbf{I}\delta(\mathbf{r})\rangle$$

$$= \frac{\mu_0 g_N \mu_N \mu_B}{4\pi}[F(F+1)-I(I+1)-s(s+1)]\cdot\frac{8\pi}{3}\langle\delta(\mathbf{r})\rangle$$

$$= \frac{2\mu_0 g_N \mu_N \mu_B}{3\pi}\cdot\frac{Z^3}{a_0^3 n^3}\cdot[F(F+1)-I(I+1)-s(s+1)] .$$

1054

Ý nghĩa của cấu trúc tinh tế và cấu trúc siêu tinh tế trong các vạch phổ như thế nào? Thảo luận nguồn gốc vật lý của chúng. Cho một ví dụ của từng cấu trúc kể cả độ lớn của hiệu ứng. Tóm tắt cơ sở lý thuyết của một trong các hiệu ứng đó.

(Princeton)

Lời giải:

(a) *Cấu trúc tinh tế:* Số hạng phổ được xác định bởi số lượng tử chính n và số lượng tử quỹ đạo l bị tách ra do liên kết giữa spin electron s và momen động lượng quỹ đạo l. Kết quả là, các vạch phổ xuất hiện do sự chuyển dời giữa các mức năng lượng bị tách ra thành một vài vạch khác. Ví dụ, các vạch phổ xuất hiện do sự chuyển dời $3p \to 3s$ của nguyên tử Na có các vạch kép, thành hai vạch vàng D_1 (5896 Å), D_2 (5890 Å) rất gần nhau.

Như một ví dụ về ước lượng định lượng, ta hãy xem xét cấu trúc tinh tế trong nguyên tử hydro.

Từ trường gây ra chuyển động quỹ đạo của electron là $B = \frac{\mu_0 e v}{4\pi r^2}$. Phương trình động lực học $\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ và điều kiện lượng tử hóa $mvr = n\hbar$ cho ta

$v = \alpha c/n$, ở đây $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$ là hằng số cấu trúc tinh tế, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Đối với trạng thái cơ bản $n = 1$. Khi đó năng lượng tương tác giữa momen từ spin μ_s của electron và từ trường B là

$$\Delta E \approx -\mu_s B \approx \frac{\mu_0 \mu_B \alpha ec}{4\pi r^2},$$

ở đây $\mu_s = -\frac{e\hbar}{2m} = -\mu_B$, là manheton Bohr. Lấy $r \approx 10^{-10}$ m, ta tìm được

$$\Delta E \approx 10^{-7} \times 10^{-23} \times 10^{-2} \times 10^{-19} \times 10^8/10^{-20} \approx 10^{-23}\ \text{J} \approx 10^{-4}\ \text{eV}.$$

Xét một electron chuyển động trong một thế xuyên tâm $V(\mathbf{r}) = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$, Hamiton tương tác giữa momen động lượng quỹ đạo đối với tâm, l, và spin s có thể nhận được bằng cơ học lượng tử theo cùng trình tự là

$$H' = \frac{1}{2m^2c^2}\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}(\mathbf{s}\cdot\mathbf{l}).$$

Xem H' như là một nhiễu loạn ta có thể có hiệu chính năng lượng bậc nhất là

$$\Delta E_{nlj} = \langle H' \rangle = \frac{Rhc\alpha^2 Z^4\left[j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}\right]}{2n^3 l\left(l + \frac{1}{2}\right)(l+1)},$$

ở đây R là hằng số Rydberg, j là momen động lượng toàn phần của electron.

Do các trạng thái với j khác nhau cho ΔE_{nlj} khác nhau, một mức năng lượng (n, l) được tách ra thành hai mức có $j = l + 1/2$ và $j = l - 1/2$.

(b) *Cấu trúc siêu tinh tế:* Nếu kể đến tương tác giữa spin hạt nhân I và momen động lượng toàn phần j của electron quỹ đạo thì một mức năng lượng được xác định bởi j sẽ được tách vạch thêm, tạo ra cấu trúc siêu tinh tế. Sử dụng thiết bị có độ phân giải cao, ta có thể thấy rằng vạch phổ D_1 của nguyên tử Na trong thực tế bao gồm hai vạch phân cách nhau một khoảng là 0,023 Å, và vạch phổ D_2 cũng bao gồm hai vạch tách ra bởi một khoảng 0,021 Å.

Đối với trạng thái cơ bản của electron, từ trường gây bởi electron tại vị trí hạt nhân là $B = \frac{\mu_0 ev}{4\pi a^2}$, ở đây a là bán kính Bohr. Độ tách vạch của cấu trúc siêu tinh tế là

$$\begin{aligned}\Delta E &\approx \mu_N B \approx \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mu_N e\alpha c}{a^2} \\ &\approx 10^{-7} \times \frac{5 \times 10^{-27} \times 1,6 \times 10^{-19} \times 3 \times 10^8}{137 \times (0,53 \times 10^{-10})^2}\ \text{J} \\ &\approx 10^{-7}\ \text{eV}.\end{aligned}$$

Một lý thuyết về cấu trúc siêu tinh tế được giới thiệu sơ lược ở **Bài tập 1053.**

1055

Hãy tính toán tới một bậc độ lớn các tính chất sau của sự chuyển dời điện từ $2p$-$1s$ trong một nguyên tử tạo thành bởi một muyon và một hạt nhân stronti ($Z = 38$):

(a) tách vạch cấu trúc tinh tế,

(b) bề rộng các vạch tự nhiên. (Chỉ dẫn: thời gian sống của trạng thái $2p$ của hydro là 10^{-9} s).

(Princeton)

Lời giải:

Kể đến hiệu chính cấu trúc tinh tế, các mức năng lượng của nguyên tử tương tự hydro là

$$E = E_0 + \Delta E_r + \Delta E_{ls}$$
$$= \begin{cases} -\dfrac{RhcZ^2}{n^2} - \dfrac{Rhc\alpha^2 Z^4}{n^3}\left(\dfrac{1}{l} - \dfrac{3}{4n}\right), & \left(j = l - \dfrac{1}{2}\right) \\ -\dfrac{RhcZ^2}{n^2} - \dfrac{Rhc\alpha^2 Z^4}{n^3}\left(\dfrac{1}{l+1} - \dfrac{3}{4n}\right). & \left(j = l + \dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

Trạng thái $1s$ không bị tách, nhưng trạng thái $2p$ bị tách thành hai trạng thái con tương ứng với $j = 1/2$ và $j = 3/2$. Độ lệch năng lượng giữa hai vạch của $2p \to 1s$ là

$$\Delta E = \frac{Rhc\alpha^2 Z^4}{n^3}\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l+1}\right),$$

ở đây $Z = 38$, $n = 2$, $l = 1$, $R = m_\mu R_H/m_e \approx 200 R_H = 2,2 \times 10^9$ m^{-1}, $\alpha = \frac{1}{137}$. Từ đó ta có

$$\Delta E = \frac{2,2 \times 10^9 \times 4,14 \times 10^{-15} \times 3 \times 10^8 \times 38^4}{2^3 \times 137^2 \times 2} = 1,9 \times 10^4 \text{ eV}.$$

(b) Thời gian sống của trạng thái $2p$ của nguyên tử meson μ là

$$\tau_\mu = \frac{1}{Z^4} \cdot \frac{m_e}{m_\mu} \tau_H = 2,4 \times 10^{-18} \text{ s}.$$

Nguyên lý bất định cho ta bề rộng tự nhiên của vạch phổ là

$$\Gamma \approx \hbar/\tau_\mu = 2,7 \times 10^2 \text{ eV}.$$

1056

Sự hấp thụ quang thấp nhất của nguyên tử kim loại kiềm trung hòa tương ứng với sự chuyển tiếp $ns \to (n+1)p$ và tạo ra cấu trúc đôi đặc thù. Tỉ số cường độ của hai vạch này là 2 đối với kim loại kiềm nhẹ, nhưng khi Z tăng thì tỉ số đó cũng tăng lên và đạt giá trị 3,85 đối với Cs ($6s \to 7p$).

(a) Viết biểu thức đối với toán tử spin-quỹ đạo $N(r)$.

(b) Trong một nguyên tử dạng hydro, toán tử này có chéo hóa đối với số lượng tử chính n hay không? Còn đối với J?

(c) Sử dụng các số liệu sau hãy ước lượng số hiệu chính bậc thấp nhất đối với tỉ số cường độ đối với vạch đôi Cs:

E_n = năng lượng của trạng thái np theo cm^{-1},

I_n = cường độ chuyển tiếp từ trạng thái $6s$ đến trạng thái np đối với trường hợp không nhiễu loạn,

$$I_6/I_7 = 1,25\,, \qquad I_8/I_7 = 0,5\,,$$

Δn = độ tách spin - quỹ đạo của trạng thái np theo cm^{-1},

$$\Delta_6 = 554 \qquad E_6 = -19950\,,$$

$$\Delta_7 = 181 \qquad E_7 = -9550\,,$$

$$\Delta_8 = 80 \qquad E8 = -5660\,.$$

Trong sự đánh giá các số hạng hiệu chính bạn có thể giả thiết các trạng thái gần như nguyên tử hydro.

GỢI Ý: Đối với r nhỏ, các hàm sóng theo bán kính khác nhau là tỉ lệ: $f_m(r) = k_{mn} f_n(r)$, do đó ở phép ước lượng gần đúng, ta có

$\langle 6p|N(r)|6p\rangle \approx k_{67}\,\langle 7p|N(r)|6p\rangle \approx k_{67}^2\langle 7p|N(r)|7p\rangle.$ *(Princeton)*

Lời giải:

(a) Hamintonian tương tác spin-quỹ đạo là

$$N(r) = \frac{1}{2\mu^2c^2r}\frac{dV}{dr}\hat{\mathbf{s}}\cdot\hat{\mathbf{l}}$$
$$= \frac{1}{4\mu^2c^2r}\frac{dV}{dr}(\hat{\mathbf{j}}^2 - \hat{\mathbf{l}}^2 - \hat{\mathbf{s}}^2)\,,$$

ở đây μ là khối lượng rút gọn, và $V = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$.

(b) Hamintonian là $H = H_0 + N(r)$. Đối với nguyên tử hydro, $[H_0, N(r)] \neq 0$, do đó đối với số lượng tử chính n, $N(r)$ không phải chéo hóa. Một cách tổng quát,

$$\langle nlm|N(r)|klm\rangle \neq 0\,.$$

Đối với momen toàn phần j (với giá trị n cố định) do $[N(r), \hat{\mathbf{j}}^2] = 0$, $N(r)$ được chéo hóa.

(c) Xác suất chuyển dời cảm ứng là

$$W_{k'k} = \frac{4\pi^2e^2}{3\hbar^2}|\mathbf{r}_{k'k}|^2\rho(\omega_{k'k})$$

và cường độ của vạch phổ là $I(\omega_{k'k}) \propto \hbar\omega_{k'k}W_{k'k}$.

Với tương tác giữa spin và momen động lượng, mỗi mức năng lượng np của kim loại kiềm bị tách ra thành hai mức con, tương ứng với $j = 3/2$ và $j = 1/2$. Tuy nhiên, do trạng thái s không bị tách nên sự chuyển tiếp $ns \to (n+1)p$ tạo ra vạch kép. Do sự tách mức năng lượng nhỏ, tần số của các vạch đôi $ns \to (n+1)p$ có thể xem gần như bằng nhau và do đó $I \propto |\mathbf{r}_{k'k}|^2$.

Sự suy biến của trạng thái $j = 3/2$ là 4 với $j_z = 3/2, 1/2, -1/2, -3/2$; sự suy biến của trạng thái $j = 1/2$ là 2, với $j_z = 1/2, -1/2$. Ở phép gần đúng bậc 0, tỉ số cường độ của hai vạch này là

$$\frac{I\left(j=\frac{3}{2}\right)}{I\left(j=\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sum\limits_{j_z}\left|\left\langle (n+1)p\frac{3}{2}\middle|\mathbf{r}\middle|ns\right\rangle\right|^2}{\sum\limits_{j_z}\left|\left\langle (n+1)p\frac{1}{2}\middle|\mathbf{r}\middle|ns\right\rangle\right|^2} \approx 2\,,$$

như giả thiết. Ở biểu thức trên $|(n+1)p, 1/2\rangle$, $|(n+1)p, 3/2\rangle$ tương ứng là các hàm sóng gần đúng bậc 0 của các trạng thái $j = 1/2$ và $j = 3/2$ của mức năng lượng $(n+1)p$.

Để tìm tỉ số cường độ của hai vạch của chuyển tiếp $6s \to 7p$ của nguyên tử Cs, ta xem $N(r)$ như là nhiễu loạn. Trước hết, ta tính các hàm sóng gần đúng

$$\Psi_{3/2} = \left|7p\frac{3}{2}\right\rangle + \sum_{n=6}^{\infty}{}' \frac{\left\langle np\frac{3}{2}\middle|N(r)\middle|7p\frac{3}{2}\right\rangle}{E_7 - E_n}\left|np\frac{3}{2}\right\rangle ,$$

$$\Psi_{1/2} = \left|7p\frac{1}{2}\right\rangle + \sum_{n=6}^{\infty}{}' \frac{\left\langle np\frac{1}{2}\middle|N(r)\middle|7p\frac{1}{2}\right\rangle}{E_7 - E_n}\left|np\frac{1}{2}\right\rangle ,$$

và sau đó các phần tử ma trận

$$|\langle\Psi_{3/2}|\mathbf{r}|6s\rangle|^2 = \left|\left\langle 7p\frac{3}{2}\middle|\mathbf{r}\middle|6s\right\rangle + \sum_{n=6}^{\infty}{}' \frac{\left\langle np\frac{3}{2}\middle|N(\mathbf{r})\middle|7p\frac{3}{2}\right\rangle}{E_7 - E_n}\left\langle np\frac{3}{2}\middle|\mathbf{r}\middle|6s\right\rangle\right|^2$$

$$\approx \left|\left\langle 7p\frac{3}{2}\middle|\mathbf{r}\middle|6s\right\rangle\right|^2 \left|1 + \sum_{n=6}^{\infty}{}' \frac{\left\langle np\frac{3}{2}\middle|N(\mathbf{r})\middle|7p\frac{3}{2}\right\rangle}{E_7 - E_n}\sqrt{\frac{I_n}{I_7}}\right|^2 ,$$

$$|\langle\Psi_{1/2}|\mathbf{r}|6s\rangle|^2 = \left|\left\langle 7p\frac{1}{2}\middle|\mathbf{r}\middle|6s\right\rangle + \sum_{n=6}^{\infty}{}' \frac{\left\langle np\frac{1}{2}\middle|N(\mathbf{r})\middle|7p\frac{1}{2}\right\rangle}{E_7 - E_n}\left\langle np\frac{1}{2}\middle|\mathbf{r}\middle|6s\right\rangle\right|^2$$

$$\approx \left|\left\langle 7p\frac{1}{2}\middle|\mathbf{r}\middle|6s\right\rangle\right|^2 \left|1 + \sum_{n=6}^{\infty}{}' \frac{\left\langle np\frac{1}{2}\middle|N(\mathbf{r})\middle|7p\frac{1}{2}\right\rangle}{E_7 - E_n}\sqrt{\frac{I_n}{I_7}}\right|^2 ,$$

ở đây

$$\frac{\left\langle np\frac{3}{2}\middle|\mathbf{r}\middle|6s\right\rangle}{\left\langle 7p\frac{3}{2}\middle|\mathbf{r}\middle|6s\right\rangle} \approx \frac{\left\langle np\frac{1}{2}\middle|\mathbf{r}\middle|6s\right\rangle}{\left\langle 7p\frac{1}{2}\middle|\mathbf{r}\middle|6s\right\rangle} \approx \sqrt{\frac{I_n}{I_7}} .$$

Do

$$N(r) = \frac{1}{4\mu^2c^2r}\frac{dV}{dr}(\hat{\mathbf{j}}^2 - \hat{\mathbf{l}}^2 - \hat{\mathbf{s}}^2)$$

$$= F(r)(\hat{\mathbf{j}}^2 - \hat{\mathbf{l}}^2 - \hat{\mathbf{s}}^2) ,$$

ở đây

$$F(r) \equiv \frac{1}{4\mu^2c^2r}\frac{dV}{dr},$$

ta có

$$\left\langle np\frac{3}{2}\middle|N(\mathbf{r})\middle|7p\frac{3}{2}\right\rangle = \left\langle np\frac{3}{2}\middle|F(r)(\hat{\mathbf{j}}^2 - \hat{\mathbf{l}}^2 - \hat{\mathbf{s}}^2)\middle|7p\frac{3}{2}\right\rangle$$
$$= \left[\frac{3}{2}\times\left(\frac{3}{2}+1\right) - 1\times(1+1) - \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+1\right)\right]\hbar^2$$
$$\times\langle np|F(r)|7p\rangle = \hbar^2\langle np|F(r)|7p\rangle,$$

$$\left\langle np\frac{1}{2}\middle|N(\mathbf{r})\middle|7p\frac{1}{2}\right\rangle = -2\hbar^2\langle np|F(r)|7p\rangle.$$

Đối với $n = 7$, do

$$\Delta_7 = \left\langle 7p\frac{3}{2}\middle|N(r)\middle|7p\frac{3}{2}\right\rangle - \left\langle 7p\frac{1}{2}\middle|N(r)\middle|7p\frac{1}{2}\right\rangle = 3\hbar^2\langle 7p|F(r)|7p\rangle,$$

ta có

$$\langle 7p|F(r)|7p\rangle = \frac{\Delta_7}{3\hbar^2}.$$

Đối với $n = 6$, ta có

$$\left\langle 6p\frac{3}{2}\middle|N(r)\middle|7p\frac{3}{2}\right\rangle = \hbar^2\langle 6p|F(r)|7p\rangle = \hbar^2 k_{67}\langle 7p|F(r)|7p\rangle = \frac{k_{67}}{3}\Delta_7,$$

$$\left\langle 6p\frac{1}{2}\middle|N(r)\middle|7p\frac{1}{2}\right\rangle = -2\hbar^2\langle 6p|F(r)|7p\rangle$$
$$= -2\hbar^2 k_{67}\langle 7p|F(r)|7p\rangle = -\frac{2k_{67}}{3}\Delta_7.$$

Đối với $n = 8$, ta có

$$\left\langle 8p\frac{3}{2}\middle|N(r)\middle|7p\frac{3}{2}\right\rangle = \frac{k_{87}}{3}\Delta_7,$$

$$\left\langle 8p\frac{1}{2}\middle|N(r)\middle|7p\frac{1}{2}\right\rangle = -\frac{2k_{87}}{3}\Delta_7.$$

Ở biểu thức trên

$$k_{67} = \frac{\langle 6p|F(r)|7p\rangle}{\langle 7p|F(r)|7p\rangle},$$

$$k_{87} = \frac{\langle 8p|F(r)|7p\rangle}{\langle 7p|F(r)|7p\rangle}.$$

Do đó

$$|\langle\Psi_{3/2}|\mathbf{r}|6s\rangle|^2 = \left|\left\langle 7p\frac{3}{2}\right|\mathbf{r}\left|6s\right\rangle\right|^2 \times \left|1 + \frac{k_{67}\Delta_7}{3(E_7 - E_6)}\sqrt{\frac{I_6}{I_7}} + \frac{k_{87}\Delta_7}{3(E_7 - E_8)}\sqrt{\frac{I_8}{I_7}}\right|^2,$$

$$|\langle\Psi_{1/2}|\mathbf{r}|6s\rangle|^2 = \left|\left\langle 7p\frac{1}{2}\right|\mathbf{r}\left|6s\right\rangle\right|^2 \times \left|1 - \frac{2k_{67}\Delta_7}{3(E_7 - E_6)}\sqrt{\frac{I_6}{I_7}} - \frac{2k_{87}\Delta_7}{3(E_7 - E_8)}\sqrt{\frac{I_8}{I_7}}\right|^2.$$

Vì

$$\Delta_6 = \left\langle 6p\frac{3}{2}\right| N(r) \left|6p\frac{3}{2}\right\rangle - \left\langle 6p\frac{1}{2}\right| N(r) \left|6p\frac{1}{2}\right\rangle = 3\hbar^2\langle 6p|F(r)|6p\rangle = 3\hbar^2 k_{67}^2\langle 7p|F(r)|7p\rangle = k_{67}^2\Delta_7,$$

ta có

$$k_{67} = \sqrt{\frac{\Delta_6}{\Delta_7}},$$

và tương tự

$$k_{87} = \sqrt{\frac{\Delta_8}{\Delta_7}}.$$

Như thế

$$\frac{I\left(j=\frac{3}{2}\right)}{I\left(j=\frac{1}{2}\right)}=\frac{\sum\limits_{j_z}|\langle\Psi_{3/2}|\mathbf{r}|6s\rangle|^2}{\sum\limits_{j_z}|\langle\Psi_{1/2}|\mathbf{r}|6s\rangle|^2}$$

$$\approx 2\left|\frac{1+\frac{k_{67}\Delta_7}{3(E_7-E_6)}\sqrt{\frac{I_6}{I_7}}+\frac{k_{87}\Delta_7}{3(E_7-E_8)}\sqrt{\frac{I_8}{I_7}}}{1-\frac{2k_{67}\Delta_7}{3(E_7-E_6)}\sqrt{\frac{I_6}{I_7}}-\frac{2k_{87}\Delta_7}{3(E_7-E_8)}\sqrt{\frac{I_8}{I_7}}}\right|^2$$

$$=2\left|\frac{1+\frac{\sqrt{\Delta_6\Delta_7}}{3(E_7-E_6)}\sqrt{\frac{I_6}{I_7}}+\frac{\sqrt{\Delta_8\Delta_7}}{3(E_7-E_8)}\sqrt{\frac{I_8}{I_7}}}{1-\frac{2\sqrt{\Delta_6\Delta_7}}{3(E_7-E_6)}\sqrt{\frac{I_6}{I_7}}-\frac{2\sqrt{\Delta_8\Delta_7}}{3(E_7-E_8)}\sqrt{\frac{I_8}{I_7}}}\right|^2=3,94\,,$$

bằng cách sử dụng các số liệu đã cho.

1057

Một đồng hồ nguyên tử có thể dựa trên chuyển dời cơ bản-siêu tinh tế (21 cm) trong nguyên tử hydro. Nguyên tử hydro ở áp suất thấp được giữ trong bình cầu nhỏ ($r \ll \lambda = 21$ cm), thành bình được bao phủ bởi Teflon. Đặc trưng trung tính về từ trường của lớp bọc và "thời gian tạm trú" rất ngắn của hydro trên mặt Teflon cho phép nguyên tử hydro va chạm thành bình với nhiễu loạn yếu lên trạng thái spin. Bình chứa được che chắn từ trường ngoài và được đưa vào một trường đều, yếu, có điều khiển và được định hướng sẵn. Tần số cộng hưởng của khí được phát hiện theo sự hấp thụ của bức xạ 21 cm, hay một cách khác bằng cách đưa bình khí vào trong một xung bức xạ ngắn và quan sát năng lượng bức xạ kết hợp.

(a) Hiệu ứng Zeeman của các trạng thái siêu tinh tế là hiệu ứng quan trọng. Hãy vẽ sơ đồ mức năng lượng và đưa ra các số lượng tử ứng với các trạng thái siêu tinh tế con của trạng thái cơ bản như hàm số của cường độ trường. Hãy bao gồm cả hai vùng trường yếu và trường mạnh của hình phổ Zeeman.

(b) Ta có thể sử dụng sự tách mức năng lượng trong miền trường mạnh để đo được hệ số g của proton như thế nào?

(c) Trong trường hợp trường yếu, một mức năng lượng chuyển dời bị ảnh hưởng yếu bởi từ trường. Sự chuyển dời đó là gì? Hãy đánh giá sơ bộ cường độ từ trường lớn nhất có thể bỏ qua với tần số dịch chuyển một lượng $\Delta\nu < 10^{-10}\,\nu$.

(d) Không có sự mở rộng Doppler của vạch cộng hưởng. Tại sao?

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Kể đến cấu trúc siêu tinh tế và hiệu ứng Zeeman, hai số hạng có thể được thêm vào Hamintonian của nguyên tử hydro

$$H_{hf} = A\mathbf{I}\cdot\mathbf{J}\,, \qquad (A > 0)$$

$$H_B = -\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B}\,.$$

Đối với trạng thái cơ bản của hydro

$$I = \frac{1}{2}, \qquad J = \frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{\mu} = -g_e\frac{e\hbar}{2m_ec}\frac{\mathbf{J}}{\hbar} + g_p\frac{e\hbar}{2m_pc}\frac{\mathbf{I}}{\hbar}\,.$$

Đặt

$$\frac{e\hbar}{2m_ec} = \mu_B\,, \qquad \frac{e\hbar}{2m_pc} = \mu_N$$

và sử dụng đơn vị ở đó $\hbar = 1$ ta có

$$\boldsymbol{\mu} = -g_e\mu_B\mathbf{J} + g_p\mu_N\mathbf{I}\,.$$

(1) *Trường hợp từ trường yếu.* $\langle H_{nf}\rangle \gg \langle H_B\rangle$, ta ghép **I**, **J** như $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{J}$. Sau đó đặt H_{hf} như là Hamintonian chính và H_B như là nhiễu loạn, ta giải bài toán trong biểu diễn của $\{\hat{\mathbf{F}}^2, \hat{\mathbf{I}}^2, \hat{\mathbf{J}}^2, \hat{\mathbf{F}}_z\}$. Bởi vì

$$H_{hf} = \frac{A}{2}(\hat{\mathbf{F}}^2 - \hat{\mathbf{I}}^2 - \hat{\mathbf{J}}^2) = \frac{A}{2}\left(\hat{\mathbf{F}}^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right) = \frac{A}{2}\left(\hat{\mathbf{F}}^2 - \frac{3}{2}\right),$$

ta có

$$\Delta E_{hf} = \begin{cases} -\dfrac{3}{4}A & \text{với } F = 0 \\[2mm] \dfrac{1}{4}A & \text{với } F = 1\,. \end{cases}$$

Trong không gian con của $\{\hat{\mathbf{F}}^2, \hat{\mathbf{F}}_z\}$, lý thuyết Wigner-Ecart cho ta

$$\langle \boldsymbol{\mu} \rangle = \frac{(-g_e\mu_B\mathbf{J} + g_p\mu_N\mathbf{I}) \cdot \mathbf{F}}{F^2}\mathbf{F}\,.$$

Do $I = J = \frac{1}{2}$,

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{F}}^2 + \hat{\mathbf{J}}^2 - \hat{\mathbf{I}}^2) = \frac{1}{2}\hat{\mathbf{F}}^2\,,$$

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{F}}^2 + \hat{\mathbf{I}}^2 - \hat{\mathbf{J}}^2) = \frac{1}{2}\hat{\mathbf{F}}^2\,,$$

ta có

$$\langle \boldsymbol{\mu} \rangle = -\frac{g_e\mu_B - g_p\mu_N}{2}\hat{\mathbf{F}}\,.$$

Bởi vì

$$H_B = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = \frac{g_e\mu_B - g_p\mu_N}{2}B\hat{F}_z\,,$$

ta có

$$\Delta E_B = \begin{cases} E_1, & (F_z = 1) \\ 0, & (F_z = 0) \\ -E_1, & (F_z = -1) \end{cases}$$

ở đây

$$E_1 = \frac{g_e\mu_B - g_p\mu_N}{2}B\,.$$

(2) *Trường hợp từ trường mạnh.* Vì $\langle H_B \rangle \gg \langle H_{hf} \rangle$, ta có thể xem H_B như là Hamintonian chính và H_{hf} như là nhiễu loạn. Với $\{\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{\mathbf{I}}^2, \hat{\mathbf{J}}_z, \hat{\mathbf{I}}_z\}$ như là một tập đầy đủ các đại lượng cơ học, cơ sở của không gian con là $|++\rangle$, $|+-\rangle$, $|-+\rangle$, $|--\rangle$ (ở đây $|++\rangle$ có nghĩa là $J_z = +1/2$, $I_z = +1/2$, v.v). Hiệu chính năng lượng là

$$\Delta E = \langle H_{hf} + H_B \rangle = \langle AI_zJ_z \rangle + g_e\mu_B B\langle J_z \rangle - g_p\mu_N B\langle I_z \rangle$$

$$= \begin{cases} E_1 + \dfrac{A}{4} & \text{với } |++\rangle, \\ E_2 - \dfrac{A}{4} & \text{với } |+-\rangle, \\ -E_2 - \dfrac{A}{4} & \text{với } |-+\rangle, \\ -E_1 + \dfrac{A}{4} & \text{với } |--\rangle, \end{cases}$$

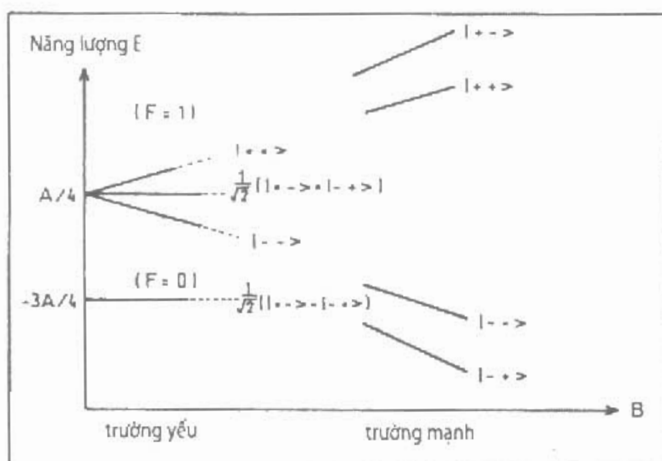
trong đó

$$E_1 = \frac{g_e\mu_B - g_p\mu_N}{2}B\,,$$

$$E_2 = \frac{g_e\mu_B + g_p\mu_N}{2}B\,.$$

Các lượng tử số của các mức năng lượng con được cho ở dưới đây và sơ đồ mức năng lượng được chỉ ra ở hình 1.18.

các lượng tử số	(F, J, I, F_z),	(J, I, J_z, I_z)
mức con	$(1, 1/2, 1/2, 1)$	$(1/2, 1/2, 1/2, -1/2)$
	$(1, 1/2, 1/2, 0)$	$(1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$
	$(1, 1/2, 1/2, -1)$	$(1/2, 1/2, -1/2, -1/2)$
	$(0, 1/2, 1/2, 0)$	$(1/2, 1/2, \quad 1/2, 1/2)$



Hình 1.18

(b) Ở trong một từ trường mạnh, gradien của các mức năng lượng đối với B thỏa mãn mối quan hệ

$$\frac{\dfrac{\Delta E_{|--\rangle}}{\Delta B} + \dfrac{\Delta E_{|+-\rangle}}{\Delta B}}{\dfrac{\Delta E_{|-+\rangle}}{\Delta B} + \dfrac{\Delta E_{|++\rangle}}{\Delta B}} = \frac{g_p\mu_N}{g_e\mu_B}\,,$$

mà có thể được sử dụng để xác định g_p nếu biết các đại lượng khác.

(c) Trong một từ trường yếu, các trạng thái $|F=1, F_z=0\rangle$, $|F=0, F_z=0\rangle$ không bị ảnh hưởng đáng kể bởi từ trường và cả năng lượng chuyển dời giữa hai mức này cũng vậy. Kết luận này đúng đối với trường hợp từ trường yếu ($A \gg E_1$) với giả định ảnh hưởng ở bậc đầu tiên. Ta có thể chờ đợi có sự ảnh hưởng của từ trường lên các trạng thái này sẽ xuất hiện tối đa như là bậc hai của E_1/A. Như thế, năng lượng của hai trạng thái có sự phụ thuộc vào B là

$$\left(\frac{E_1}{A}\right)^2 \cdot A = \frac{E_1^2}{A},$$

và như vậy

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta E}{E} \approx \frac{\frac{E_1^2}{A}}{\frac{A}{4} - \left(-\frac{3A}{4}\right)} = \frac{E_1^2}{A^2} \approx \left(\frac{g_e \mu_B B}{2A}\right)^2,$$

bỏ qua $g_p \mu_N$. Đối với $\Delta\nu/\nu < 10^{-10}$ và vạch 21 cm ta có

$$A = \frac{1}{4}A - \left(-\frac{3}{4}A\right) = h\nu = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda} \approx \frac{2\pi \times 2 \times 10^{-5}}{21} = 6 \times 10^{-6}\ \text{eV},$$

và như vậy

$$B \le \left(\frac{2A}{g_e \mu_B}\right)^2 \times 10^{-5} = \left(\frac{2 \times 6 \times 10^{-6}}{2 \times 6 \times 10^{-9}}\right) \times 10^{-5} = 10^{-2}\ \text{Gs}.$$

(d) Năng lượng cộng hưởng rất nhỏ. Khi photon được phát ra, tỉ số giữa năng lượng phản hồi của nucleon và của photon E, $\Delta E/E \ll 1$. Từ đó, sự mở rộng Doppler gây ra bởi sự phản hồi có thể bỏ qua.

1058

Xem xét một nguyên tử được tạo thành bởi sự ghép của một hạt Ω^- với một hạt nhân trần Pb ($Z = 82$).

(a) Tính toán năng lượng tách ra của mức $n = 10$, $l = 9$ của nguyên tử này do sự tương tác spin-quỹ đạo. Spin của hạt Ω^- là 3/2. Cho rằng momen từ là $\mu = \frac{e\hbar}{2mc} g \mathbf{p}_s$ với $g = 2$ và $m = 1672$ MeV/c^2.

Lưu ý:

$$\left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle = \left(\frac{mc^2}{\hbar c}\right)^3 (\alpha Z)^3 \frac{1}{n^3 l \left(l+\frac{1}{2}\right)(l+1)}$$

đối với một hạt có khối lượng m liên kết với một điện tích Z trong trạng thái gần nguyên tử hydro với số lượng tử (n, l).

(b) Nếu hạt Ω^- có momen tứ cực điện $Q \sim 10^{-26}$ cm^2 sẽ có một sự dịch chuyển năng lượng bổ sung do sự tương tác của momen này với gradien của điện trường $\partial E_z/\partial z$. Hãy ước lượng độ lớn của sự dịch chuyển này; so sánh nó với kết quả ở câu (a) và với năng lượng chuyển dời toàn phần của chuyển dời từ $n = 10$ đến $n = 11$ trong nguyên tử này.

(*Columbia*)

Lời giải:

(a) Năng lượng tương tác giữa spin và momen từ quỹ đạo của hạt Ω^- là

$$\Delta E_{ls} = Z \boldsymbol{\mu}_l \cdot \boldsymbol{\mu}_s \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle ,$$

ở đây

$$\boldsymbol{\mu}_l = \frac{e}{2mc}\mathbf{p}_l, = \frac{e\hbar}{2mc}\mathbf{l},$$

$$\boldsymbol{\mu}_s = \frac{e}{mc}\mathbf{p}_s, = \frac{e\hbar}{mc}\mathbf{s},$$

$\mathbf{p}_l$, $\mathbf{p}_s$ là lượng tử số quỹ đạo và spin. Như thế

$$\Delta E_{ls} = \frac{Ze^2\hbar^2}{2m^2c^2} \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle \mathbf{l} \cdot \mathbf{s}.$$

Bởi vì

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{s} = \frac{1}{2}[(\mathbf{l}+\mathbf{s})^2 - l^2 - s^2],$$

ta có

$$\Delta E_{ls} = \frac{Ze^2\hbar^2}{2m^2c^2} \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle \frac{(\mathbf{j}^2 - \mathbf{l}^2 - \mathbf{s}^2)}{2}$$

$$= \frac{(Z\alpha)^4 mc^2}{4} \left[\frac{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)}{n^3 l \left(l+\frac{1}{2}\right)(l+1)} \right].$$

Với $Z = 82$, $m = 1672$ MeV/c^2, $s = 3/2$, $n = 10$, $l = 9$, $\alpha = \frac{1}{137}$, và $\langle 1/r^3 \rangle$ như đã cho, ta tìm được $\Delta E_{ls} = 62,75 \times [j(j+1) - 93,75]$ eV. Các kết quả được cho ở bảng dưới đây.

j	ΔE_{ls} (eV)	Độ tách mức (eV)
19/2	377	1193
17/2	−816	1067
15/2	−1883	941
13/2	−2824	

(b) Sự dịch chuyển năng lượng do tương tác momen tứ cực điện Q và gradien của trường Coulomb $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ là

$$\Delta E_Q \approx Q\left\langle \frac{\partial E_z}{\partial z} \right\rangle ,$$

ở đây $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ là giá trị trung bình của gradien của trường Coulomb hạt nhân tại điểm đặt hạt Ω^-. Bởi vì

$$\left\langle \frac{\partial E_z}{\partial z} \right\rangle \approx -\left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle ,$$

ta có

$$\Delta E_Q \approx -Q\left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle$$

trong đơn vị nguyên tử của nguyên tử hyperon có đơn vị độ dài và năng lượng tương ứng là

$$a = \frac{\hbar^2}{me^2} = \frac{\hbar c}{mc^2}\left(\frac{\hbar c}{e^2}\right) = \frac{1,97 \times 10^{11}}{1672} \times 137 = 1,61 \times 10^{-12} \text{ cm},$$

$$\varepsilon = \frac{me^4}{\hbar^2} = mc^2\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2 = \frac{1672 \times 10^6}{137^2} = 8,91 \times 10^4 \text{ eV}.$$

Đối với $n = 10$, $l = 9$, $\langle \frac{1}{r^3} \rangle = 1,53 \times 10^{35}$ cm^{-3} $\approx 0,6$ đvklnt. Với $Q \approx 10^{-26}$ cm^2 $\approx 4 \times 10^{-3}$ đvklnt, ta có

$$\Delta E_Q \approx 2,4 \times 10^{-3} \text{ đvklnt} \approx 2 \times 10^2 \text{ eV}$$

Năng lượng toàn phần sinh ra do chuyển dời từ $n = 11$ đến $n = 10$ là

$$\Delta E = \frac{Z^2mc^2}{2}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2\left(\frac{1}{10^2} - \frac{1}{11^2}\right)$$

$$= \frac{82^2 \times 1672 \times 10^6}{2 \times 137^2}\left(\frac{1}{10^2} - \frac{1}{11^2}\right)$$

$$\approx 5 \times 10^5 \text{ eV}.$$

1059

Năng lượng của photon phát ra do chuyển dời từ mức $n = 3$ đến mức $n = 2$ của nguyên tử meson μ^- của cacbon là bao nhiêu? Biểu thị nó theo năng lượng γ đối với sự chuyển dời electron từ trạng thái $n = 2$ đến $n = 1$ của hydro, cho rằng $m_\mu/m_e = 210$.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Năng lượng của nguyên tử μ^- của cacbon là

$$E_n(\mu) = \frac{Z^2m_\mu}{m_e}E_n(H),$$

ở đây $E_n(H)$ là năng lượng của nguyên tử hydro tương ứng, và $Z = 6$.

Năng lượng của photon phát ra do chuyển dời từ mức $n = 3$ đến $n = 2$ của nguyên tử meson là

$$\Delta E = \frac{Z^2m_\mu}{m_e}[E_3(H) - E_2(H)].$$

Do

$$-E_n(H) \propto \frac{1}{n^2},$$

ta có

$$\frac{36}{5}[E_3(H) - E_2(H)] = \frac{4}{3}[E_2(H) - E_1(H)].$$

và từ đó

$$\Delta E = \frac{5Z^2m_\mu}{27m_e}[E_2(H) - E_1(H)]$$

$$= 1400[E_2(H) - E_1(H)].$$

ở đây $E_2(H) - E_1(H)$ là năng lượng của photon phát ra do chuyển dời từ $n = 2$ đến $n = 1$ của nguyên tử hydro.

1060

Hạt muyon là hạt cơ bản thời gian sống tương đối dài có khối lượng bằng 207 lần khối lượng của electron. Điện tích và các tương tác được biết của hạt muyon là giống như của electron. Một "nguyên tử muyon" bao gồm một nguyên tử trung hoà ở đó một electron được thay thế bởi một muyon.

(a) Năng lượng liên kết của trạng thái cơ bản của nguyên tử hydro muyon là bao nhiêu?

(b) Lithi muyon ($Z = 3$) giống với nguyên tố hoá học thông thường nào nhất. Giải thích câu trả lời của bạn.

(MIT)

Lời giải:

(a) Tương tự như nguyên tử hydro, năng lượng liên kết ở trạng thái cơ bản của nguyên tử muyon là

$$E_\mu = \frac{m_\mu e^4}{2\hbar^2} = 207 E_H = 2,82 \times 10^3 \text{ eV}.$$

(b) Nguyên tử muyon lithi biểu hiện về mặt hóa học giống với nguyên tử He nhất. Bởi vì muyon μ và electron là các fecmion khác nhau, chúng có các quỹ đạo của riêng mình. Hai electron nằm ở trạng thái cơ bản, tương tự như nguyên tử He trong khi hạt μ ở trạng thái cơ bản của chính nó, có bán kính quỹ đạo bằng 1/207 của quỹ đạo electron. Các tính chất hóa học của một nguyên tử được xác định bằng số electron ở lớp ngoài cùng. Do đó, nguyên tử meson biểu hiện giống như He hơn là giống Li.

1061

Hamintonian đối với một nguyên tử $(\mu^+ e^-)$ ở trạng thái $n = 1, l = 0$ trong một từ trường ngoài là

$$H = a\mathbf{S}_\mu \cdot \mathbf{S}_e + \frac{|e|}{m_e c}\mathbf{S}_e \cdot \mathbf{B} - \frac{|e|}{m_\mu c}\mathbf{S}_\mu \cdot \mathbf{B}.$$

(a) Ý nghĩa vật lý của từng số hạng là gì? Số hạng nào chi phối trong sự tương tác với trường ngoài?

(b) Chọn trục z dọc theo $\mathbf{B}$ và sử dụng kí hiệu (F, M_F), ở đây $\mathbf{F} = \mathbf{S}_\mu + \mathbf{S}_e$, hãy chứng tỏ rằng $(1, +1)$ là một hàm riêng của H và cho biết trị riêng của nó.

(c) Một trường RF có thể đặt vào gây ra sự chuyển dời về trạng thái (0,0). Mô tả một cách định lượng là tại sao bằng cách quan sát sự phân rã $\mu^+ \to e^+\nu_e\bar{\nu}_\mu$ có thể dùng để phát hiện sự xảy ra của chuyển dời này.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Trong hàm Hamintonian, số hạng thứ nhất, $a\mathbf{S}_\mu \cdot \mathbf{S}_e$, mô tả tương tác diện từ giữa μ^+ và e^-, số hạng thứ hai và thứ ba lần lượt mô tả sự tương tác giữa electron và μ^+ với từ trường ngoài.

(b) Kí hiệu trạng thái $F = 1$, $M_F = +1$ với Ψ. Do $\mathbf{F} = \mathbf{S}_\mu + \mathbf{S}_e$, ta có

$$\mathbf{S}_\mu \cdot \mathbf{S}_e = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^2 - \mathbf{S}_\mu^2 - \mathbf{S}_e^2),$$

và do đó

$$\mathbf{S}_\mu \cdot \mathbf{S}_e\Psi = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^2\Psi - \mathbf{S}_\mu^2\Psi - \mathbf{S}_e^2\Psi) = \frac{\hbar^2}{2}\left(2\Psi - \frac{3}{4}\Psi - \frac{3}{4}\Psi\right) = \frac{\hbar^2}{4}\Psi.$$

Ở biểu diễn vectơ riêng của $\mathbf{S}_e^z$, $\mathbf{S}_\mu^z$, trạng thái Ψ được biểu diễn bằng spinơ

$$\Psi = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_e \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_\mu .$$

Khi đó

$$\mathbf{S}_e^z\Psi = \frac{\hbar}{2}\sigma_e^z\Psi = \frac{\hbar}{2}\Psi,$$

$$\mathbf{S}_\mu^z\Psi = \frac{\hbar}{2}\sigma_\mu^z\Psi = \frac{\hbar}{2}\Psi,$$

Và vì vậy

$$\begin{aligned}H &= a\mathbf{S}_\mu \cdot \mathbf{S}_e\Psi + \frac{e}{m_e c}BS_e^z\Psi - \frac{e}{m_\mu c}BS_\mu^z\Psi \\ &= a\frac{\hbar^2}{4}\Psi + \frac{eB}{m_e c}\cdot\frac{\hbar}{2}\Psi - \frac{eB}{m_\mu c}\cdot\frac{\hbar}{2}\Psi \\ &= \left(\frac{1}{4}a\hbar^2 + \frac{eB}{2m_e c}\hbar - \frac{eB}{2m_\mu c}\hbar\right)\Psi .\end{aligned}$$

Từ đó trạng thái $(1, +1)$ là một trạng thái riêng của H với trị riêng

$$\left(\frac{1}{4}a\hbar^2 + \frac{eB}{2m_e c}\hbar - \frac{eB}{2m_\mu c}\hbar\right) .$$

(c) Hai hạt ở trạng thái $(1, +1)$ có spin song song, trong khí ở trạng thái (0, 0) có spin đối song. Như vậy so với hướng spin của electron các hướng phân cực của μ^+ ở trong cả hai trạng thái là ngược nhau. Điều tiếp theo là spin của positron xuất hiện do sự phân rã của hạt μ^+ cũng ngược hướng với spin của electron. Một sự huỷ cặp (e^+e^-) sẽ tạo ra 3γ hay 2γ tuỳ theo điều kiện là spin của chúng song song hay đối song. Do đó, nếu quan sát được cặp (e^+e^-) được tạo thành từ phân rã $\mu^+ \to e^+\nu_e\bar{\nu}_\mu$ khi huỷ cặp cho 2γ, khi đó có thể kết luận rằng sự chuyển tiếp xảy ra là giữa trạng thái $(1, +1)$ và (0, 0).

1062

Các nguyên tử muyon gồm có các meson muy (khối lượng $m_\mu = 206m_e$) liên kết với hạt nhân nguyên tử ở quỹ đạo tương tự hydro. Năng lượng của các mức muyon bị lệch so với giá trị của chúng ở điều kiện hạt nhân điểm do điện tích hạt nhân phân bố trên toàn bộ miền có bán kính R. Thế năng hiệu dụng Coulomb có thể ước lượng như sau

$$V(r) = \begin{cases} -\dfrac{Ze^2}{r}, & (r \geq R) \\ -\dfrac{Ze^2}{R}\left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{r^2}{2R^2}\right). & (r < R)\end{cases}$$

(a) Hãy phát biểu một cách định lượng năng lượng của các mức muyon $1s$, $2s$, $2p$, $3s$, $3p$, $3d$ sẽ bị lệch tuyệt đối và tương đối với nhau như thế nào, giải

thích về vật lý sự khác nhau ở các độ lệch đó. Hãy vẽ sơ đồ năng lượng nhiễu loạn và không nhiễu loạn của các mức đó.

(b) Hãy đưa ra biểu thức đối với thay đổi bậc nhất về năng lượng của trạng thái $1s$ với điều kiện là hạt nhân không phải một đểm.

(c) *Hãy ước lượng* độ dịch chuyển năng lượng $2s$–$2p$ với giả định rằng $R/a_\mu \ll 1$, ở đây a_μ là "bán kính Bohr" đối với muyon và chứng tỏ rằng sự dịch chuyển này cho ta một cách đo R.

(d) Lúc nào thì phương pháp ở (b) không dùng được? Có phải phương pháp này ước lượng quá cao hay quá thấp độ dịch năng lượng. Hãy giải thích câu trả lời của bạn bằng các số hạng vật lý.

Các thông tin có ích:

$$\Psi_{1s} = 2N_0 \exp\left(-\frac{r}{a_\mu}\right) Y_{00}(\theta, \phi)\,,$$

$$\Psi_{2s} = \frac{1}{\sqrt{8}} N_0 \left(2 - \frac{r}{a_\mu}\right) \exp\left(-\frac{r}{2a_\mu}\right) Y_{00}(\theta, \phi)\,,$$

$$\Psi_{2p} = \frac{1}{\sqrt{24}} N_0 \frac{r}{a_\mu} \exp\left(-\frac{r}{2a_\mu}\right) Y_{1m}(\theta, \phi)\,,$$

$$N_0 = \frac{1}{a_\mu^{3/2}}\,.$$

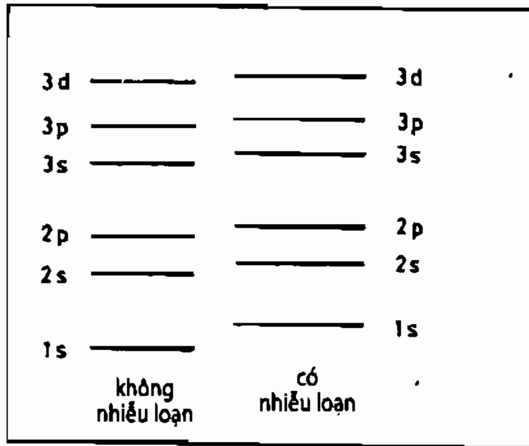
(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Nếu điện tích hạt nhân được phân bố trên toàn bộ một thể tích hữu hạn thì cường độ điện trường tại một điểm bên trong hạt nhân sẽ nhỏ hơn cường độ điện trường cũng tại điểm đó nếu hạt nhân là một điểm. Kết quả là năng lượng tại điểm đó ở trường hợp sau lớn hơn trường hợp trước. Xác suất của electron ở trạng thái $1s$ nằm trong hạt nhân lớn hơn bất kì trạng thái nào khác do vậy ảnh hưởng của kích thước hữu hạn của hạt nhân lên mức năng lượng đó, tức là độ dịch chuyển năng lượng là lớn nhất. Thứ tự tiếp theo là $2s$, $3s$, $2p$, $3p$, $3d$, v.v. Các mức năng lượng được chỉ ra ở hình 1.19.

(b) Thế năng nhiễu loạn do thể tích hữu hạn của hạt nhân có dạng

$$\Delta V = \begin{cases} 0, & (r \geq R) \\ \dfrac{Ze^2}{R}\left(\dfrac{r^2}{2R^2} - \dfrac{3}{2} + \dfrac{R}{r}\right). & (r < R) \end{cases}$$



Hình 1.19

Hiệu chính năng lượng bậc nhất của trạng thái $1s$ với ước lượng xấp xỉ $\frac{R}{a_\mu} \ll 1$ là

$$\begin{aligned}
\Delta E_{1s} &= \int \Psi_{1s}^* \Delta V \Psi_{1s} d\tau \\
&= \frac{Ze^2}{R} 4N_0^2 \int_0^R \exp\left(-\frac{2r}{a_\mu}\right) \cdot \left(\frac{r^2}{2R^2} - \frac{3}{2} + \frac{R}{r}\right) r^2 dr \\
&\approx \frac{Ze^2}{R} 4N_0^2 \int_0^R \left(\frac{r^2}{2R^2} - \frac{3}{2} + \frac{R}{r}\right) r^2 dr \\
&\fallingdotseq \frac{2Ze^2R^2}{5a_\mu^3} .
\end{aligned}$$

(c) Độ dịch chuyển năng lượng đối với trạng thái $2s$ và $2p$ là

$$\begin{aligned}
\Delta E_{2s} &= \int \Psi_{2s}^* \Delta V \Psi_{2s} d\tau \\
&= \frac{Ze^2N_0^2}{8R} \int_0^R \left(2 - \frac{r}{a_\mu}\right)^2 \exp\left(-\frac{r}{a_\mu}\right) \cdot \left(\frac{r^2}{2R^2} - \frac{3}{2} + \frac{R}{r}\right) r^2 dr \\
&\approx \frac{Ze^2N_0^2}{8R} \int_0^R 4\left(\frac{r^2}{2R^2} - \frac{3}{2} + \frac{R}{r}\right) r^2 dr
\end{aligned}$$

$$= \frac{Ze^2R^2}{20a_\mu^3},$$

$$\Delta E_{2p} = \int \Psi_{2p}^* \Delta V \Psi_{2p} d\tau$$

$$= \frac{Ze^2N_0^2}{24a_\mu^2 R}\int_0^R r^2 \exp\left(-\frac{r}{a_\mu}\right)\cdot\left(\frac{r^2}{2R^2} - \frac{3}{2} + \frac{R}{r}\right) r^2 dr$$

$$\approx \frac{Ze^2N_0^2}{24a_\mu^2 R}\int_0^R r^2\left(\frac{r^2}{2R^2} - \frac{3}{2} + \frac{R}{r}\right) r^2 dr$$

$$= \frac{3Ze^2R^4}{3360a_\mu^5} \ll \Delta E_{2s}.$$

Từ đó độ dịch chuyển tương đối 2s-2p là

$$\Delta E_{sp} \approx \Delta E_{2s} = \frac{Ze^2R^2}{20a_\mu^3}.$$

Như vậy, R có thể ước lượng được từ sự dịch chuyển tương đối của các mức năng lượng.

(d) Đối với trường hợp Z lớn, $a_\mu = \frac{\hbar^2}{Zm_\mu e^2}$ trở nên quá nhỏ do đó $\frac{R}{a_\mu} \geq 1$. Khi $\frac{R}{a_\mu} \geq \frac{\sqrt{5}}{2}$, sử dụng kết quả phần (b) ta có

$$\Delta E_{1s} = \frac{2Ze^2R^2}{5a_\mu^3} = \frac{4}{5}|E_{1s}^0|\left(\frac{R}{a_\mu}\right)^2 > |E_{1s}^0|,$$

ở đây

$$E_{1s}^0 = -\frac{m_\mu Z^2 e^4}{2\hbar^2}.$$

Điều này có nghĩa là $E_{1s} = E_{1s}^0 + \Delta E_{1s} > 0$, giá trị này mâu thuẫn với thực tế là E_{1s}, a một trạng thái liên kết, có giá trị âm. Bởi vì giá trị ΔE_{1s} được đưa ra như từ phần (b) cao hơn giá trị thực tế. Điều này có nguyên nhân là ta chỉ lấy số hạng bậc 0 ở trong khai triển $\exp(-\frac{2r}{a_\mu})$. Đưa vào các số hạng bậc cao hơn có thể cho kết quả thực tế hơn.

1063

Cho một trạng thái xảy ra khi một hạt muyon âm bị bắt giữ bởi một nguyên

tử nhôm (số nguyên tử $Z = 13$). Sau khi hạt muyon nằm bên trong "đám mây electron" nó tạo ra một nguyên tử muyon tương tự hydro với hạt nhân của nhôm. Khối lượng của muyon là 105,7 MeV.

(a) Tính toán bước sóng (đơn vị Å) của photon phát ra khi nguyên tử muyon này phân ra từ trạng thái $3d$. (Theo cấp chính xác của thước loga, bỏ qua chuyển động của hạt nhân).

(b) Tính toán thời gian sống trung bình của nguyên tử muyon nói trên ở trạng thái $3d$, tính đến điều kiện của nguyên tử hydro ở trạng thái $3d$ là $1,6 \times 10^{-8}$ s.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

Có hai mức năng lượng trong mỗi trạng thái $3d$, $3p$, $2p$ tức là, $3^2D_{5/2}$ và $3^2D_{3/2}$, $3^2P_{3/2}$ và $3^2P_{1/2}$, $2^2P_{3/2}$ và $2^2P_{1/2}$ tương ứng. Chỉ có một mức năng lượng, $3^2S_{1/2}$, $2^2S_{1/2}$ và $1^2S_{1/2}$, đối với trạng thái $3s$, $2s$ và $1s$ tương ứng.

Các chuyển dời có thể là

$$3^2D_{5/2} \to 3^2P_{3/2}, 3^2D_{5/2} \to 2^2P_{3/2}, 3^2D_{3/2} \to 3^2P_{1/2},$$

$$3^2D_{3/2} \to 2^2P_{3/2}, 3^2D_{3/2} \to 2^2P_{1/2},$$

$$3^2P_{3/2} \to 3^2S_{1/2}, 3^2P_{3/2} \to 2^2S_{1/2}, 3^2P_{3/2} \to 1^2S_{1/2},$$

$$3^2P_{1/2} \to 2^2S_{1/2}, 3^2P_{1/2} \to 1^2S_{1/2},$$

$$3^2S_{1/2} \to 2^2P_{3/2}, 3^2S_{1/2} \to 2^2P_{1/2}, 2^2P_{3/2} \to 2^2S_{1/2},$$

$$2^2P_{3/2} \to 1^2S_{1/2}, 2^2P_{1/2} \to 1^2S_{1/2}.$$

(a) Nguyên tử meson tương tự hydro có năng lượng

$$E = E_0\left[\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha^2 Z^2}{n^3}\left(\frac{1}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n}\right)\right],$$

ở đây

$$E_0 = -\frac{2\pi^2 m_\mu e^4 Z^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2 h^2} = -13,6 \times \frac{105,7}{0.511} \times 13^2 = -4,754 \times 10^5 \text{ eV},$$

$\alpha = \frac{1}{137}$. Do đó

$$\Delta E(3^2D_{5/2} \rightarrow 3^2P_{3/2}) = 26,42 \text{ eV},$$

$$\Delta E(3^2D_{5/2} \rightarrow 2^2P_{3/2}) = 6,608 \times 10^4 \text{ eV},$$

$$\Delta E(3^2D_{3/2} \rightarrow 3^2P_{1/2}) = 79,27 \text{ eV},$$

$$\Delta E(3^2D_{3/2} \rightarrow 2^2P_{3/2}) = 6,596 \times 10^4 \text{ eV},$$

$$\Delta E(3^2D_{3/2} \rightarrow 2^2P_{1/2}) = 6,632 \times 10^4 \text{ eV},$$

$$\Delta E(3^2P_{3/2} \rightarrow 3^2S_{1/2}) = 79,27 \text{ eV},$$

$$\Delta E(3^2P_{3/2} \rightarrow 2^2S_{1/2}) = 6,632 \times 10^4 \text{ eV},$$

$$\Delta E(3^2P_{3/2} \rightarrow 1^2S_{1/2}) = 4,236 \times 10^5 \text{ eV},$$

$$\Delta E(3^2P_{1/2} \rightarrow 2^2S_{1/2}) = 6,624 \times 10^4 \text{ eV},$$

$$\Delta E(3^2P_{1/2} \rightarrow 1^2S_{1/2}) = 4,235 \times 10^5 \text{ eV},$$

$$\Delta E(3^2S_{1/2} \rightarrow 2^2P_{3/2}) = 6,598 \times 10^5 \text{ eV},$$

$$\Delta E(3^2S_{1/2} \rightarrow 2^2P_{1/2}) = 6,624 \times 10^4 \text{ eV},$$

$$\Delta E(2^2P_{3/2} \rightarrow 2^2S_{1/2}) = 267,5 \text{ eV},$$

$$\Delta E(2^2P_{3/2} \rightarrow 1^2S_{1/2}) = 3,576 \times 10^5 \text{ eV},$$

$$\Delta E(2^2P_{1/2} \rightarrow 1^2S_{1/2}) = 3,573 \times 10^5 \text{ eV}.$$

Sử dụng mối quan hệ $\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{12430}{\Delta E(\text{eV})}$Å, ta được bước sóng của photon phát xạ trong phân rã từ trạng thái $3d$: $\lambda = 470$ Å, 0,188 Å, 0,157 Å, 0,188 Å, 0,187 Å theo thứ tự trên.

(b) Xác suất của một chuyển dời tự phát là

$$P \propto \frac{e^2\omega^3}{\hbar c^3}R^2$$

với

$$\omega \propto \frac{m_\mu(Ze^2)^2}{\hbar^3}, \qquad R \propto \frac{\hbar^2}{m_\mu Ze^2}.$$

Như thế

$$P \propto m_\mu (Ze^2)^4 .$$

Do thời gian sống trung bình của trạng thái đầu tiên là

$$\tau = \frac{1}{P},$$

thời gian sống trung bình của trạng thái $3d$ của nguyên tử meson μ là

$$\tau = \frac{m_e \tau_0}{m_\mu Z^4} = 2,7 \times 10^{-15}\ \text{s} .$$

ở đây $\tau_0 = 1,6 \times 10^{-8}$ s là thời gian sống trung bình của trạng thái $3d$ của nguyên tử hydro.

1064

Một phương pháp để đo bán kính điện tích của hạt nhân là nghiên cứu các tia X đặc trưng từ các nguyên tử ngoại lai.

(a) Tính toán mức năng lượng của một hạt μ^- trong trường của một hạt nhân có điện tích Ze xem như hạt nhân điểm.

(b) Bây giờ giả định hạt μ^- hoàn toàn nằm trong hạt nhân. Hãy tính mức năng lượng cho rằng hạt nhân là hình cầu có điện tích Ze tích điện đều và bán kính ρ.

(c) Ước lượng năng lượng của vạch K tia X từ $^{208}Pb_{82}$ sử dụng phương pháp gần đúng ở phần (a) hay phần (b). Thảo luận về sự hợp lý của những ước lượng này.

Lưu ý: $m_\mu = 200 m_e$.

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Mức năng lượng của hạt μ^- trong trường của hạt nhân điểm có điện tích Ze được cho bởi biểu thức **(Bài tập 1035)**

$$E_n = Z^2 \frac{m_\mu}{m_e} E_n(H) = -Z^2 \times 200 \times \frac{13,6}{n^2}$$

$$= -\frac{2,72 \times 10^3}{n^2} Z^2\ \text{eV},$$

ở đây $E_n(H)$ là mức năng lượng tương ứng của nguyên tử hydro.

(b) Thế năng cho hạt μ^- chuyển động trong quả cầu tích điện đều bán kính ρ là (**Bài tập 1050(a)**)

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{\rho}\left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2\rho^2}\right) = -\frac{3Ze^2}{2\rho} + \frac{1}{2}\left(\frac{Ze^2}{\rho^3}\right) r^2 .$$

Sự phụ thuộc của thế năng vào r gợi ý rằng hạt μ^- có thể xem như một dao động tử điều hòa đẳng hướng có tần số riêng là $\omega = \sqrt{\frac{Ze^2}{m_\mu \rho^3}}$. Các mức năng lượng do đó là

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{3}{2}\right) - \frac{3Ze^2}{2\rho} ,$$

ở đây $n = 0, 1, 2, \ldots$, $\rho \approx 1,2 \times 10^{-13}\ A^{1/3}$ cm.

(c) Vạch K tia X được phát xạ do sự chuyển dời của các mức năng lượng electron từ mức $n \geq 2$ về mức $n = 1$.

Mẫu hạt nhân điểm (a) cho ta năng lượng của tia X là

$$\Delta E = E_2 - E_1 == -2,72 \times 10^3 \times 82^2 \left(\frac{1}{2^2} - 1\right) = 1,37 \times 10^7 \text{ eV}.$$

Mẫu dao động tử điều hòa (b) cho ta năng lượng của tia X là

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \hbar\omega = \hbar\left(\frac{c}{\rho}\right)\sqrt{Z\frac{r_0}{\rho}\frac{m_e}{m_\mu}} = \frac{6,58 \times 10^{-16} \times 3 \times 10^{10}}{1,2 \times 10^{-13}}$$

$$\times \sqrt{\frac{82 \times 2,82 \times 10^{-13}}{208 \times 200 \times 1,2 \times 10^{-13}}} = 1,12 \times 10^7 \text{ eV},$$

ở đây $r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2} = 2,82 \times 10^{-13}$ cm là bán kính cổ điển của electron.

Thảo luận: Do hạt μ^- nặng hơn rất nhiều so với electron, nó sẽ có xác suất nằm bên trong hạt nhân nhiều hơn (bán kính Bohr thứ nhất $a_0 \propto \frac{1}{m}$), điều đó làm cho điện tích hạt nhân hiệu dụng $Z^* < Z$. Như thế ta có thể kết luận rằng năng lượng của vạch K tia X như mẫu hạt nhân điểm đưa ra là quá cao. Mặt khác, do hạt μ^- không có xác suất hữu hạn nằm ngoài hạt nhân, năng lượng của vạch K tia X như được đưa ra bởi mẫu dao động tử điều hòa có thể hơi thấp hơn so với giá trị đúng. Do xác suất của hạt μ^- nằm ngoài hạt nhân giảm nhanh hơn bất kì sự giảm nào của Z, mẫu dao động tử điều hòa gần với thực

tế hơn so với mẫu hạt nhân điểm.

1065

Một đề xuất được đưa ra nhằm nghiên cứu tính chất của một nguyên tử tạo thành từ một hạt π^+ ($m_{\pi^+} = 273,2\, m_e$) và một hạt μ^- ($m_\mu = 206,77\, m_e$) để đo bán kính tích điện của π^+ với giả thiết rằng điện tích của nó rải đều trên một vỏ hình cầu có bán kính $r_0 = 10^{-13}$ cm và điện tích của μ^- là một điểm. Hãy biểu thị thế năng như một thế tĩnh điện Coulomb của điện tích điểm cộng với một nhiễu loạn và sử dụng lý thuyết nhiễu loạn để tính toán một giá trị bằng số phần trăm dịch chuyển của hiệu số năng lượng Δ của các mức $1s$–$2p$ (bỏ qua hiệu ứng spin quỹ đạo và độ dịch chuyển Lamb). Cho biết

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2},$$

$$R_{10}(r) = \left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} 2\exp\left(-\frac{r}{a_0}\right),$$

$$R_{21}(r) = \left(\frac{1}{2a_0}\right)^{3/2} \frac{r}{a_0}\exp\left(-\frac{r}{a_0}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Hàm thế năng là

$$V(r) = \begin{cases} -e^2/r, & (r > r_0) \\ -e^2/r_0. & (r < r_0) \end{cases}$$

Hàm Hamintonian có thể được viết như $H = H_0 + H'$, ở đây H_0 là hàm Hamintonian nếu π^+ được xem như điện tích điểm, H' được xem là nhiễu loạn có giá trị là

$$H' = \begin{cases} 0, & (r > r_0) \\ e^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right). & (r < r_0) \end{cases}$$

Độ dịch chuyển của mức $1s$ gây bởi H', ở gần đúng bậc nhất là

$$\Delta E_{1s} = \int \Psi_{1s}^* H' \Psi_{1s} d\tau = \int_0^{r_0} R_{10}^2(r) e^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) r^2 dr \approx \frac{2e^2 r_0^2}{3a_0^3},$$

giả thiết là $r_0 \ll a_0$. Độ dịch chuyển của mức $2p$ là

$$\Delta E_{2p} = \int \Psi^*_{2p} H' \Psi_{2p} d\tau = \int_0^{r_0} R^2_{21}(r) e^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) r^2 dr$$

$$\approx \frac{e^2 r_0^4}{480 a_0^5} \ll \Delta E_{1s},$$

sử dụng cùng một phép ước lượng. Do đó

$$\Delta E_{1s} - \Delta E_{2p} \approx \Delta E_{1s} = \frac{2e^2 r_0^2}{3a_0^3}.$$

Nếu không có nhiễu loạn, hiệu số năng lượng của $1s$–$2p$ là

$$\Delta = -\frac{me^4}{2\hbar^2}\left(\frac{1}{2^2} - 1\right) = \frac{3me^4}{8\hbar^2} = \frac{3e^2}{8a_0}.$$

Do đó

$$\frac{\Delta E_{1s} - \Delta E_{2p}}{\Delta} \approx \frac{16}{9}\left(\frac{r_0}{a_0}\right)^2.$$

Bởi vì

$$m = \frac{m_{\mu^-} m_{\pi^+}}{m_{\mu^-} + m_{\pi^+}} = 117,7 m_e,$$

ta có

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} = \left(\frac{\hbar^2}{m_e e^2}\right)\frac{m_e}{m} = \frac{0,53 \times 10^{-8}}{117,7} = 4,5 \times 10^{-11}\ \text{cm},$$

và từ đó ta có

$$\frac{\Delta E_{1s} - \Delta E_{2p}}{\Delta} = \frac{16}{9} \times \left(\frac{10^{-3}}{4,5 \times 10^{-11}}\right)^2 = 8,8 \times 10^{-6}.$$

1066

Một hạt meson μ^- (một electron nặng với khối lượng $M = 210 m_e$ với m_e là khối lượng của electron) bị bắt giữ trong một quỹ đạo tròn xung quanh một proton. Bán kính ban đầu của nó $R \approx$ bán kính Bohr của một electron xung quanh proton. Hãy ước lượng thời gian (theo các đại lượng R, M và m_e) mà hạt meson μ^- đó bức xạ năng lượng đủ để nó đạt mức cơ bản. Sử dụng lập

luận cổ điển, bao gồm cả biểu thức đối với công suất bức xạ bởi hạt tích điện chuyển động có gia tốc không tương đối tính.

(*CUSPEA*)

Lời giải:

Năng lượng của hạt μ^- là

$$E(r) = K(r) - \frac{e^2}{r} = -\frac{e^2}{2r},$$

ở đây $K(r)$ là động năng

Công suất bức xạ là $P = \frac{2e^2a^2}{3c^3}$, ở đây

$$a = \frac{F_{Coul}}{M} = \frac{e^2}{r^2 M}$$

là gia tốc hướng tâm. Định luật bảo toàn năng lượng cho ta

$$\frac{dE}{dt} = -P,$$

tức là

$$\frac{e^2}{2r^2}\frac{dr}{dt} = -\frac{2e^2}{3c^3} \cdot \frac{e^4}{r^4 M^2}.$$

Phép tích phân cho ta

$$R^3 - r^3 = \frac{4}{c^3} \cdot \frac{e^4}{M^2} t.$$

ở đây R là bán kính của quỹ đạo ban đầu của hạt μ là

$$R \approx \frac{\hbar^2}{me^2}.$$

Ở trạng thái cơ bản của hạt μ bán kính quỹ đạo của nó là bán kính Bohr của nguyên tử meson là

$$r_0 = \frac{\hbar^2}{Me^2},$$

và thời gian t cần thiết cho hạt meson μ chuyển động xoáy ốc xuống trạng thái này được cho bởi phương trình

$$\left(\frac{\hbar^2}{e^2}\right)^3 \left(\frac{1}{m^3} - \frac{1}{M^3}\right) = \frac{4e^4}{c^3 M^2} t.$$

Do $M \gg m$, ta có

$$t \approx \frac{M^2c^3R^3}{4e^4} = \left(\frac{M}{m}\right)^2\left(\frac{mc^2}{e^2}\right)^2\frac{R^3}{4c}$$

$$= 210^2 \times \left(\frac{5,3 \times 10^{-9}}{2,82 \times 10^{-13}}\right)^2 \times \frac{5,3 \times 10^{-9}}{4 \times 3 \times 10^{10}} = 6,9 \times 10^{-7}\ \text{s}\,.$$

1067

Xét một vũ trụ giả định ở đó electron có spin là 3/2 thay vì 1/2.

(a) Hãy vẽ một sơ đồ năng lượng cho trạng thái $n = 3$ của hydro trong trường hợp không có từ trường ngoài. Đánh dấu mỗi trạng thái theo kí hiệu phổ và chỉ ra những trạng thái nào có cùng mức năng lượng. Bỏ qua cấu trúc siêu tinh tế (tương tác với spin của hạt nhân).

(b) Hãy thảo luận một cách định lượng về mức năng lượng của nguyên tử heli hai electron, nhấn mạnh những sự khác nhau với heli có các electron có spin 1/2.

(c) Với giá trị nào của nguyên tử số thì hai khí trơ đầu tiên sẽ xuất hiện trong vũ trụ đó?

(Columbia)

Lời giải:

(a) Giả định một nguyên tử hydro có spin 3/2. Đối với $n = 3$, các số lượng tử có thể được chỉ ra ở Bảng 1.1.

n	l	j
	0	3/2
3	1	5/2, 3/2, 1/2
	2	7/2, 5/2, 3/2, 1/2

Bảng 1.1

Nếu cấu trúc tinh tế được bỏ qua, các trạng thái này là suy biến với năng lượng là

$$E_n = -\frac{RhcZ^2}{n^2}$$

ở đây $Z = 1$, $n = 3$, R là hằng số Rydberg, c là vận tốc ánh sáng.

Nếu hiệu ứng tương đối tính và tương tác spin-quỹ đạo được tính đến thì năng lượng biến đổi thành $E = E_0 + \Delta E$ và sự suy biến biến mất, tức là các trạng thái khác nhau có các năng lượng khác nhau.

(1) Đối với $l = 0$ và $j = 3/2$ chỉ có sự hiệu chính ΔE_r xuất hiện do hiệu ứng tương đối tính, tức là,

$$\Delta E = \Delta E_r = -A\left(\frac{1}{l+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n}\right) = -\frac{7}{4}A\,,$$

ở đây $A = Rhc\alpha^2 Z^4/n^3$, α là hằng số cấu trúc tinh tế.

(2) Đối với $l \neq 0$, cùng với ΔE_r còn có số hiệu chính spin-quỹ đạo ΔE_{ls} được thêm vào, do đó

$$\Delta E = \Delta E_r + \Delta E_{ls} = -A\left(\frac{1}{l+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n}\right)$$

$$+A\frac{1}{l\left(l+\frac{1}{2}\right)(l+1)}\cdot\frac{j(j+1)-l(l+1)-s(s+1)}{2}\,.$$

(i) Đối với $l = 1$,

$$\Delta E = \left[\frac{1}{6}j(j+1) - \frac{11}{8}\right]A\,,$$

Như thế đối với

$$j = \frac{5}{2}, \qquad \Delta E = \frac{1}{12}A\,,$$

$$j = \frac{3}{2}, \qquad \Delta E = -\frac{3}{4}A\,,$$

$$j = \frac{1}{2}, \qquad \Delta E = -\frac{5}{4}A\,.$$

(ii) Đối với $l = 2$,

$$\Delta E = \left[\frac{1}{30}j(j+1) - \frac{19}{40}\right]A\,,$$

Như thế đối với

$$j = \frac{7}{2}, \qquad \Delta E = \frac{1}{20}A\,.$$

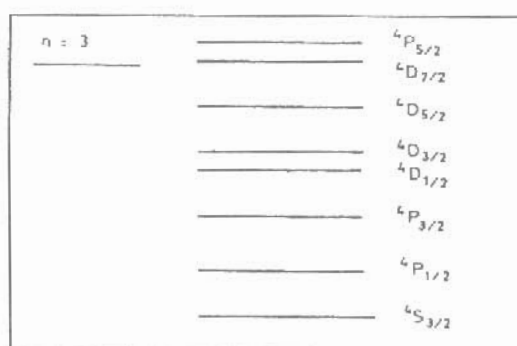
$$j = \frac{5}{2}, \qquad \Delta E = -\frac{11}{60}A\,,$$

$$j = \frac{3}{2}, \qquad \Delta E = -\frac{7}{20}A\,.$$

$$j = \frac{1}{2}, \qquad \Delta E = -\frac{9}{20}A\,.$$

Sơ đồ mức năng lượng đối với $n = 3$ của nguyên tử hydro được chỉ ra ở hình 1.20.

(b) Bảng 1.2 chỉ ra các mức năng lượng của nguyên tử heli một electron (spin electron 1/2 và 3/2).



Hình 1.20

(c) Nếu spin electron là 3/2, thì nguyên tử số Z của hai nguyên tố trơ thứ nhất và thứ hai là 4 và 20.

1068

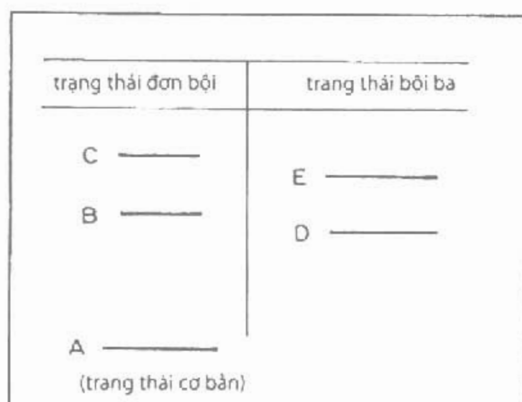
Hình 1.21 chỉ ra trạng thái cơ bản và bốn trạng thái kích thích đầu tiên của nguyên tử heli.

(a) Chỉ ra trên hình vẽ, kí hiệu phổ đầy đủ của mỗi mức.

(b) Hãy chỉ ra, với mũi tên trên hình, các chuyển dời lưỡng cực phát xạ được phép.

		He ($s = 3/2$)	He ($s = 1/2$)
$n_1 = 1$	Spin electron toàn phần	$S = 0, 2$	$S = 0$
$n_2 = 1$ $l = 0$	mức năng lượng	$^1S_0$, $^5S_2$	$^1S_0$
$n_1 = 1$	Spin electron toàn phần	$S = 0, 1, 2, 3$	$S = 0, 1$
$n_2 = 2$ $l_2 = 0, 1$	mức năng lượng	$l_2 = 0$: $^1S_0$, $^3S_1$, $^5S_2$, $^7S_3$ $l_2 = 0$	$^1S_0$, $^3S_1$
$l_2 = 1$	$^1P_1$, $^3P_{2,1,0}$, $^5P_{3,2,1}$	$l_2 = 1$ $^7P_{1,3,2}$	$^1P_1$, $^3P_{2,1,0}$

Bảng 1.2



Hình 1.21

(c) Hãy cho lý do định lượng vì sao mức B thấp hơn mức C về mặt năng lượng.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Các mức năng lượng trong hình 1.21 như sau:

A: 1^1S_0, được tạo bởi $1s^2$,

B: 2^1S_0, được tạo bởi $1s2s$,

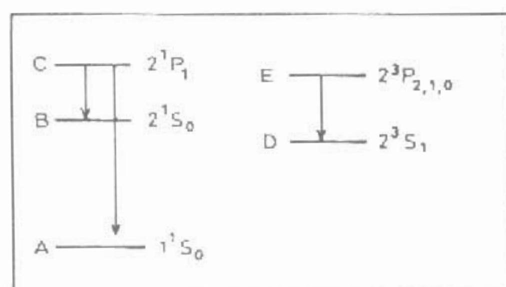
C: 2^1P_1, được tạo bởi $1s2p$,

D: 2^3S_1, được tạo bởi $1s2s$,

E: $2^3P_{2,1,0}$, được tạo bởi $1s2p$.

(b) Các chuyển dời lưỡng cực phát xạ được phép chỉ ra như trên hình 1.22. (Quy tắc chọn lựa $\Delta L = \pm 1$, $\Delta S = 0$)

(c) Ở trạng thái C được tạo bởi $1s2p$, một trong các electron bị kích thích đến quỹ đạo $2p$ có mức năng lượng cao hơn mức năng lượng của quỹ đạo $2s$. Nguyên nhân chủ yếu là do hiệu ứng che chắn điện tích hạt nhân do quỹ đạo p mạnh hơn.



Hình 1.22

1069

Hình 1.23 chỉ mức cơ bản và tập hợp các trạng thái kích thích $n = 2$ của nguyên tử heli. Hãy vẽ lại sơ đồ trong trả lời của bạn cho biết

(a) các kí hiệu phổ cho cả 5 mức,

(b) một lời giải thích nguồn gốc của ΔE_1,

(c) một lời giải thích nguồn gốc của ΔE_2,

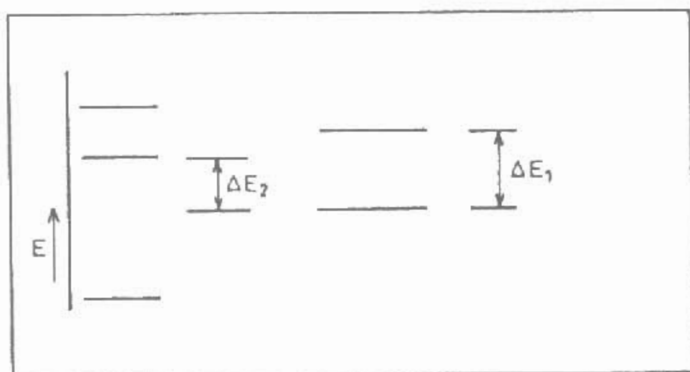
(d) hãy chỉ ra các mức chuyển dời quang cho phép trong số năm mức đó.

(Wisconsin)

Lời giải:

(a) Xem **Bài tập 1068(a)**.

(b) ΔE_1 là hiệu số năng lượng giữa các cấu hình điện tử khác nhau với cùng S. Các trạng thái ^3P thuộc về cấu hình của $1s2p$, có một electron ở quỹ đạo $1s$ và một electron khác ở quỹ đạo $2p$. Quỹ đạo sau có năng lượng cao hơn



Hình 1.23

do hiệu ứng che chắn điện tích hạt nhân do electron quỹ đạo p mạnh hơn.

(c) ΔE_2 là hiệu số năng lượng giữa các mức với L như nhau trong cùng cấu hình điện tử nhưng với S khác nhau. Nguồn gốc của chúng do năng lượng trao đổi Coulomb.

(d) Xem **Bài tập 1068(b)**.

1070

Hình 1.24 là một sơ đồ mức năng lượng đối với trạng thái cơ bản và bốn trạng thái kích thích đầu tiên của nguyên tử heli.

(a) Trên một bản sao của hình vẽ, hãy chỉ ra các kí hiệu quang phổ đối với mỗi mức.

(b) Liệt kê các chuyển dời lưỡng cực điện cho phép có thể.

(c) Liệt kê các chuyển dời giữa các mức có thể đối với quá trình 2-photon được phép (lưỡng cực điện hai photon).

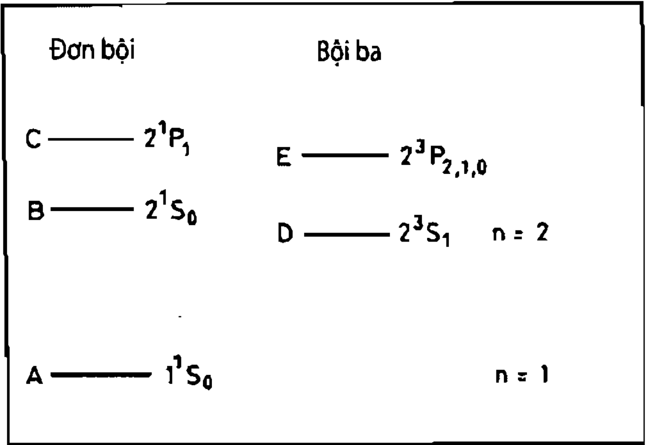
(d) Cho rằng các electron có năng lượng đủ lớn, với những mức nào có thể bị chiếm do kết quả va chạm của các electron với trạng thái cơ bản của nguyên tử?

(Wisconsin)

Lời giải:

(a) (b) Xem **Bài tập 1068**.

(c) Quy tắc lựa chọn cho quá trình hai photon là



Hình 1.24

(1) Sự bảo toàn tính chẵn lẻ,

(2) $\Delta J = 0, \pm 2$.

Một cách tương ứng quá trình hai photon là

$$(1s2s)^1S_0 \to (1s^2)^1S_0\,.$$

Sự chuyển dời từ $(1s2s)^3S$ đến $(1s^2)^1S_0$ là có thể thông qua quá trình hai photon với tốc độ $10^{-8} \sim 10^{-9}$ s^{-1}. Tuy nhiên, điều đó chỉ ra rằng sự chuyển dời $2^3S_1 \to 1^1S_0$ có thể xảy ra với tốc độ $\sim 10^{-4}$ s thông qua bức xạ lưỡng cực từ, có thể quy cho một số hiệu chính tương đối tính của toán tử lưỡng cực từ liên quan tới spin, không cần thỏa mãn điều kiện $\Delta S = 0$.

(d) Các trạng thái $(1s2s)^1S_0$ và $(1s2s)^3S_1$ là nửa bền. Do đó, bên cạnh trạng thái cơ bản, hai mức này có thể bị chiếm bởi nhiều electron do electron va chạm với trạng thái cơ bản của nguyên tử.

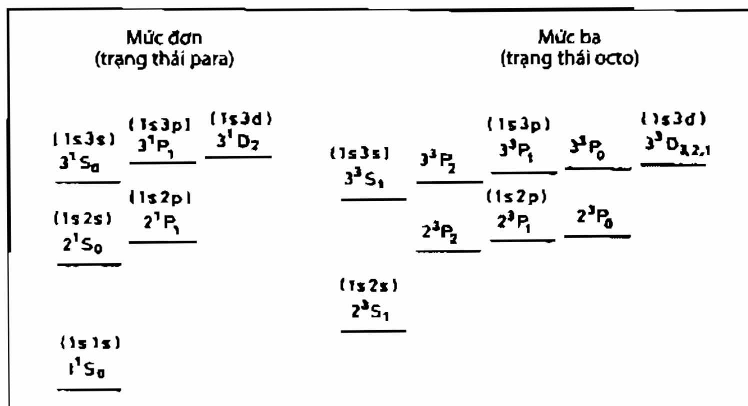
1071

Hãy vẽ phác mức năng lượng thấp của nguyên tử heli. Hãy chỉ ra cấu hình nguyên tử và cho biết kí hiệu phổ cho những mức này. Hãy chỉ ra một vài chuyển dời được phép trong phát xạ, một vài chuyển dời được phép trong hấp

thụ, và một vài chuyển dời bị cấm. (*Wisconsin*)

Lời giải:

Các mức năng lượng của He được chỉ ra trên hình 1.25.



Hình 1.25

Theo quy tắc chọn lựa $\Delta S = 0$, $\Delta L = \pm 1$, $\Delta J = 0, \pm 1$ (ngoại trừ $0 \to 0$), các chuyển dời được phép là: $3^1S_0 \to 2^1P_1$, $3^3S_1 \to 2^3P_{2,1,0}$, $2^1P_1 \to 1^1S_0$, $2^1P_1 \to 2^1S_0$, $3^3D_1 \to 3^3P_0$, $3^3D_{2,1} \to 3^3P_1$, $3^3D_{3,2,1} \to 3^3P_2$, $3^1D_2 \to 3^1P_1$, $3^1D_2 \to 2^1P_1$, $3^3D_1 \to 2^3P_{1,0}$, $3^3D_{3,2,1} \to 2^3P_2$, $3^3P_{2,1,0} \to 2^3S_1$. Quá trình ngược của các quá trình trên là những quá trình được phép. Các chuyển dời giữa các trạng thái đơn và bội ba ($\Delta S \neq 0$) là bị cấm, ví dụ $2^3S_1 \to 1^1S_0$, $2^1P_1 \to 2^3S_1$.

1072

Vẽ sơ đồ mức năng lượng đối với nguyên tử heli ở cấu hình $1s3d$, có kể đến tương tác Coulomb và liên kết spin-quỹ đạo. (*UC, Berkeley*)

Lời giải:

Xem **Bài tập 1100**.

1073

Đối với nguyên tử heli, những trạng thái phổ được quan tâm duy nhất là

những trạng thái có ít nhất một electron ở trạng thái cơ bản. Nó có thể được xây dựng từ các quỹ đạo trực chuẩn với dạng

$$\Psi_{\pm}(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\Phi_{1s}(1)\Phi_{nlm}(2) \pm \Phi_{nlm}(1)\Phi_{1s}(2)] \times \text{hàm sóng spin} .$$

Các trạng thái para ứng với dấu + và các trạng thái octo ứng với dấu −.

(a) Hãy xác định với trạng thái nào, octo hay para có năng lượng thấp nhất (tức có giá trị âm nhất).

(b) Trình bày một luận cứ chỉ ra rằng đối với giá trị n lớn thì hiệu số năng lượng giữa các trạng thái octo và para sẽ trở nên nhỏ đi.

(SUNY, Buffalo)

Lời giải:

(a) Đối với electron tương tự femion hàm sóng toàn phần của một hệ phải phản đối xứng.

Nếu cả hai electron của một nguyên tử heli ở quỹ đạo $1s$, nguyên lý Pauli đòi hỏi spin của chúng phải đối song, tức là, hàm spin toàn phần phải phản đối xứng. Khi đó, hàm sóng không gian phải đối xứng và trạng thái là para 1^1S_0.

Nếu chỉ có một electron ở quỹ đạo $1s$, và electron khác ở trạng thái - lmn, ở đây $n \neq 1$, spin của chúng có thể hoặc song song hay đối song và hàm sóng không gian một cách tương ứng là,

$$\Psi_{\mp} = \frac{1}{\sqrt{2}}[\Phi_{1s}(1)\Phi_{nlm}(2) \mp \Phi_{nlm}(1)\Phi_{1s}(2)] .$$

Bỏ qua tương tác từ, xem chỉ có lực đẩy Coulomb giữa các electron và xem như nhiễu loạn $H' = e^2/r_{12}$, r_{12} là khoảng cách giữa các electron. Hiệu chính năng lượng sẽ là

$$\begin{aligned} W'_{\pm} =& \frac{1}{2}\iint [\Phi^*_{1s}(1)\Phi^*_{nlm}(2) \mp \Phi^*_{nlm}(1)\Phi^*_{1s}(2)] \\ & \times \frac{e^2}{r_{12}}[\Phi_{1s}(1)\Phi_{nlm}(2) \mp \Phi_{nlm}(1)\Phi_{1s}(2)]d\tau_1 d\tau_2 \\ =& J \mp K \end{aligned}$$

với

$$J = \iint \frac{e^2}{r_{12}} |\Phi_{1s}(1)\Phi_{nlm}(2)|^2 d\tau_1 d\tau_2 ,$$

$$K = \iint \frac{e^2}{r_{12}} \Phi^*_{1s}(1)\Phi_{nlm}(1)\Phi^*_{nlm}(2)\Phi_{1s}(2) d\tau_1 d\tau_2 .$$

Từ đó, trạng thái octo (dấu - trên đây) có năng lượng hiệu chính thấp nhất. Như thế heli-para có trạng thái cơ bản 1^1S_0 và heli-octo có trạng thái cơ bản 2^3S_1, có mức năng lượng thấp hơn trạng thái 2^1S_0 của heli-para (xem hình 1.25).

(b) Khi n tăng thì khoảng cách trung bình r_{12} giữa các electron cũng tăng. Điều này có nghĩa là hiệu số năng lượng 2K giữa trạng thái para và octo của cùng cấu hình electron sẽ giảm khi n tăng.

1074

(a) Vẽ và giải thích định lượng sơ đồ năng lượng đối với các mức $n = 1$ và $n = 2$ của heli trong gần đúng không tương đối tính.

(b) Vẽ và thảo luận sơ đồ tương tự của hydro bao gồm tất cả sự tách năng lượng thực tế tồn tại.

(*CUSPEA*)

Lời giải:

(a) Ở mức năng lượng thấp nhất của heli ($n = 1$), cả hai electron là ở trạng thái thấp nhất $1s$. Nguyên lý Pauli đòi hỏi các electron phải là spin đối song, do đó mức $n = 1$ là mức đơn. Tính đến năng lượng đẩy giữa các electron, e^2/r_{12}, năng lượng trạng thái cơ bản sẽ cao hơn $2Z^2E_0 = 8E_0$, ở đây $E_0 = -\frac{me^4}{2\hbar^2} = -13,6$ eV là năng lượng trạng thái cơ bản của nguyên tử hydro.

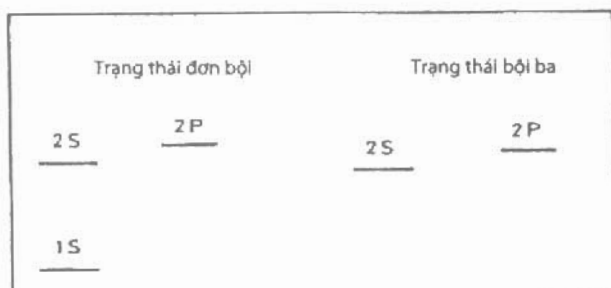
Ở mức $n = 2$, một electron ở trạng thái $1s$ trong khi electron khác ở trạng thái cao hơn. Hai electron có thể có spin song song hay đối song (trạng thái đơn hay trạng thái bội ba). Do xác suất đối với các electron đến gần nhau lớn hơn đối với trường hợp đầu, năng lượng đẩy Coulomb của trường hợp đó giữa các electron, e^2/r_{12}, cũng lớn hơn. Do đó, nói chung một trạng thái đơn có năng lượng cao hơn trạng thái bội ba tương ứng (hình 1.26).

(b) Các mức năng lượng của nguyên tử hydro đối với $n = 1$ và $n = 2$ được chỉ trên hình 1.27. Nếu ta xem rằng chỉ tương tác Coulomb giữa hạt nhân và

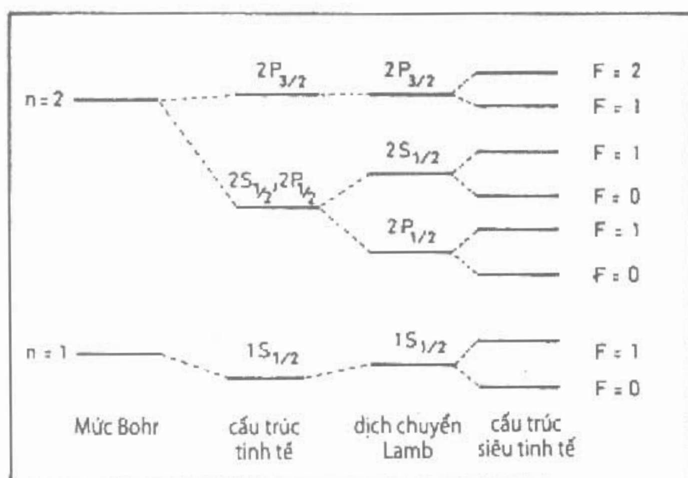
electron, các mức năng lượng (Bohr) được cho bởi

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2 n^2},$$

là một hàm số của n duy nhất. Nếu hiệu ứng tương đối tính và spin-quỹ đạo của electron, mức $n = 2$ tách ra hai mức với bề rộng $\approx \alpha^2 E_2$, ở đây α là hằng số cấu trúc tinh tế.



Hình 1.26



Hình 1.27

Nếu ta tiếp tục xem rằng sự tương tác giữa electron và từ trường của chính nó và sự phân cực chân không, độ dịch chuyển Lamb gây ra sự tách của các trạng thái suy biến $2S_{1/2}$ và $2P_{1/2}$, sự tách vạch vào bậc $m_e c^2 \alpha^5$.

Thêm nữa, các mức năng lượng được tiếp tục tách thêm nếu tính đến tương tác giữa spin và chuyển động quỹ đạo của electron và momen từ hạt nhân, tạo nên cấu trúc siêu tinh tế với bề rộng vào khoảng 1/10 của độ dịch chuyển Lamb đối với cùng chỉ số n.

1075

(a) Cấu hình $1s2s$ của nguyên tử heli có hai thành phần $^3S_1$ và $^1S_0$ nằm khoảng 20 eV phía trên trạng thái cơ bản. Giải thích ý nghĩa của các kí hiệu phổ. Đồng thời cho biết nguyên nhân của sự tách năng lượng của hai thành phần trên và ước lượng độ lớn của sự tách vạch.

(b) Liệt kê các cấu hình cơ bản và mức năng lượng thấp nhất của các nguyên tử sau: He, Li, Be, B, C, N, O, F và A.

Các số có thể có ích

$a_B = 0,529\times10^{-8}$ cm, $\mu_B = 9,27\times10^{-21}$ ec/gaoxơ, $e = 4,8\times10^{-10}$ đv CGSE.

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Kí hiệu phổ chỉ ra trạng thái của nguyên tử. Ví dụ ở kí hiệu $^3S_1$, chỉ số trên 3 cho biết trạng thái bội ba ($3 = 2S + 1$), chỉ số dưới 1 là số lượng tử momen động lượng toàn phần của nguyên tử ($J = S + L = 1$, S kí hiệu trạng thái lượng tử tương ứng với số lượng tử momen động lượng quỹ đạo $L = 0$ (S cho $L = 0$, P cho $L = 1$, D cho $L = 2$, v.v).

Sự tách mức năng lượng của trạng thái $^1S_0$ và $^3S_1$ xuất phát từ sự khác nhau ở năng lượng tương tác Coulomb giữa các electron do các trạng thái spin khác nhau của chúng. Ở cấu hình $1s2s$, các electron có thể có spin song song hay đối song, tạo thành các trạng thái đơn và bội ba của heli, năng lượng gần đúng của chúng có thể nhận được bằng phép tính nhiễu loạn là (**Bài tập 1073**)

$$E(\text{đơn bội}) = -\frac{Z^2e^2}{2a_0}\left(1+\frac{1}{2^2}\right) + J + K\,,$$

$$E(\text{bội ba}) = -\frac{Z^2e^2}{2a_0}\left(1+\frac{1}{2^2}\right) + J - K\,,$$

ở đây J là năng lượng Coulomb trung bình giữa các đám mây electron, K là

năng lương trao đổi. Sự tách năng lượng là

$$\Delta E = 2K$$

với

$$K = e^2 \iint d^3x_1 d^3x_2 \frac{1}{r_{12}} \Psi^*_{100}(r_1)\Psi_{200}(r_1)\Psi_{100}(r_2)\Psi^*_{200}(r_2)$$
$$= \frac{4Z^6e^2}{a_0^6}\left[\int_0^\infty r_1^2\left(1-\frac{Zr_1}{2a_0}\right)\exp\left(-\frac{3Zr_1}{2a_0}\right)dr_1\right]^2$$
$$\approx \frac{2^4 Ze^2}{3^6 a_0}.$$

Như vậy

$$K = \frac{2^5e^2}{3^6a_0} = \frac{2^5}{3^6}\frac{me^4}{\hbar^2} = \frac{2^5}{3^6}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2 mc^2$$
$$= \frac{2^5}{3^6}\left(\frac{1}{137}\right)^2 \times 0,511 \times 10^6 = 1,2\ \text{eV},$$

và $\Delta E \approx 2$ eV.

(b)

Nguyên tử	Cấu hình trạng thái cơ bản	Số hạng phổ năng lượng thấp nhất
He	$1s^2$	$^1S_0$
Li	$1s^22s^1$	$^2S_{1/2}$
Be	$1s^22s^2$	$^1S_0$
B	$1s^22s^22p^1$	$^2P_{1/2}$
C	$1s^22s^22p^2$	$^3P_0$
N	$1s^22s^22p^3$	$^4S_{3/2}$
O	$1s^22s^22p^4$	$^3P_2$
F	$1s^22s^22p^5$	$^2P_{3/2}$
A	$1s^22s^22p^63s^23p^6$	$^1S_0$

1076

Hãy sử dụng phương pháp biến phân, phương pháp nhiễu loạn, các quy tắc tổng, và/hoặc phương pháp khác để có các ước lượng thô sơ các tính chất

sau của nguyên tử heli:

(a) năng lượng nhỏ nhất đòi hỏi để tách cả hai electron ra khỏi nguyên tử từ trạng thái cơ bản,

(b) năng lượng nhỏ nhất đòi hỏi để tách một electron ra khỏi nguyên tử từ trạng thái thấp nhất F của nó ($L = 3$) và

(c) độ phân cực điện của nguyên tử ở trạng thái cơ bản của nó. (Trạng thái đơn bội thấp nhất P khoảng ~ 21 eV phía trên trạng thái cơ bản).

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Trong *phương pháp nhiễu loạn*, hàm Hamintonian của nguyên tử heli được viết là

$$H = \frac{p_1^2}{2m_e} + \frac{p_2^2}{2m_e} - \frac{2e^2}{r_1} - \frac{2e^2}{r_2} + \frac{e^2}{r_{12}} = H_0 + \frac{e^2}{r_{12}},$$

ở đây

$$H_0 = \frac{p_1^2}{2m_e} + \frac{p_2^2}{2m_e} - \frac{2e^2}{r_1} - \frac{2e^2}{r_2}$$

được xem là hàm Hamintonian không nhiễu loạn, và thế do sự đẩy Coulomb giữa các electron được xem là nhiễu loạn. Hàm sóng gần đúng bậc zero là

$$\psi = \psi_{100}(r_1)\psi_{100}(r_2),$$

trong đó

$$\psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2}{a}\right)^{3/2} e^{-2r/a},$$

a là bán kính Bohr. Trạng thái cơ bản bậc zero (không nhiễu loạn) là

$$E^{(0)} = 2\left(-\frac{2^2e^2}{2a}\right) = -\frac{4e^2}{a},$$

ở đây hệ số 2 là cho hai electron $1s$. Hiệu chính năng lượng ở nhiễu loạn bậc nhất là

$$E^{(1)} = \int |\psi_{100}|^2 \frac{e^2}{r_{12}} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 = \frac{5e^2}{4a}.$$

Từ đó, năng lượng của trạng thái cơ bản được hiệu chính là

$$E = -\frac{4e^2}{a} + \frac{5e^2}{4a} = -\frac{11}{2}\cdot\frac{e^2}{2a} = -\frac{11}{2}\times 13,6 = -74,8 \text{ eV},$$

và năng lượng ion hóa nguyên tử heli ở trạng thái cơ bản, tức là năng lượng đòi hỏi để tách cả hai electron khỏi nguyên tử là

$$E_I = -E = 74,8 \text{ eV}.$$

Trong *phương pháp biến phân*, lấy một hàm sóng thử như là

$$\psi = \frac{\lambda^3}{\pi a^3} e^{-\lambda(r_1+r_2)/a}.$$

Sau đó ta tính toán

$$\langle H \rangle = \iint \psi^* \left(-\frac{\hbar^2}{2m_e}\nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_e}\nabla_2^2 - \frac{2e^2}{r_1} - \frac{2e^2}{r_2} + \frac{e^2}{r_{12}} \right) \psi d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2$$
$$= \left(2\lambda^2 - \frac{27}{4}\lambda \right) E_H,$$

ở đây

$$E_H = \frac{e^2}{2a} = 13,6 \text{ eV}.$$

Cực tiểu $\langle H \rangle$ bằng cách lấy đạo hàm

$$\frac{\partial \langle H \rangle}{\partial \lambda} = 0,$$

ta tìm được $\lambda = \frac{27}{16}$ và như vậy

$$\langle H \rangle = \frac{27}{16}\left(\frac{27}{8} - \frac{27}{4} \right) E_H = -77,5 \text{ eV}.$$

Năng lượng ion hóa do đó là $E_I = -\langle H \rangle = 77,5$ eV, phù hợp khá tốt với cách tính toán nhiễu loạn.

(b) Ở trạng thái F thấp nhất, electron trên quỹ đạo $l = 3$ quá xa đối với hạt nhân do đó hạt nhân cùng với electron ở trạng thái $1s$ có thể xem như là một lõi có điện tích $+e$. Như vậy, nguyên tử bị kích thích có thể xem như một nguyên tử hydro ở trạng thái $n = 4$. Năng lượng ion hóa E_I, tức là, năng lượng đòi hỏi để tách một electron khỏi nguyên tử, là

$$E_I = -E = \frac{Ze^2}{2a4^2} = \frac{1}{16}\left(\frac{e^2}{2a} \right) = \frac{13,6}{16} = 0,85 \text{ eV}.$$

(c) Cho một nhiễu loạn u. Hàm sóng và năng lượng đối với trạng thái cơ bản, hiệu chính bậc nhất, là

$$\Psi = \Psi_0 + \sum_{n\neq 0} \frac{u_{n0}}{E_0 - E_n}\Psi_n\,, \qquad E = E_0 + u_{00} + \sum_{n\neq 0}\frac{(u_{n0})^2}{E_0 - E_n}\,,$$

ở đây Ψ_0, E_n là hàm sóng và năng lượng không nhiễu loạn, và $u_{n0} \equiv \langle 0|u|n\rangle$. Ta viết lại

$$\sum_{n\neq 0} u_{n0}\Psi_n = \sum_{n=0} u_{n0}\psi_n - u_{00}\psi_0 = u\psi_0 - u_{00}\psi_0\,,$$

với $u\psi_0 = \sum_{n=0} u_{n0}\psi_n$. Khi đó

$$\Psi \approx \Psi_0\left(1 + \frac{u - u_{00}}{E'}\right)\,,$$

E' là trung bình của $E_0 - E_n$.

Động năng toàn phần trung bình của electron được tính toán bằng phương pháp biến phân với $\psi = (1+\lambda u)\psi_0$ như hàm thử

$$\langle T\rangle = \frac{\int \Psi_0^*(1+\lambda u)\hat{T}\Psi_0(1+\lambda u)d\mathbf{r}}{\int \Psi_0^*\Psi_0(1+\lambda u)^2 d\mathbf{r}}\,,$$

ở đây

$$\hat{T} = \frac{1}{2m_e}(p_1^2 + p_2^2) = -\frac{\hbar^2}{2m_e}(\nabla_1^2 + \nabla_2^2)\,.$$

hay với đơn vị nguyên tử ($a_0 = \hbar = e = 1$),

$$\hat{T} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\nabla_i^2\,.$$

Như vậy

$$\begin{aligned}\hat{T} \propto & -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{2}\int\{\Psi_0^*(1+\lambda u)\nabla_i^2(1+\lambda u)\Psi_0 + \Psi_0(1+\lambda u) \\ & \times \nabla_i^2(1+\lambda u)\Psi_0^*\}d\mathbf{r} \\ = & -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{2}\int\{\Psi_0^*(1+\lambda u)^2\nabla_i^2\Psi_0 + \Psi_0(1+\lambda u)^2\nabla_i^2\Psi_0^* \\ & + 2\lambda\Psi_0\Psi_0^*(1+\lambda u)\nabla_i^2 u + 2\lambda(1+\lambda u)\nabla_i(\Psi_0\Psi_0^*)\cdot\nabla_i u\}d\mathbf{r}\,.\end{aligned}$$

Cho rằng

$$\sum_i \int \nabla_i \cdot [\psi_0\psi_0^*(1+\lambda u)\nabla_i u] d\mathbf{r} = \oint_S \psi_0\psi_0^*(1+\lambda u)\sum_i \nabla_i u \cdot d\mathbf{S} = 0$$

theo đặc trưng của lý thuyết phân kì Gauss và thực tế là $-\nabla_i u$ biểu diễn sự đẩy lẫn nhau giữa các electron. Bởi vì

$$\nabla_i \cdot [\Psi_0\Psi_0^*(1+\lambda u)\nabla_i u] = \Psi_0\Psi_0^*(1+\lambda u)\nabla_i^2 u + (1+\lambda u)\nabla_i(\Psi_0\Psi_0^*)\cdot\nabla_i u + \lambda\Psi_0\Psi_0^*\nabla_i u\cdot\nabla_i u\,,$$

ta có thể viết

$$\int \{\Psi_0\Psi_0^*(1+\lambda u)\nabla_i^2 u + (1+\lambda u)\nabla_i(\Psi_0\Psi_0^*)\cdot\nabla_i u\} d\mathbf{r} = -\lambda\int \Psi_0\Psi_0^*\nabla_i u\cdot\nabla_i u d\mathbf{r}\,.$$

Từ đó

$$\langle T\rangle \propto \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{2}\int[\Psi_0^*(1+\lambda u)^2\nabla_i^2\Psi_0 + \Psi_0(1+\lambda u)^2\nabla_i^2\Psi_0^*]d\mathbf{r} + \frac{\lambda^2}{2}\sum_{i=1}^{2}\int \Psi_0\Psi_0^*\nabla_i u\cdot\nabla_i u d\mathbf{r}\,.$$

Năng lượng toàn phần E có thể tìm được một cách tương tự bằng cách xem Hamintonian toàn phần

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{T} + u\,.$$

Do $\hat{H}$ và $(1+\lambda u)$ giao hoán, ta có

$$\langle H\rangle = \frac{\frac{1}{2}\int(1+\lambda u)^2(\Psi_0^*\hat{H}\Psi_0 + \Psi_0\hat{H}\Psi_0^*)d\mathbf{r} + \frac{\lambda^2}{2}\sum_{i=1}^{2}\int\Psi_0^*\Psi_0\nabla_i u\cdot\nabla_i u d\mathbf{r}}{\int\Psi_0^*\Psi_0(1+\lambda u)^2 d\mathbf{r}}$$

$$= E_0 + \frac{\frac{1}{2}\int\Psi_0^* u(1+\lambda u)^2\Psi_0 d\mathbf{r} + \frac{\lambda^2}{2}\sum_{i=1}^{2}\int\Psi_0^*\Psi_0\nabla_i u\cdot\nabla_i u d\mathbf{r}}{\int\Psi_0^*\Psi_0(1+\lambda u)^2 d\mathbf{r}}$$

$$= E_0 + \frac{(u)_{00} + 2\lambda(u^2)_{00} + \lambda^2(u^3)_{00} + \frac{1}{2}\lambda^2 \sum_{i=1}^{2} \int [\nabla_i u \cdot \nabla_i u]_{00} d\mathbf{r}}{1 + 2\lambda(u)_{00} + \lambda^2(u^2)_{00}},$$

ở đây E_0 được cho bởi $\hat{H}\psi_0 = E_0\psi_0$, $(u)_{00} = \int \Psi_0^* u \Psi_0 d\mathbf{r}$, $(u^2)_{00} = \int \Psi_0^* u^2 \Psi_0 d\mathbf{r}$, v.v. Bỏ qua các số hạng bậc ba và cao hơn ta có hiệu chính năng lượng là

$$\Delta E \approx (u)_{00} + 2\lambda(u^2)_{00} - 2\lambda(u)_{00}^2 + \frac{1}{2}\lambda^2 \sum_{i=1}^{2} [(\nabla_i u) \cdot (\nabla_i u)]_{00} .$$

Lấy cực tiểu ΔE bằng cách đặt

$$\frac{d\Delta E}{d\lambda} = 0 ,$$

ta có

$$2(u^2)_{00} - 2(u)_{00}^2 + \lambda \sum_{i=1}^{2} [(\nabla_i u) \cdot (\nabla_i u)]_{00} = 0 ,$$

hay

$$\lambda = \frac{2[(u)_{00}^2 - (u^2)_{00}]}{\sum_{i=1}^{2} [\nabla_i u \cdot \nabla_i u]_{00}} .$$

Điều này cho ta

$$\Delta E = (u)_{00} - \frac{2[(u)_{00}^2 - (u^2)_{00}]^2}{\sum_{i=1}^{2} [\nabla_i u \cdot \nabla_i u]_{00}} .$$

Xem một nguyên tử He ở trong điện trường có cường độ ε có hướng được lấy theo hướng trục z. Khi đó

$$u = -\varepsilon(z_1 + z_2) \equiv -\varepsilon z .$$

Do phần tử ma trận $(u)_{00}$ bằng không đối với nguyên tử đối xứng cầu, ta có

$$\Delta E \approx -\frac{2[(z^2)_{00}]^2 \varepsilon^4}{2\varepsilon^2} = -[(z^2)_{00}]^2 \varepsilon^2 .$$

Hiệu chính năng lượng liên quan với điện trường bởi biểu thức

$$\Delta E = -\frac{1}{2}\alpha\varepsilon^2 ,$$

ở đây α là độ phân cực. Từ đó

$$\alpha = 2[(z^2)_{00}]^2 = 2\langle(z_1 + z_2)^2\rangle^2 .$$

Do $\langle z_1^2\rangle = \langle z_2^2\rangle \approx a'^2 = \frac{a_0^2}{Z^2}$, $\langle z_1 z_2\rangle = 0$, ở đây a_0 là bán kính Bohr, sử dụng $Z = 2$ cho He ta có

$$\alpha = \frac{8\hbar^2}{e^2 m_e}\frac{a_0^4}{2^4} \approx \frac{1}{2}a_0^3$$

theo đơn vị thông thường. Nếu giá trị tối ưu $Z = \frac{27}{16}$ từ (a) được sử dụng thì

$$\alpha = 8\left(\frac{16}{27}\right)^4 a_0^3 = 0,98a_0^3 .$$

1077

Hãy trả lời mỗi câu hỏi sau với những phát biểu ngắn gọn và ở những chỗ có thể bằng số liệu. Đưa ra lý giải của bạn.

(a) Một chùm nguyên tử trung hòa đi qua một thiết bị Stern-Gerlach. Năm vạch cách đều được quan sát. Momen động lượng toàn phần của nguyên tử là bao nhiêu?

(b) Momen từ của một nguyên tử ở trạng thái $^3P_0$ là bao nhiêu? (bỏ qua ảnh hưởng hạt nhân)

(c) Vì sao khí hiếm trơ về mặt hóa học?

(d) Ước lượng mật độ năng lượng của vật đen tuyệt đối ở trong phòng này theo ec/cm^3. Giả sử tường đen tuyệt đối.

(e) Trong một khí hydro bị ion hóa cả hai vạch phổ tương ứng với sự chuyển dời $2^2P_{1/2} \to 1^2S_{1/2}$ và $2^2P_{3/2} \to 1^2S_{1/2}$ được quan sát. Hãy ước lượng tỉ số cường độ của chúng.

(f) Nguyên nhân của sự tồn tại của hai sơ đồ mức năng lượng độc lập, hệ đơn và bội ba trong nguyên tử heli là gì?

(Chicago)

Lời giải:

(a) Momen động lượng toàn phần của một nguyên tử là

$$P_J = \sqrt{J(J+1)}\hbar .$$

Do chùm nguyên tử trung hòa tách ra thành năm vạch, ta có $2J + 1 = 5$ hay $J = 2$. Từ đó

$$P_J = \sqrt{6}\hbar\,.$$

(b) Trạng thái có số lượng tử momen động lượng toàn phần $J = 0$. Do đó, momen từ của nó là $M = g\mu_B\sqrt{J(J+1)} = 0$.

(c) Các electron của khí hiếm tất cả nằm trong cùng một vỏ đầy đủ, không thể nhận thêm electron từ nguyên tử khác để tạo nên liên kết hóa học nữa. Do đó, khí hiếm trơ về mặt hóa học.

(d) Mật độ năng lượng của vật đen tuyệt đối là $u = 4J_u/c$, ở đây J_u là năng suất phát xạ toàn phần cho bởi định luật Stefan-Boltzmann

$$J_u = \sigma T^4\,,$$

$$\sigma = 5,669 \times 10^{-5}\ \text{ec cm}^{-2}\text{K}^{-4}\text{s}^{-1}\,.$$

Ở nhiệt độ phòng, $T = 300$ K, và

$$u = \frac{4}{3 \times 10^{10}} \times 5,669 \times 10^{-5} \times 300^4$$

$$= 6,12 \times 10^{-5}\ \text{ec} \cdot \text{cm}^{-3}\,.$$

(e) Sự suy biến của trạng thái $2^2P_{1/2}$ và $2^2P_{3/2}$ là 2 và 4 tương ứng, trong khi hiệu số năng lượng giữa các mức của chúng và $1^2S_{1/2}$ gần như nhau. Do đó, tỉ số của cường độ của các vạch phổ $(2^2P_{1/2} \to 1^2S_{1/2})$ tới $(2^2P_{3/2} \to 1^2S_{1/2})$ là 1:2.

(f) Liên kết LS giữa hai electron của heli tạo ra các trạng thái $S = 0$ (đơn) và $S = 1$(bội ba). Do sự chuyển dời giữa chúng là bị cấm, phổ của nguyên tử heli bao gồm hai hệ độc lập (đơn và bội ba).

1078

(a) Hãy tạo ra một bảng các trạng thái cơ bản của nguyên tử cho các nguyên tố sau: H, He, Be, B, C, N, chỉ ra các trạng thái của kí hiệu phổ. Hãy chỉ ra J cho trạng thái S .

(b) Quy tắc trạng thái Hund và cho biết cơ sở vật lý của nó.

(Wisconsin)

Lời giải:

(a) Trang thái cơ bản nguyên tử của các nguyên tố như sau:

nguyên tố :	H	He	Li	Be	B	C	N
trạng thái cơ bản:	$^2S_{1/2}$	$^1S_0$	$^2S_{1/2}$	$^1S_0$	$^2P_{1/2}$	$^3P_0$	$^4S_{3/2}$

(b) Đối với phát biểu của quy tắc Hund xem **Bài tập 1008**. Quy tắc Hund là các quy tắc kinh nghiệm dựa trên nhiều kết quả thực nghiệm và kết quả là sự áp dụng của chúng cũng bị hạn chế. Thứ nhất, chúng chỉ dựa vào việc xác định các trạng thái năng lượng thấp nhất của nguyên tử, ngoại trừ các nguyên tố rất nặng. Các quy tắc này sai trong nhiều trường hợp khi được sử dụng để xác định bậc của mức năng lượng. Ví dụ, đối với cấu hình electron $1s^22s2p^3$ của cácbon, thứ tự các mức năng lượng nhận được từ thực nghiệm là $^5S <^3 D <^1 D <^3 S <^1 P$. Mặc dù hình như ^3S là một trạng thái bội kép cao hơn, năng lượng của nó cao hơn năng lượng của ^1D. Đối với các trạng thái kích thích cao hơn, quy tắc cũng có thể không đúng. Ví dụ, khi một trong các electron của nguyên tử Mg bị kích thích lên trạng thái quỹ đạo d năng lượng của trạng thái ^1D thấp hơn của trạng thái ^3D.

Quy tắc Hund có thể hiểu một phần nào đó như sau. Nếu tính đến nguyên lý loại trừ Pauli, các electron tương đương spin song song có xu hướng tránh nhau, với kết quả là năng lượng đẩy Coulomb của chúng, có giá trị dương, có khuynh hướng nhỏ hơn. Do đó, năng lượng của các trạng thái với spin song song hoàn toàn (có giá trị S lớn nhất) sẽ nhỏ nhất. Tuy nhiên sự phát biểu về trạng thái của momen động lượng cực đại không thể giải thích được một cách dễ dàng.

1079

(a) Những mức nào xuất hiện từ cấu hình điện tử $2p3p$ trong một nguyên tử Russell-Saunders có liên kết LS? Vẽ cấu trúc mức, chỉ ra một cách sơ bộ sự tách vạch, và đánh dấu ảnh hưởng gây ra sự tách vạch.

(b) Các quy tắc lựa chọn cho chuyển dời lưỡng cực điện cho các mức này như thế nào?

(c) Có thể tạo ra từ trạng thái $^3P_1$ các sự chuyển dời lưỡng cực điện tới những mức bị cấm nào của bạn?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Các vạch phổ xuất hiện từ cấu hình $2p3p$ trong cặp LS có thể nhận

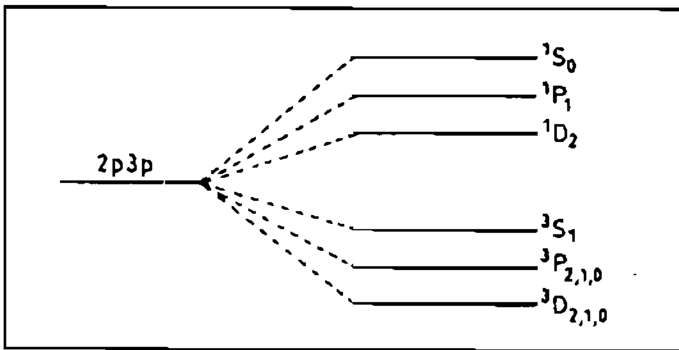
được như sau.

Do $l_1 = l_2 = 1$, $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}$, $\mathbf{L} = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2$, $\mathbf{S} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$, $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$, ta có thể có $S = 1, 0$, $L = 2, 1, 0$, $J = 3, 2, 1, 0$.

Đối với $S = 0$, $L = 2$, $J = 2$: $^1D_2$, $L = 1$, $J = 1$: $^1P_1$, $L = 0$, $J = 0$: $^1S_0$. Đối với $S = 1$, $L = 2$, $J = 3, 2, 1, 0$: $^3D_{3,2,1}$, $L = 1$, $J = 2, 1, 0$: $^3P_{2,1,0}$, $L = 0$, $J = 1$: $^3S_1$. Do đó, các vạch sẽ là

$$\text{vạch đơn: } {}^1S_0, \quad {}^1P_1, \quad {}^1D_2$$
$$\text{vạch bội ba: } {}^3S_1, \quad {}^3P_{2,1,0}, \quad {}^3D_{3,2,1}$$

Các mức năng lượng được chỉ ra trên hình 1.28



Hình 1.28

Sự tách các vạch phổ với S khác nhau được gây ra bởi năng lượng trao đổi Coulomb. Sự tách của các vạch của cùng S như nhau nhưng L khác nhau gây ra bởi năng lượng đẩy Coulomb. Sự tách của các vạch của cùng L, S như nhau nhưng có J khác nhau gây bởi sự cặp đôi của momen động lượng và spin, tức là tương tác từ.

(b) Các quy tắc của chuyển dời lưỡng cực điện là

(i) Tính chẵn lẻ phải bị đảo ngược: chẵn $\leftrightarrow$ lẻ.

(ii) Biến đổi ở các số lượng tử phải được thỏa mãn

$$\Delta S = 0, \quad \Delta L = 0, \pm 1, \quad \Delta J = 0, \pm 1 \qquad (\text{ngoại trừ } 0 \to 0)\,.$$

Chuyển dời lưỡng cực điện không xảy ra ở những phổ này bởi vì chúng có cùng tính chẵn lẻ.

(c) Nếu trạng thái $^3P_1$ được xem có tính chất lẻ, nó có thể phải trải qua chuyển dời đến các vạch mức phổ cấm $^3S_0$, $^3P_{2,1,0}$, $^3D_{2,1}$.

1080

Các nguyên tử của hơi chì có cấu hình trạng thái cơ bản là $6s^26p^2$.

(a) Liệt kê các số lượng tử các mức của cấu hình này cho rằng có liên kết LS.

(b) Hãy phát biểu sự chuyển dời quang giữa các mức này có được phép hay không, tức là chuyển dời loại lưỡng cực điện. Giải thích vì sao có hay vì sao không?

(c) Xác định tổng số các mức khi có một từ trường **B**.

(d) Xác định tổng số các mức khi có một điện trường yếu **E** được tác dụng đồng thời với từ trường **B**.

(*Chicago*)

Lời giải:

(a) Hai electron $6s$ lấp đầy mức con đầu tiên. Chúng nhất định phải có spin đối song, tạo nên trạng thái $^1S_0$. Trong số hai electron $6p$, số lượng tử quỹ đạo của chúng có thể cộng lại để có tổng số $L = 0, 1, 2$. Số lượng tử spin S của chúng được xác định từ nguyên lý loại trừ Pauli cho các electron trong cùng một lớp con, đòi hỏi $L + S =$ số chẵn (**Bài tập 2054 (a)**). Từ đó $S = 0$ đối với $L = 0, 2$ còn $S = 1$ cho $L = 1$. Cấu hình do đó có ba "số hạng" với các chỉ số L và S khác nhau, và có năm mức kể cả các mức cấu trúc tinh tế với cùng L và S nhưng khác J. Các mức phổ đối với cấu hình từ đó sẽ là

$$^1S_0, {}^3P_{0,1,2}, {}^1D_2 .$$

(b) Các chuyển dời lưỡng cực điện trong số những mức này với cùng cấu hình là bị cấm bởi vì các mức có cùng tính chẵn lẻ.

(c) Trong một từ trường mỗi mức có số lượng tử J tách ra thành $2J + 1$ thành phần có M_J khác nhau. Đối với mức $6p^2$ được liệt kê ở trên, tổng số các mức con là $1 + 1 + 3 + 5 + 5 = 15$.

(d) Điện trường **E** làm nhiễu loạn các lớp con nhưng không gây ra sự tách vạch thêm nữa bởi vì các lớp con không còn có suy biến dư. Nói cách khác,

điện trường không gây ra sự tách vạch mới, và tổng số các vạch vẫn là 15.

1081

Xem xét một nguyên tử nhiều electron có cấu hình là $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p 4d$.

(a) Có phải nguyên tố này ở trạng thái cơ bản không? Nếu không phải thì trạng thái cơ bản là trạng thái nào?

(b) Giả sử rằng một sơ đồ Russell-Saunders áp dụng được cho nguyên tử này. Hãy vẽ sơ bộ sơ đồ mức năng lượng theo tỉ lệ bắt đầu với cấu hình không bị nhiễu loạn và sau đó tính đến các loại tương tác, cho biết các loại nhiễu loạn liên quan và ước lượng sự tách năng lượng. Đánh dấu các mức tại mỗi bước của sơ đồ với các kí hiệu thích hợp.

(c) Chuyển dời cho phép của trạng thái này về trạng thái cơ bản là như thế nào, nếu có?

(*Columbia*)

Lời giải:

(a) Nguyên tử không phải ở trạng thái cơ bản có cấu hình điện tử lớp ngoài cùng là $4p^2$, tương ứng với trạng thái nguyên tử là $^1D_2$, $^3P_{2,1,0}$ và $^1S_0$ (**Bài tập 1080**), trong số đó trạng thái $^3P_0$ có năng lượng thấp nhất.

(b) Hiệu chính năng lượng bắt nguồn từ liên kết LS là

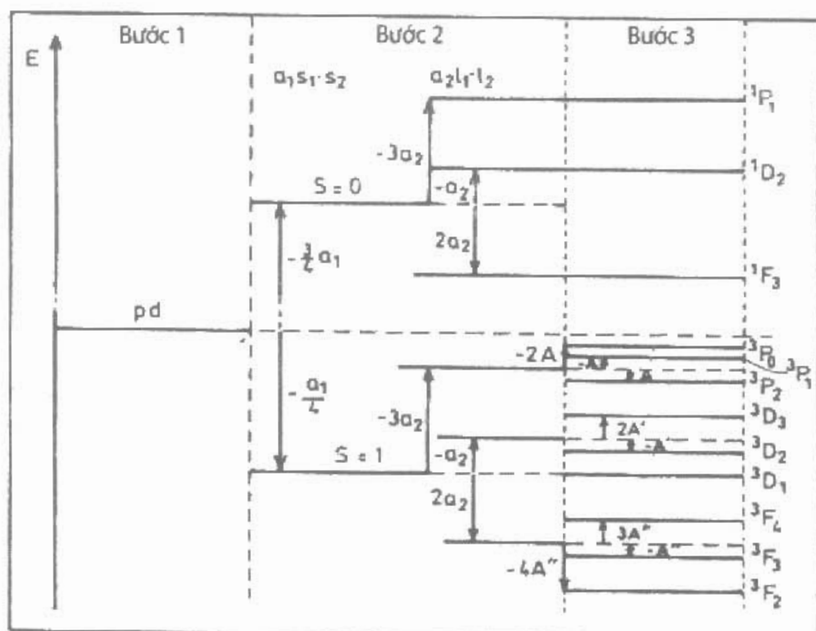
$$\begin{aligned}\Delta E =& a_1 \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_1 + a_2 \mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{l}_2 + A\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \\ =& \frac{a_1}{2}[S(S+1) - s_1(s_1+1) - s_2(s_2+1)] + \frac{a_2}{2}[L(L+1) \\ & - l_1(l_1+1) - l_2(l_2+1)] + \frac{A}{2}[J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)],\end{aligned}$$

ở đây a_1, a_2, A có thể âm hay dương. Các mức năng lượng có thể tìm thấy theo ba bước, tức là bằng cách vẽ sự tách mức năng lượng theo thứ tự S, L và J. Các mức năng lượng được cho ở trên hình 1.29.

(c) Quy tắc chọn lựa đối với chuyển dời lưỡng cực điện là

$$\Delta S = 0, \Delta L = 0, \pm 1, \Delta J = 0, \pm 1$$

(ngoại trừ $0 \to 0$).



Hình 1.29

Các chuyển dời sau là được phép:

$(4p4d)^3P_1 \to (4p^2)^3P_0$, $(4p4d)^3P_1 \to (4p^2)^3P_1$,

$(4p4d)^3P_1 \to (4p^2)^3P_2$, $(4p4d)^3P_2 \to (4p^2)^3P_1$,

$(4p4d)^3P_2 \to (4p^2)^3P_2$, $(4p4d)^3P_0 \to (4p^2)^3P_1$,

$(4p4d)^3D_1 \to (4p^2)^3P_1$, $(4p4d)^3D_1 \to (4p^2)^3P_2$,

$(4p4d)^3D_2 \to (4p^2)^3P_1$, $(4p4d)^3D_2 \to (4p^2)^3P_2$,

$(4p4d)^3D_3 \to (4p^2)^3P_2$, $(4p4d)^1P_1 \to (4p^2)^1S_0$,

$(4p4d)^1P_1 \to (4p^2)^1D_2$, $(4p4d)^1D_2 \to (4p^2)^1D_2$,

$(4p4d)^1F_3 \to (4p^2)^1D_2$.

1082

Trạng thái cơ bản của Be có hai electron $1s$ và hai electron $2s$. Trạng thái kích thích thấp nhất là trạng thái trong đó một trong hai electron $2s$ bị kích

thích lên một trạng thái $2p$.

(a) Hãy liệt kê các trạng thái này và đưa ra tất cả các số lượng tử momen động lượng với từng trạng thái.

(b) Sắp xếp các trạng thái theo thứ tự tăng dần của năng lượng, chỉ ra bất kì sự suy biến nào. Đưa ra giải thích vật lý cho thứ tự này và ước lượng độ lớn của sự tách mức giữa các trạng thái khác nhau.

(*Columbia*)

Lời giải:

(a) Cấu hình electron của trạng thái cơ bản là $1s^2 2s^2$. Nguyên lý Pauli đòi hỏi $S = 0$. Do đó, trạng thái cơ bản có $S = 0$, $L = 0$, $J = 0$ và là một trạng thái đơn bội $^1S_0$.

Trạng thái kích thích thấp nhất có cấu hình $1s^2 2s2p$. Nguyên lý Pauli cho phép đối với cả $S = 0$ và $S = 1$. Đối với $S = 0$, khi $L = 1$ ta có $J = 1$ và trạng thái là $^1P_1$. Đối với $S = 1$, khi $L = 1$ ta có $J = 2, 1, 0$ và trạng thái là $^3P_{2,1,0}$.

(b) Theo thứ tự tăng của năng lượng ta có

$$^1S_0 <^3 P_0 <^3 P_1 <^3 P_2 <^1 P_1 .$$

Độ suy biến của $^3P_2$, $^3P_1$ và $^1P_1$ lần lượt là 5, 3, 3. Theo quy tắc Hund (**Bài tập 1008(e)**), đối với cùng cấu hình thì S càng lớn năng lượng càng thấp; và đối với một lớp chưa được lấp đầy tới một nửa thì J nhỏ nhất tương ứng với năng lượng nhỏ nhất. Điều này giải thích một cách thô sơ cho sự sắp xếp nêu trên.

Sự khác nhau về năng lượng giữa $^1S_0$ và $^1P_1$ vào cỡ 1 eV. Sự tách mức năng lượng giữa trạng thái bội ba và trạng thái đơn bội cũng vào cỡ $\sim$ 1 eV. Tuy nhiên, sự tách mức năng lượng giữa các mức bội ba của một trạng thái thì nhỏ hơn rất nhiều, vào cỡ $\sim 10^5$–10^{-4} eV.

1083

Một đặc trưng của cấu trúc nguyên tử của khí hiếm là các phân lớp p cao nhất được lấp đầy hoàn toàn. Do đó, ví dụ cấu hình electron trong neon là $1s^2 2s^2 2p^6$. Momen động lượng toàn phần J, momen động lượng quỹ đạo toàn phần L và momen spin toàn phần S của một cấu hình kín như trên đều bằng 0.

(a) Giải thích ý nghĩa của kí hiệu $1s^2 2s^2 2p^6$.

(b) Nhóm thấp nhất của các trạng thái kích thích của neon tương ứng với sự kích thích của một trong các electron $2p$ lên một quỹ đạo $3s$. Nhân ($2p^5$) có momen động lượng quỹ đạo và momen spin bằng nhau về độ lớn nhưng hướng ngược với những đại lượng này của electron đã bị tách ra khỏi nhân. Do đó, đối với tương tác của nó với electron kích thích, hạt nhân có thể được coi như một sóng electron p.

Thừa nhận liên kết LS (Russell-Saunders), tính toán các số lượng tử (L, S, J) của nhóm các trạng thái này.

(c) Khi một nguyên tử được đặt trong từ trường H, năng lượng của nó thay đổi (so với truờng hợp $H = 0$) một lượng ΔE

$$\Delta E = \frac{e\hbar}{2mc} gHM ,$$

trong đó M có thể bằng $J, J-1, J-2, \dots, -J$. Đại lượng g được biết là hằng số Landé. Tính g đối với trạng thái $L = 1$, $S = 1$, $J = 2$ của cấu hình $1s^2 2s^2 2p^5 3s$ của neon.

(d) Cấu trúc của cấu hình $1s^2 2s^2 2p^5 3p$ của neon được mô tả sơ lược bởi liên kết Russell-Saunders. Một sự mô tả tốt hơn được đưa ra bởi ý tưởng liên kết cặp trong đó momen động lượng quỹ đạo $\mathbf{L}_2$ của electron bên ngoài kết hợp với momen động lượng toàn phần $\mathbf{J}_c$ của nhân. Vectơ tổng $\mathbf{K}$ ($\mathbf{K} = \mathbf{J}_c + \mathbf{L}_2$) sau đó kết hợp với spin $\mathbf{S}_2$ của electron bên ngoài cho momen động lượng toàn phần $\mathbf{J}$ của nguyên tử.

Tính toán các số lượng tử J_c, K, J của các trạng thái của cấu hình $1s^2 2s^2$ $2p^5 3p$.

(*CUSPEA*)

Lời giải:

(a) Trong mỗi nhóm của kí hiệu ví dụ như $1s^2$, số đứng trước chữ cái chính là số lượng tử chính n, chữ cái (s, p, v.v.) xác định số lượng tử l của momen động lượng quỹ đạo (s đối với $l = 0$, p đối với $l = 1$, v.v.), chỉ số trên phía sau chữ cái chỉ số electron trong phân lớp (n, l).

(b) Liên kết là như nhau giữa một p-electron và một s-electron. Do đó, ta có $l_1 = 1$, $l_2 = 0$ và vì vậy $L = 1+0 = 1$; $s_1 = \frac{1}{2}$, $s_2 = \frac{1}{2}$ và vì vậy $S = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$ hoặc $S = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$. Vì vậy $L = 1$, $S = 1$ sẽ kéo theo $J = 2$, 1, hoặc 0; $L = 1$, $S = 0$ sẽ khiến $J = 1$. Tóm lại, các trạng thái của (L, S, J) là (1,1,2), (1,1,1), (1,1,0), (1,0,1).

(c) Hệ số g được cho bởi công thức

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}.$$

Đối với (1,1,2) ta có

$$g = 1 + \frac{6+2-2}{2 \times 6} = \frac{3}{2}.$$

(d) Liên kết hình thành giữa một nhân tương dương với một p-electron và một vỏ p-electron bên ngoài, nghĩa là giữa $l_c = 1$, $s_c = \frac{1}{2}$; $l_2 = 1$, $s_2 = \frac{1}{2}$. Do đó

$$J_c = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, L_2 = 1, S_2 = \frac{1}{2}.$$

Đối với $J_c = \frac{3}{2}$, $L_2 = 1$, ta có $K = \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$.

Do đó với $K = \frac{5}{2}$, $J = 3, 2$; với $K = \frac{3}{2}$, $J = 2, 1$; với

$$K = \frac{1}{2}, J = 1, 0.$$

Đối với $J_c = \frac{1}{2}$, $L_2 = 1$, ta có $K = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$. Do đó với

$$K = \frac{3}{2}, J = 2, 1; \quad \text{với } K = \frac{1}{2}, J = 1, 0.$$

1084

Một lò chứa các nguyên tử natri tại áp suất thấp và nhiệt độ 2000 K. Xem xét chỉ ba mức dưới đây của natri:

$1s^2 2s^2 2p^6 3s$: ^2S, năng lượng không (trạng thái cơ bản),

$1s^2 2s^2 2p^6 3p$: ^2P, 2,10 eV,

$1s^2 2s^2 2p^6 4s$: ^2S, 3,18 eV.

(a) Năng lượng photon của các vạch phát xạ xuất hiện trong quang phổ của nó bằng bao nhiêu? Cường độ tương đối của chúng có giá trị nào? (Đưa ra biểu thức thích hợp và đánh giá chúng một cách gần đúng theo thời gian được phép).

(b) Cho bức xạ liên tục với phổ phẳng chiếu qua lò ta thu được phổ hấp thụ. Ta sẽ thấy được những vạch phổ nào? Tìm cường độ tương đối của các vạch này. *(UC, Berkeley)*

Lời giải:

(a) Do $E_0 = 0$ eV, $E_1 = 2,10$ eV, $E_2 = 3,18$ eV, nên ta có hai chuyển mức lưỡng cực điện tương ứng với năng lượng

$$E_{10} = 2,10 \text{ eV}, \qquad E_{21} = 1,08 \text{ eV}.$$

Xác suất chuyển từ mức năng lượng k sang mức i được cho bởi

$$A_{ik} = \frac{e^2\omega_{ki}^3}{3\hbar^2 c^3}\frac{1}{g_k}\sum_{m_k,m_i} |\langle im_i|\mathbf{r}|km_k\rangle|^2 ,$$

trong đó $\omega_{ki} = (E_k - E_i)/\hbar$, i, k là các số lượng tử momen động lượng toàn phần, m_k, m_i là các số lượng tử từ tương ứng. Cường độ của các vạch phổ là

$$I_{ik} \propto N_k \hbar\omega_{ki} A_{ik} ,$$

trong đó số hạt ở mức năng lượng thứ i là $N_i \propto g_i \exp(-\frac{E_i}{kT})$. Với trường hợp ^2P, ta có hai giá trị của $J : J = 3/2,\ 1/2$. Giả sử thành phần ma trận chuyển mức và trọng số spin của hai chuyển mức là xấp xỉ nhau. Khi đó, tỉ số cường độ của hai vạch phổ là

$$\frac{I_{01}}{I_{12}} = \left(\frac{\omega_{10}}{\omega_{21}}\right)^4 \exp\left(\frac{E_{21}}{kT}\right)$$
$$= \left(\frac{2,10}{1,08}\right)^4 \exp\left(\frac{1,08}{8,6\times 10^{-5}\times 2000}\right) = 8\times 10^3 .$$

(b) Cường độ của vạch hấp thụ là

$$I_{ik} \propto B_{ik} N_k \rho(\omega_{ik})\hbar\omega_{ik} ,$$

trong đó

$$B_{ik} = \frac{4\pi^2 e^2}{3\hbar^2}\frac{1}{g_k}\sum_{m_k,m_i} |\langle im_i|\mathbf{r}|km_k\rangle|^2$$

là hệ số Einstein. Do tia tới có phổ phẳng nên, $\rho(\omega)$ là hằng số. Ta có hai vạch phổ hấp thụ: $E_0 \to E_1$ và $E_1 \to E_2$. Tỉ số cường độ của các vạch là

$$\frac{I_{10}}{I_{21}} = \frac{B_{10}N_0\omega_{10}}{B_{21}N_1\omega_{21}} \approx \left(\frac{\omega_{10}}{\omega_{21}}\right)\exp\left(\frac{E_{10}}{kT}\right)$$
$$= \left(\frac{2,10}{1,08}\right)\exp\left(\frac{2,10}{8,62\times 10^{-5}\times 2000}\right) = 4\times 10^5 .$$

1085

Viết cấu hình electron thích hợp cho C ($Z = 6$). Sử dụng nguyên lý Pauli tìm các trạng thái cho phép của 4 electron lớp ngoài cùng. Sử dụng kí hiệu quy ước của hạt nhân để thể hiện các trạng thái này và sắp xếp năng lượng theo quy tắc Hund. So sánh với cấu hình $(2p)^4$.

(Wisconsin)

Lời giải:

Cấu hình electron của C là $1s^2 2s^2 2p^2$. Các electron $1s$ tạo thành một lớp vỏ hoàn chỉnh và ta không cần xét tới. Theo nguyên lý Pauli hai electron $2s^2$ có tổng spin $S = 0$, và do vậy momen động lượng tổng cộng là 0. Do vậy, ta chỉ cần xem xét việc kết hợp của hai electron lớp p. Khi đó, các trạng thái electron có thể là $^1S_0$, $^3P_{2,1,0}$, $^1D_2$ **(Bài tập 1088)**. Theo quy tắc Hund, thứ tự năng lượng tăng dần của các trạng thái là $^3P_0, ^3P_1, ^3P_2, ^1D_2, ^1S_0$.

Cấu hình electron của $(2p)^4$ giống như trên nhưng khác về thứ tự năng lượng. Trong trạng thái ^3P, $J = 0$ có năng lượng cao nhất và năng lượng thấp nhất khi $J = 2$. Các trạng thái khác có cùng mức năng lượng như trường hợp $2s^2 2p^2$.

1086

Số hiệu nguyên tử của Mg là $Z = 12$.

(a) Vẽ sơ đồ mức năng lượng của một hạt nhân Mg (không cần theo tỉ lệ) để chỉ ra đặc điểm cơ bản của nó, bao gồm cả trạng thái cơ bản và trạng thái kích thích xuất phát từ các cấu hình mà trong đó một electron hóa trị nằm ở trạng thái $3s$ và một electron hóa trị khác nằm trong trạng thái nl với $n = 3, 4$ và $l = 0, 1$. Kí hiệu các mức năng lượng bằng các quy ước phổ thông thường. Ở đây giả thiết là liên kết LS.

(b) Trên sơ đồ đã vẽ, hãy chỉ ra các phần sau đây (và giải thích):

(1) một chuyển mức được phép,

(2) một chuyển mức bị cấm,

(3) một vạch liên tổ hợp (nếu có).

(4) mức cho hiệu ứng Zeeman (1) thường và (2) dị thường nếu có.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Hình 1.30 mô tả sơ đồ mức năng lượng của nguyên tử Mg.

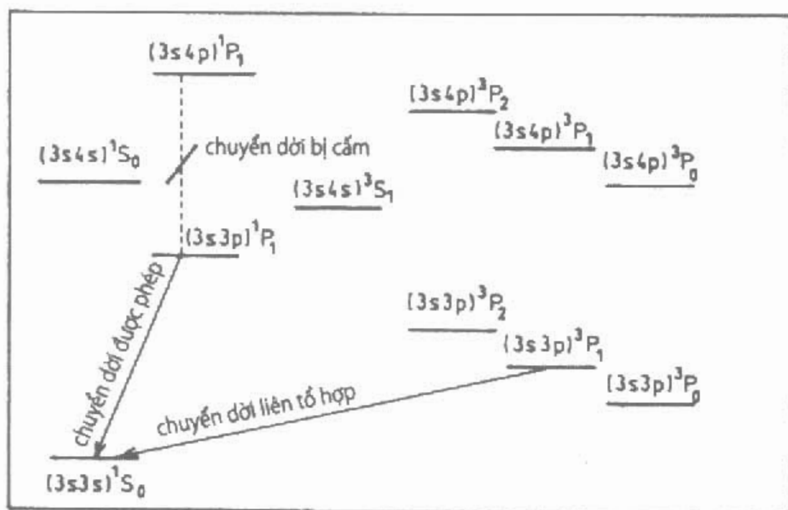
(b) (1) Một chuyển mức cho phép là

$$(3s3p)^1P_1 \rightarrow (3s3s)^1S_0 .$$

(2) Một chuyển mức bị cấm

$$(3s4p)^1P_1 \not\rightarrow (3s3p)^1P_1 .$$

($\Delta\pi = 0$, vi phạm quy tắc lựa chọn của tính chẵn lẻ)

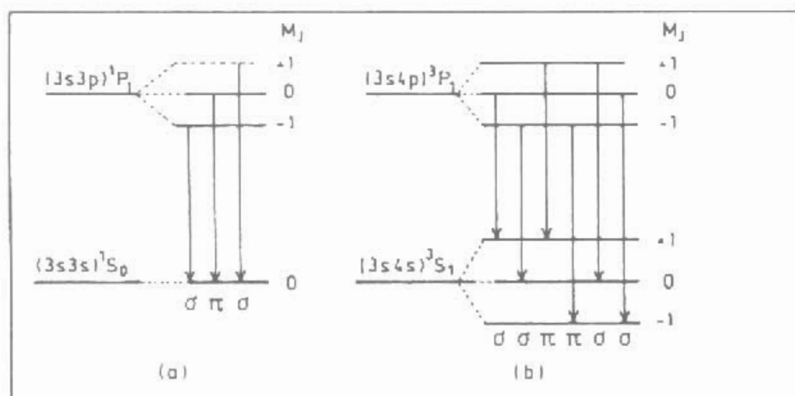


Hình 1.30

(3) Một vạch liên tổ hợp:

$$(3s3p)^3P_1 \rightarrow (3s3s)^1S_0 .$$

(4) Trong từ trường, chuyển mức $(3s3p)^1P_1 \rightarrow (3s3s)^1S_0$ chỉ tạo ra 3 vạch, và được gọi là hiệu ứng Zeeman thường, xem trong hình 1.31 (a). Chuyển mức $(3s4p)^3P_1 \rightarrow (3s4s)^3S_1$ sinh ra 6 vạch, đây là hiệu ứng Zeeman dị thường. Thể hiện trong hình 1.31 (b). Độ rộng giữa các mức con của $(3s3p)^1P_1$, $(3s4p)^3P_1$, và $(3s4s)^3S_1$ lần lượt là $\mu_B B$, $3\mu_B B/2$ và $2\mu_B B$.



Hình 1.31

1087

Đưa ra trạng thái cơ bản của nguyên tử cacbon, dưới dạng kí hiệu phổ, và giải thích tại sao đây là trạng thái cơ bản.

(Wisconsin)

Lời giải:

Cấu hình electron của trạng thái năng lượng thấp nhất của nguyên tử cacbon là $1s^2 2s^2 2p^2$, cấu hình này có thể tạo nên các trạng thái có kí hiệu phổ là $^1S_0$, $^3P_{0,1,2}$, $^1D_2$. Theo quy tắc Hund, trạng thái cơ bản có spin toàn phần S lớn nhất. Nhưng nếu có nhiều trạng thái như vậy thì trạng thái cơ bản là trạng thái có momen động lượng quỹ đạo toàn phần lớn nhất trong các trạng thái đó. Nếu số electron nhỏ hơn số lượng cần thiết để lấp đầy một nửa lớp vỏ, trạng thái năng lượng thấp nhất tương ứng với giá trị nhỏ nhất của momen động lượng toàn phần J. Trong các trạng thái trên, $^3P_{0,1,2}$ có S lớn nhất. Do lớp p chưa được lấp đầy một nửa nên trang thái cơ bản là $^3P_0$.

1088

Phải hiểu thế nào khi nói rằng trạng thái cơ bản của một nguyên tử cacbon có cấu hình $(1s)^2(2s)^2(2p)^2$?

Giả thiết rằng ở đây sử dụng Russell-Saunders, chứng minh rằng có 5 trạng

thái phổ tương ứng với cấu hình này: $^1S_0$, $^1D_2$, $^3P_1$, $^3P_2$, $^3P_0$.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Cấu hình electron của cacbon ở trạng thái cơ bản là $(1s)^2(2s)^2(2p)^2$ có nghĩa là, khi nguyên tử cacbon có năng lượng thấp nhất thì sẽ có hai electron trong quỹ đạo s của lớp cơ bản đầu tiên và có hai electron mà mỗi electron nằm trên quỹ đạo s và p của lớp cơ bản thứ hai.

Kí hiệu phổ tương ứng với cấu hình electron trên được xác định bởi hai electron bình đẳng trên quỹ đạo p.

Đối với hai p electron này, các kết hợp có thể và tổng giá trị của thành phần z của số lượng tử quỹ đạo là như sau

m_{l2}	m_{l1}	1	0	−1
1		2	1	0
0		1	0	−1
−1		0	−1	−2

Với $m_{l1} = m_{l2}$, hay $L = 2, 0$, theo nguyên lý Pauli thì $m_{s1} \neq m_{s2}$, hay $S = 0$, từ đó cho ta các thành phần $^1D_2$, $^1S_0$.

Đối với $m_{s1} = m_{s2}$, hay $S = 1$, thì theo nguyên lý Pauli $m_{l1} \neq m_{l2}$, hay $L = 1$, và do đó $J = 2,1,0$, cho ta các thành phần $^3P_{2,1,0}$. Do vậy, tương ứng với cấu hình $1s^22s^22p^2$ ta có các thành phần phổ có thể là

$$^1S_0, {}^1D_2, {}^3P_2, {}^3P_1, {}^3P_0 .$$

1089

Áp dụng mô hình liên kết Russell-Saunders trình bày tất cả các trạng thái liên quan tới cấu hình electron $(1s)^2(2s)^2(2p)^5(3p)$. Chú thích mỗi trạng thái bằng kí hiệu phổ của các số lượng tử momen động lượng thích hợp với liên kết Russell-Saunders.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Quỹ đạo $2p$ có thể chứa $2(2l + 1) = 6$ electron. Vì vậy, cấu hình $(1s)^2(2s)^2(2p)^5$ có thể biểu diễn bằng phần bù của nó $(1s)^2(2s)^2$

$(2p)^1$ trong sự kết hợp của nó với electron $3p$. Trong liên kết LS sự tổng hợp các electron $2p$ và $3p$ có thể xem xét như sau. Do $l_1 = 1$, $l_2 = 1$, $s_1 = \frac{1}{2}$, $s_2 = \frac{1}{2}$, ta có $L = 2, 1, 0$; $S = 1, 0$. Với $L = 2$, ta có $S = 1$: $J = 3, 2, 1$; và với $S = 0$: $J = 2$, cho ta ${}^3D_{3,2,1}$, ${}^1D_2$. Với $L = 1$, ta có $S = 1$: $J = 2, 1, 0$; và với $S = 0$: $J = 1$, ta thu được ${}^3P_{2,1,0}$, ${}^1P_1$. Với $L = 0$, ta có $S = 1$: $J = 1$; với $S = 0$: $J = 0$, cho ta ${}^3S_1$, ${}^1S_0$. Do vậy, cấu hình đã cho có các trạng thái nguyên tử là

$$^3S_1, ^3P_{2,1,0}, ^3D_{3,2,1}, ^1S_0, ^1P_1, ^1D_2 .$$

1090

Cấu hình cơ bản của Sd (scandi) là $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d 4s^2$.

(a) Cấu hình này cho ta các trạng thái nào?

(b) Kí hiệu phổ phù hợp cho các mức bội của thành phần này là gì? Tìm thứ tự các mức theo năng lượng?

(c) Hai mức thấp nhất của trạng thái bội cơ bản này được cách nhau 168 cm^{-1}. Mật độ tương đối của chúng ở nhiệt độ T=2000 K là bao nhiêu?

$$h = 6,6 \times 10^{-34} \text{ Js}, \qquad c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}, \qquad k = 1,4 \times 10^{-23} \text{ J/K}.$$

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Bên ngoài các lớp lấp đầy ta có một electron $3d$ và 2 electron $4s$. Theo liên kết LS ta phải kết hợp $l = 2$, $s = \frac{1}{2}$ với $L = 0$, $S = 0$. Do vậy $L = 2$, $S = \frac{1}{2}$, và các kí hiệu phổ của cấu hình electron đã cho là

$$^2D_{5/2}, ^2D_{3/2} .$$

(b) Các mức bội là ${}^2D_{5/2}$ và ${}^2D_{3/2}$, trong đó, theo quy tắc Hund, mức thứ hai có năng lượng thấp hơn bởi vì lớp D chưa được lấp đầy một nửa.

(c) Tỉ số số hạt trong hai mức năng lượng đó là

$$\frac{g_1}{g_2} \exp\left(-\frac{\Delta E}{kT}\right) ,$$

trong đó $g_1 = 2 \times \frac{3}{2} + 1 = 4$ là độ suy biến của ${}^2D_{3/2}$, $g_2 = 2 \times \frac{5}{2} + 1 = 6$ là độ

suy biến của $^2D_{5/2}$, ΔE là sự tách mức của hai mức năng lượng. Do

$$\Delta E = hc\Delta\tilde{\nu} = 6,6 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8 \times 168 \times 10^2$$
$$= 3,3 \times 10^{-21}\ \text{J},$$

$$\frac{g_1}{g_2}\exp\left(-\frac{\Delta E}{kT}\right) = 0,6\,.$$

1091

Xét trường hợp 4 electron p tương đương nhau trong một nguyên tử hoặc ion. (Xem các electron này có cùng hàm sóng theo bán kính, và có cùng momen động lượng quỹ đạo $l = 1$).

(a) Trong mô hình liên kết Russell-Saunders (LS), xác định tất cả các cấu hình có thể của 4 electron; chú thích các cấu hình đó bằng các kí hiệu phổ chuẩn, và trong mỗi trường hợp, hãy chỉ ra các giá trị của L, S, J và độ bội.

(b) Tính thừa số Landé g cho tất cả các trạng thái đã nêu trên trong trường hợp $J = 2$.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Quỹ đạo p của một lớp cơ bản có thể chứa $2(2 \times 1 + 1) = 6$ electron và do vậy các thành phần p^n và p^{6-n} là như nhau. Do vậy, các trường hợp của 4 electron p tương đương với trường hợp 2 electron p. Theo nguyên lý Pauli, các thành phần phổ là (**Bài tập 1088**)

$$^1S_0 \qquad (S = 0, L = 0, J = 0)$$
$$^1D_2 \qquad (S = 0, L = 2, J = 2)$$
$$^3P_{2,1,0} \qquad (S = 1, L = 1, J = 2,1,0)\,.$$

(b) Thừa số Landé g được cho bởi

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}\,.$$

Với $^1D_2$:

$$g = 1 + \frac{2 \times 3 + 0 \times 1 - 2 \times 3}{2 \times 2 \times 3} = 1\,,$$

Với $^3P_2$:

$$g = 1 + \frac{2 \times 3 + 1 \times 2 - 1 \times 2}{2 \times 2 \times 3} = 1,5\,.$$

1092

Trong trường hợp bội kép của natri hãy trình bày:

(a) Kí hiệu phổ cho các mức năng lượng (hình 1.32).

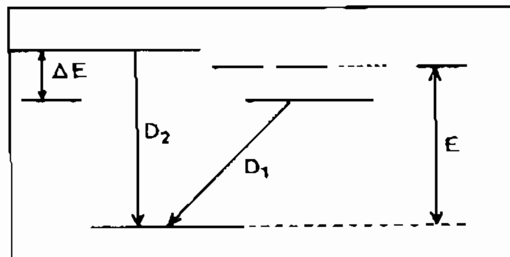
(b) Nguyên nhân vật lý cho sự khác biệt năng lượng E.

(c) Nguyên nhân vật lý của sự tách mức ΔE.

(d) Tỉ số mong đợi của cường độ

$$D_2/D_1 \quad \text{nếu } kT \gg \Delta E\,.$$

(*Wisconsin*)



Hình 1.32

Lời giải:

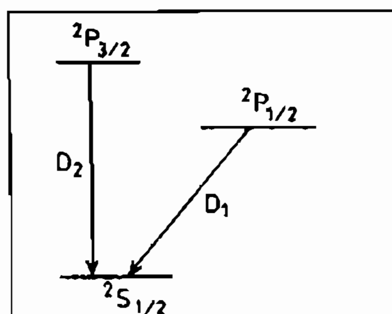
(a) Kí hiệu phổ cho các mức năng lượng được thể hiện trong hình 1.33.

(b) Sự khác biệt năng lượng E xuất phát từ sự phân cực của hạt nhân nguyên tử và sự thâm nhập của quỹ đạo electron vào hạt nhân, chúng khác nhau do sự khác biệt về monmen động lượng quỹ đạo l.

(c) ΔE xuất hiện do sự sự tương tác giữa momen động lượng quỹ đạo và momen spin của electron

(d) Khi $kT \gg \Delta E$, tỉ số cường độ D_2/D_1 được xác định bởi sự suy biến của $^2P_{3/2}$ và $^2P_{1/2}$

$$\frac{D_2}{D_1} = \frac{2J_2+1}{2J_1+1} = \frac{3+1}{1+1} = 2\,.$$



Hình 1.33

1093

(a) Tìm cấu hình electron của natri ($Z = 11$) ở trạng thái cơ bản. Và trong trạng thái kích thích đầu tiên của nó?

(b) Viết các kí hiệu phổ (ví dụ $^4S_{3/2}$) cho mỗi trạng thái trong gần đúng của liên kết LS.

(c) Sự chuyển mức giữa hai trạng thái trên nằm trong vùng nhìn thấy. Điều này cho biết gì về kR, trong đó k là số sóng của bức xạ và R là bán kính nguyên tử? Có thể kết luận gì về tính phân cực bội của bức xạ phát ra?

(d) Xác định các "vạch D" của natri. Tại sao chúng lại tạo ra một nhị tử?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Cấu hình electron của trạng thái cơ bản của Na là $1s^22s^22p^63s^1$, và cấu hình của trạng thái kích thích thứ nhất là $1s^22s^22p^63p^1$.

(b) Kí hiệu cho trạng thái cơ bản: $^2S_{1/2}$.

Trạng thái kích thích thứ nhất là: $^2P_{3/2}, ^2P_{1/2}$.

(c) Do bán kính nguyên tử $R \approx 1$ Å và do ánh sáng nhìn thấy có $k \approx 10^{-1}$ Å^{-1}, ta có $kR \ll 1$, điều này thỏa mãn điều kiện chuyển mức lưỡng cực điện. Do vậy, các chuyển mức $^2P_{3/2} \rightarrow ^2S_{1/2}$, $^2P_{1/2} \rightarrow ^2S_{1/2}$ là các chuyển dời lưỡng cực điện.

(d) Các vạch D sinh ra bởi sự chuyển mức từ trạng thái kích thích thứ nhất xuống trạng thái cơ bản của Na. Trạng thái kích thích thứ nhất bị tách thành hai mức năng lượng $^2P_{3/2}$ và $^2P_{1/2}$ do sự liên kết LS. Do vậy vạch D có cấu

trúc bội kép.

1094

Kết hợp một trạng thái p với một trạng thái s thông qua

(a) liên kết Russell-Saunders,

(b) liên kết j, j,

và xác định các trạng thái tạo thành với các số lượng tử thích hợp. Vẽ các sơ đồ mức năng lượng cho hai trường hợp trên cạnh nhau và chỉ ra mức nào chuyển sang mức nào khi liên kết spin quỹ đạo tăng?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Ta có $s_1 = s_2 = 1/2$, $l_1 = 1$, $l_2 = 0$.

(a) Theo liên kết LS, $\mathbf{L} = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2$, $\mathbf{S} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$, $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$. Do vậy, $L = 1, S = 1, 0$.

Với $S = 1$, $J = 2, 1, 0$, từ đó ta có ${}^3P_{2,1,0}$.

Với $S = 0$, $J = 1$, từ đó ta có ${}^1P_1$.

(b) Theo liên kết jj, $\mathbf{j}_1 = \mathbf{l}_1 + \mathbf{s}_1$, $\mathbf{j}_2 = \mathbf{l}_2 + \mathbf{s}_2$, $\mathbf{J} = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2$. Do vậy, $j_1 = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$, $j_2 = \frac{1}{2}$.

Do vậy, các trạng thái kết hợp là

$$\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)_2, \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)_1, \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)_1, \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)_0,$$

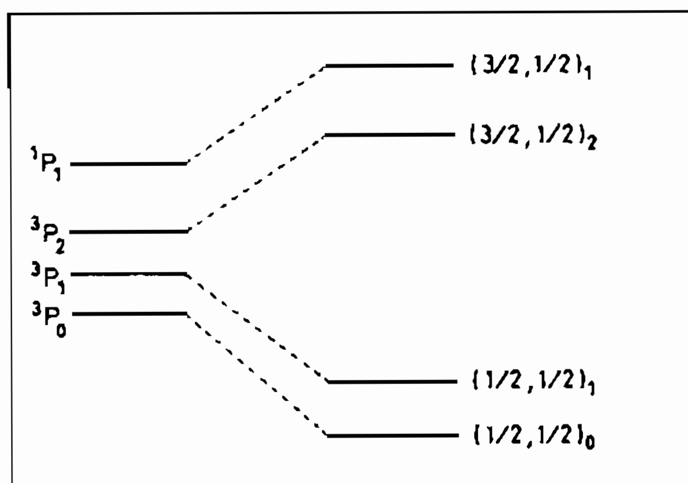
trong đó, các chỉ số dưới là giá trị của J.

Các trạng thái liên kết được thể hiện trong Hình 1.34.

1095

(a) Trình bày cấu hình trạng thái cơ bản của nguyên tử cacbon, và liệt kê các mức (kí hiệu dựa trên liên kết Russell -Saunders) của cấu hình này.

(b) Chỉ ra mức trạng thái cơ bản. Giải thích câu trả lời.



Hình 1.34

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Cấu hình electron của trạng thái của cacbon là $1s^2 2s^2 2p^2$. Các mức năng lượng tương ứng là $^1S_0$, $^2P_{2,1,0}$, $^1D_2$.

(b) Theo quy tắc Hund trạng thái cơ bản là $^3P_0$.

1096

Với mỗi chuyển mức phát xạ nguyên tử sau đây, hãy chỉ ra trạng thái nào được phép, trạng thái nào bị cấm dựa vào quy tắc lựa chọn phát xạ lưỡng cực điện. Với các chuyển mức bị cấm, nêu ra quy tắc bị vi phạm.

(a) He: $(1s)(1p)\ ^1P_1 \to (1s)^2\ ^1S_0$

(b) C: $(1s)^2(2s)^2(2p)(3s)\ ^3P_1 \to (1s)^2(2s)^2(2p)^2\ ^3P_0$

(c) C: $(1s)^2(2s)^2(2p)(3s)\ ^3P_0 \to (1s)^2(2s)^2(2p)^2\ ^3P_0$

(d) Na: $(1s)^2(2s)^2(2p)^6(4d)\ ^2D_{5/2} \to (1s)^2(2s)^2(2p)^6(3p)\ ^2P_{1/2}$

(e) He: $(1s)(2p)\ ^3P_1 \to (1s)^2\ ^1S_0$

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Quy tắc chọn lọc đối với chuyển mức lưỡng cực điện đơn là

$$\Delta l = \pm 1, \qquad \Delta j = 0, \pm 1 .$$

Các quy tắc lựa chọn đối với chuyển mức lưỡng cực điện đa bội là

$$\Delta S = 0, \qquad \Delta L = 0, \pm 1, \qquad \Delta J = 0, \pm 1 (0 \not\leftrightarrow 0) .$$

(a) Chuyển mức lưỡng cực điện được phép.

(b) Chuyển mức lưỡng cực điện được phép.

(c) Bị cấm do momen động lượng toàn phần J chuyển từ 0 tới 0 điều này bị cấm đối với chuyển mức lưỡng cực điện.

(d) Bị cấm do vi phạm điều kiện $\Delta J = 0, \pm 1$.

(e) Bị cấm do không thỏa mãn điều kiện $\Delta S = 0$.

1097

Xét một nguyên tử giả định với cấu hình electron của hai electron lớp p giống nhau bên ngoài một lớp lấp đầy.

(a) Giả thiết ở đây liên kết LS (Russell-Saunders), xác định các mức có thể của hệ sử dụng kí hiệu phổ quen thuộc, $^{(2S+1)}L_J$.

(b) Tính chẵn lẻ của các mức trong phần (a) là gì?

(c) Trong gần đúng hạt độc lập các mức này đều bị suy biến, nhưng trong thực thế năng lượng của chúng có sự khác biệt. Mô tả nguồn gốc vật lý của sự tách mức này.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Cấu hình electron là p^2. Do hai electron p là tương đương nên các mức năng lượng có thể là **(Bài tập 1088)**

$$^1S_0, \ ^3P_{2,1,0}, \ ^1D_2 .$$

(b) Tính chẵn lẻ của một mức năng lượng được xác định bởi tổng của các số lượng tử momen động lượng quỹ đạo: tính chẵn lẻ $\pi = (-1)^{\Sigma l}$. Tính chẵn

lẻ là chẵn hay lẻ phụ thuộc vào π bằng $+1$ hoặc -1. Các mức $^1S_0$, $^3P_{2,1,0}$, $^1D_2$ có $\Sigma l = 2$ và do vậy nó có tính chẵn.

(c) Xem **Bài tập 1079(a)**.

1098

Cấu hình trạng thái cơ bản của kali như thế nào? (số hiệu nguyên tử 19).

(UC, Berkeley)

Lời giải:

Cấu hình trạng thái cơ bản của kali là $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^1$.

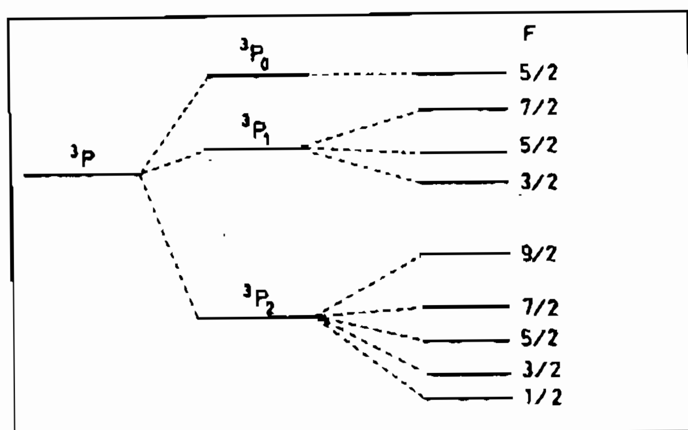
1099

Xét đồng vị ^{17}O ($I = 5/2$) của nguyên tử oxy. Vẽ sơ đồ để chỉ ra rằng sự tách cấu trúc tinh tế và siêu tinh tế của các mức được mô tả bằng $(1s^2 2s^2 2p^4)\,^3P$. Kí hiệu các trạng thái bằng các số lượng tử momen động lượng thích hợp.

(Wisconsin)

Lời giải:

Các cấu trúc tinh tế và siêu tinh tế của trạng thái ^3P của ^{17}O được thể hiện trong hình 1.35.



Hình 1.35

1100

Xét một nguyên tử heli với cấu hình electron $1s3d$. Vẽ một chuỗi các sơ đồ mức năng lượng có thể khi xét lần lượt các điều kiện sau:

(a) chỉ có lực hút Coulomb giữa mỗi electron và hạt nhân,

(b) lực đẩy tĩnh điện giữa các electron,

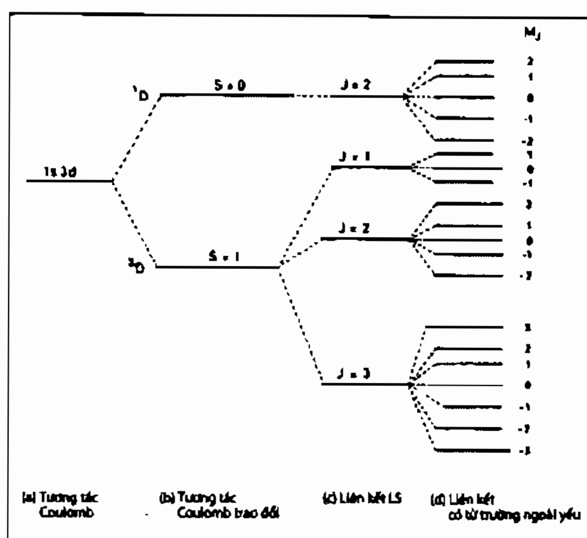
(c) liên kết spin quỹ đạo,

(d) hiệu ứng của từ trường ngoài yếu.

(Wisconsin)

Lời giải:

Sự tách mức năng lượng lần lượt được thể hiện trong hình 1.36.



Hình 1.36

1101

Natri clorua tạo thành các tinh thể lập phương với 4 nguyên tử Na và 4 nguyên tử Cl trên một hình lập phương. Khối lượng nguyên tử của Na và Cl

lần lượt là 23,0 và 35,5. Mật độ của NaCl là 2,16 g/cm^3.

(a) Tìm bước sóng tia X dài nhất có phản xạ Bragg.

(b) Với tia X bước sóng 4 Å, xác định số lượng nhiễu xạ Bragg và các góc nhiễu xạ tương ứng.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Gọi V là thể tích của một ô đơn vị, N_A là số Avogadro, ρ khối lượng riêng của NaCl. Khi đó ta có

$$V\rho N_A = 4(23,0 + 35,5)\,,$$

từ đó ta có

$$V = \frac{4 \times 58,5}{2,16 \times 6,02 \times 10^{23}} = 1,80 \times 10^{-22}\ \text{cm}^3\,,$$

và độ dài cạnh của ô lập phương đơn vị là

$$d = ^3\sqrt{V} = 5,6 \times 10^{-8}\ \text{cm} = 5,6\ \text{Å}\,.$$

Phương trình Bragg là $2d\sin\theta = n\lambda$, do vậy ta có

$$\lambda_{\text{max}} = 2d = 11,2\ \text{Å}\,.$$

(b) Với $\lambda = 4$ Å,

$$\sin\theta = \frac{\lambda n}{2d} = 0,357n\,.$$

Do vậy

$$\text{với } n = 1 : \sin\theta = 0,357, \theta = 20,9^\circ\,,$$

$$\text{với } n = 2 : \sin\theta = 0,714, \theta = 45,6^\circ$$

Với $n \geq 3$: $\sin\theta > 1$, và phản xạ Bragg không được phép.

1102

(a) Electron có năng lượng 100 keV bắn phá bia vonfam ($Z = 74$). Vẽ sơ đồ phổ của tia X được sinh ra theo $1/\lambda$ (λ = bước sóng). Đánh dấu các vạch K của tia X.

(b) Tìm công thức gần đúng cho λ theo Z đối với các vạch K của tia X và chỉ ra rằng đồ thị Moseley ($\lambda^{-1/2}$ phụ thuộc Z) là (gần như) một đường thẳng.

(c) Chứng minh rằng tỉ số của độ dốc của đồ thị Moseley cho K_α và K_β (hai vạch K có bước sóng lớn nhất) là $(27/32)^{1/2}$.

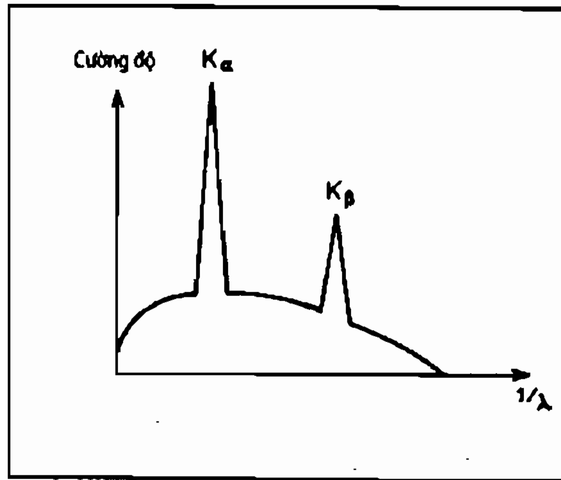
(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Phổ tia X bao gồm hai phần, phần liên tục và phần đặc trưng. Phổ liên tục có bước sóng ngắn nhất xác định bởi năng lượng của electron tới

$$\lambda_{min} = \frac{hc}{E} = \frac{12,4}{100}\text{Å} = 0,124\ \text{Å}.$$

Năng lượng cao nhất của vạch K của tia X của W là $13,6 \times 74^2$ eV = 74,5 keV, do vậy các vạch K của tia X chồng lên phổ liên tục như trong hình 1.37.



Hình 1.37

(b) Các mức năng lượng của nguyên tử vonfam được cho bởi

$$E_n = -\frac{RhcZ^{*2}}{n^2},$$

trong đó Z^* là điện tích hạt nhân hiệu dụng.

Các vạch K bắt nguồn từ chuyển dời về trạng thái cơ bản $(n \to 1)$

$$\frac{hc}{\lambda} = -\frac{RhcZ^{*2}}{n^2} + RhcZ^{*2},$$

từ đó suy ra

$$\lambda = \frac{n^2}{(n^2-1)RZ^{*2}},$$

hay

$$\lambda^{-\frac{1}{2}} = Z^* \sqrt{\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) R} \approx Z \sqrt{\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) R}. \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Do vậy, mối liên hệ giữa $\lambda^{-1/2}$ và Z là gần tuyến tính.

(c) Các vạch K_α được phát ra bởi chuyển tiếp $n = 2$ xuống $n = 1$, và vạch K_β từ $n = 3$ tới $n = 1$. Trong đồ thị Moseley, độ dốc của đường cong K_α là $\sqrt{\frac{3}{4}R}$ và độ dốc của K_β là $\sqrt{\frac{8}{9}R}$, do vậy, tỉ số hai độ dốc là

$$\frac{\sqrt{(3/4)R}}{\sqrt{(8/9)R}} = \sqrt{\frac{27}{32}}.$$

1103

(a) Nếu một nguồn bức xạ liên tục chiếu qua một chất khí, bức xạ ló ra được coi là một phổ hấp thụ. Trong vùng cực tím và quang học ta có các vạch hấp thụ, trong khi đó trong vùng tia X ta sẽ có biên hấp thụ. Tại sao lại có sự khác biệt này và nguồn gốc vật lý của hai hiện tượng này là gì?

(b) Cho năng lượng ion hóa của hydro nguyên tử là 13,6 eV, năng lượng của bức xạ từ chuyển tiếp $n = 2$ xuống $n = 1$ sẽ là bao nhiêu đối với boron ($z = 5$), được ion hóa 4 lần? (điện tích của ion là $+4e$).

(c) Bức xạ huỳnh quang K_α từ boron trung hòa sẽ có năng lượng E_k lớn hơn, bằng, hay nhỏ hơn năng lượng E trong phần (b)? Giải thích tại sao.

(d) Biên hấp thụ K của boron trung hòa có năng lượng E_k lớn hơn, bằng hay nhỏ hơn E_k trong phần (c)? Giải thích tại sao. (*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Ánh sáng nhìn thấy và ánh sáng tử ngoại chỉ có thể gây ra các chuyển

mức của các electron lớp ngoài bởi vì chúng có năng lượng tương đối thấp. Phổ hấp thụ bao gồm các đường tối do việc hấp thụ photon có năng lượng bằng hiệu năng lượng của hai trạng thái electron. Mặt khác, các photon với năng lượng trong vùng tia X có thể gây ra sự giải phóng các electron bên trong nguyên tử, làm ion hóa chúng. Điều này bởi vì trong trạng thái thông thường quỹ đạo bên ngoài thường được lấp bởi electron. Xuất phát từ tần số thấp hơn trong vùng tử ngoại các photon chỉ có thể làm bật ra các electron lớp ngoài cùng liên kết yếu. Khi tần số tăng, các photon trở nên đủ năng lượng để làm bật ra các electron ở các lớp trong, làm cho hệ số hấp thụ tăng lên đột biến, tạo ra một biên hấp thụ. Khi tần số tăng hơn nữa, hệ số hấp thụ giảm gần đúng theo ν^{-3} cho đến khi tần số đủ lớn để làm bật các electron ở lớp trong tiếp theo, và làm xuất hiện biên hấp thụ khác.

(b) Các mức năng lượng của một nguyên tử giống hydro được cho bởi

$$E_n = -\frac{Z^2e^2}{2n^2a_0} = -\frac{Z^2}{n^2}E_0\,,$$

trong đó E_0 là năng lượng ion hóa hydro. Do vậy

$$E_2 - E_1 = -Z^2E_0\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{1^2}\right) = 5^2 \times 13,6 \times \frac{3}{4}$$
$$= 255 \text{ eV}.$$

(c) Do bị chắn bởi các electron quỹ đạo của điện tích hạt nhân, năng lượng E_k của K_α phát ra từ một boron trung hòa nhỏ hơn năng lượng cho trong câu (b).

(d) Do năng lượng biên hấp thụ K, E_k tương ứng với năng lượng ion hóa của electron lớp K nên nó lớn hơn năng lượng cho trong câu (c).

1104

Đối với Zn, các biên hấp thụ tia X có các giá trị sau (theo keV)

$$K\ 9,67,\ L_{\rm I}\ 1,21,\ L_{\rm II}\ 1,05,\ L_{\rm III}\ 1,03\,.$$

Xác định bước sóng của vạch K_α.

Nếu Zn bị bắn phá bởi electron 5 keV, hãy xác định

(a) bước sóng của vạch tia X ngắn nhất và

(b) bước sóng của vạch tia X đặc trưng ngắn nhất có thể được phát ra.

Chú ý: mức K ứng với $n = 1$, ba mức L ứng với các trạng thái khác nhau với $n = 2$. Các biên hấp thụ là năng lượng thấp nhất mà tia X có thể bị hấp thụ bằng cách làm bật ra một electron từ các mức tương ứng. Vạch K_α ứng với một chuyển dời từ mức L thấp nhất.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

Chuỗi K_α bao gồm hai vạch, $K_{\alpha 1}(L_{III} \to K)$, $K_{\alpha 2}(L_{II} \to K)$

$$E_{K_{\alpha_1}} = K_{L_{III}} - E_K = 9,67 - 1,03 = 8,64 \text{ keV},$$

$$E_{K_{\alpha_2}} = K_{L_{II}} - E_K = 9,67 - 1,05 = 8,62 \text{ keV}.$$

Do vậy

$$\lambda_{K_{\alpha_1}} = \frac{hc}{E_{K_{\alpha_1}}} = \frac{12,41}{8,64} = 1,436 \text{ Å}.$$

$$\lambda_{K_{\alpha_2}} = \frac{hc}{E_{K_{\alpha_2}}} = 1,440 \text{ Å}.$$

(a) Bước sóng tia X nhỏ nhất có thể được phát ra bằng cách bắn phá nguyên tử với electron 5 keV là

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{E_{\max}} = \frac{12,41}{5} = 2,482 \text{ Å}.$$

(b) Ta có thể kích thích các electron ở mức năng lượng khác K bằng sự bắn phá với electron 5 keV, và gây ra sự phát các tia X đặc trưng khi các nguyên tử khử kích thích. Các tia X có năng lượng cao nhất có năng lượng $0 - E_I = 1,21$ keV, tương ứng với bước sóng 10,26 Å.

1105

Các tia X đặc trưng K_α được sinh ra bởi một nguyên tử có số nguyên tử Z được phát hiện bởi Moseley có năng lượng $13,6 \times (1 - \frac{1}{4})(Z - 1)^2$ eV.

(a) Giải thích các thừa số trong biểu thức.

(b) Cấu trúc tinh tế nào có thể tìm thấy cho các chuyển mức K_α? Các số lượng tử thích hợp là gì?

(c) Một số nguyên tử chuyển sang trạng thái năng lượng thấp hơn bởi một chuyển mức Auger. Mô tả quá trình này.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Trong công thức, 13,6 eV là năng lượng trạng thái cơ bản của nguyên tử hydro, nghĩa là năng lượng liên kết của một electron $1s$ với điện tích hạt nhân đơn vị, thừa số $(1 - \frac{1}{4})$ xuất hiện là do sự khác biệt về số lượng tử chính giữa trạng thái $n = 2$ và $n = 1$, và $(Z - 1)$ là điện tích hạt nhân hiệu dụng. Vạch K_α do đó bắt nguồn từ chuyển mức từ $n = 2$ đến $n = 1$.

(b) Vạch K_α thực tế có cấu trúc bội kép. Trong liên kết LS, trạng thái $n = 2$ tách thành 3 mức năng lượng: $^2S_{1/2}$, $^2P_{1/2}$, $^2P_{3/2}$, trong khi đó trạng thái $n = 1$ vẫn chỉ có một trạng thái đơn $^2S_{1/2}$. Theo quy tắc chọn lọc $\Delta L = \pm 1$, $\Delta J = 0, \pm 1 (0 \not\leftrightarrow 0)$, các chuyển mức được phép là

$$K_{\alpha 1}: \quad 2^2P_{3/2} \to 1^2S_{1/2}\,,$$

$$K_{\alpha 2}: \quad 2^2P_{1/2} \to 1^2S_{1/2}\,.$$

(c) Cơ sở vật lý của quá trình Auger là, sau khi một electron bị tách ra khỏi một lớp bên trong, một electron từ lớp ngoài sẽ nhảy vào lỗ trống vừa được tạo ra và một năng lượng thừa sẽ được giải phóng thông qua việc làm bật ra một electron khác, chứ không phát xạ một photon. Electron bị bật ra gọi là electron Auger. Ví dụ, sau khi một electron được tách ra khỏi lớp K, một electron lớp L có thể nhảy vào lỗ trống vừa được tạo ra và hiệu năng lượng được sử dụng để làm bật ra một electron từ lớp L hoặc một lớp bên ngoài khác. Electron sau cùng, một electron Auger có động năng là

$$E = -E_L - (-E_k) - E_L = E_k - 2E_L\,,$$

trong đó E_k và E_L là năng lượng ion hóa của lớp K và lớp L.

1106

Năng lượng liên kết của hai trạng thái $2p$ của niobi ($Z = 41$) là 2370 eV và 2465 eV. Đối với chì ($Z = 82$) năng lượng liên kết của các trạng thái $2p$ là 13035 eV và 15200 eV. Năng lượng liên kết $2p$ gần đúng tỉ lệ với $(Z - a)^2$ trong khi đó tách mức giữa $2P_{1/2}$ và $2P_{3/2}$ tỉ lệ với $(Z - a)^4$. Giải thích điều đó

và phát biểu giá trị hợp lý cho hằng số a. (*Columbia*)

Lời giải:

Electron $2p$ chuyển động trong trường thế xuyên tâm của hạt nhân bao bọc bởi các electron lớp trong. Xét tới cấu trúc tinh tế do liên kết ls, năng lượng của electron $2p$ cho bởi

$$E = -\frac{1}{4}Rhc(Z-a_1)^2 + \frac{1}{8}Rhc\alpha^2(Z-a_2)^4\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{j+\frac{1}{2}}\right)$$

$$= -3,4(Z-a_1)^2 + 9,06\times10^{-5}(Z-a_2)^4\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{j+\frac{1}{2}}\right),$$

trong đó lấy $Rhc = 13,6$ eV, $\alpha = 1/137$. Chú ý rằng $-E$ cho ta năng lượng liên kết và $^2P_{3/2}$ ứng với năng lượng thấp hơn dựa vào quy tắc Hund. Đối với Nb, ta có $95 = 9,06\times10^{-5}(41-a_2)^4\times0,5$, hay $a_2 = 2,9$, từ đó ta có $a_1 = 14,7$. Tương tự ta có đối với Pb: $a_1 = 21,4$, $a_2 = -1,2$.

1107

(a) Hãy mô tả chi tiết một bố trí thí nghiệm để xác định bước sóng của vạch đặc trưng trong một phổ phát xạ tia X.

(b) Trong phép đo phổ tia X của nhiều nguyên tố khác nhau, Moseley đã có thể gán điện tích hạt nhân cho mỗi nguyên tố. Giải thích rõ ràng làm thế nào việc gán đó có thể thực hiện.

(c) Các vạch tia X rời rạc được phát ra từ một bia nào đó nói chung không thể quan sát như là các vạch hấp thụ trong cùng một vật liệu. Giải thích tại sao, ví dụ như các vạch K_α không thể quan sát trong phổ hấp thụ của các nguyên tố nặng.

(d) Giải thích nguồn gốc của phổ liên tục của tia X được phát ra khi bia bị bắn phá bởi các electron với năng lượng cho trước. Đặc điểm nào của phổ này mâu thuẫn với lý thuyết điện từ cổ điển?

(*Columbia*)

Lời giải:

(a) Bước sóng có thể xác định bằng phương pháp nhiễu xạ tinh thể. Như

trình bày trong hình 1.38, các tia X được chuẩn trực bởi các khe hẹp S_1, S_2, bay tới mặt tinh thể C, mà tinh thể này có thể quay quanh một trục thẳng đứng. Phim ảnh P tạo thành một cung quanh C. Nếu điều kiện $2d\sin\theta = n\lambda$, được thỏa mãn, trong đó d là khoảng cách giữa các mặt phẳng Bragg kế cận và n là số nguyên, thì một vạch nhiễu xạ sẽ xuất hiện trên tấm phim tại A. Sau khi quay tinh thể, một vạch nhiễu xạ khác sẽ xuất hiện tại A' đối xứng với A. Do $4\theta = \text{arc}AA'/CA$, ta có thể thu được bước sóng λ.

3d (l = 2)	-1,5 eV
3p (l = 1)	- 3,0 eV
3s (l = 0)	- 5,1 eV

Hình 1.38

(b) Mỗi nguyên tố có phổ tia X đặc trưng riêng, trong đó dãy K có bước sóng ngắn nhất và bên cạnh đó là dãy L, v.v. Moseley phát hiện ra rằng chuỗi K của các nguyên tố khác nhau có cùng một cấu trúc, chỉ khác các bước sóng. Vẽ đồ thị $\sqrt{\tilde{\nu}}$ theo số hiệu nguyên tử Z, ông đã tìm ra một mối quan hệ tuyến tính gần đúng

$$\tilde{\nu} = R(Z-1)^2\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right),$$

trong đó $R = R_H c$, R_H là hằng số Rydberg và c là vận tốc ánh sáng trong chân không.

Như vậy, nếu tìm được bước sóng hoặc tần số của K_α của một nguyên tố nhất định ta có thể tìm được số hiệu nguyên tử Z của nó.

(c) Các vạch K_α biểu thị cho sự chênh lệch năng lượng giữa electron ở các lớp bên trong khác nhau. Thông thường các mức năng lượng này đều bị chiếm đầy và các chuyển mức không thể diễn ra giữa chúng bằng cách hấp thụ tia X với năng lượng bằng năng lượng sai khác giữa các mức đó. Tia X chỉ có thể ion hóa các electron lớp trong. Do vậy, chỉ có các biên hấp thụ, nhưng không có các vạch hấp thụ xuất hiện.

(d) Khi các electron đập vào bia chúng bị giảm tốc và do đó phát ra bức xạ hãm có tần số liên tục với bước sóng ngắn nhất xác định bởi động năng cực đại của các electron, $\lambda = \frac{hc}{E_e}$. Mặt khác, theo lý thuyết điện từ cổ điển, động năng của các electron chỉ có thể tác dụng tới cường độ phổ, chứ không ảnh

hưởng tới bước sóng.

1108

Trong vùng tia X, khi năng lượng photon giảm thì tiết diện hấp thụ tia X tăng đơn điệu, ngoại trừ sự giảm mạnh tiết diện hấp thụ tại các năng lượng photon nhất định đặc trưng cho vật liệu hấp thụ. Đối với Zn ($Z = 30$) bốn giá trị lớn nhất của các suy giảm này tại các năng lượng photon 9678 eV, 1236 eV, 1047 eV và 1024 eV.

(a) Xác định các chuyển mức tương ứng với các suy giảm này theo tiết diện hấp thụ tia X.

(b) Xác định các chuyển mức và năng lượng của các vạch phát xạ tia X của Zn mà năng lượng của chúng lớn hơn 5000 eV.

(c) Tính năng lượng ion hóa của Zn^{29+} (nghĩa là nguyên tử Z với 29 electron bị tách ra). (Gợi ý: năng lượng ion hóa của hydro là 13,6 eV).

(d) Tại sao kết quả trong phần (c) không phù hợp lắm với kết quả 9678 eV?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Các năng lượng 9,768, 1,236, 1,047 và 1,024 keV ứng với năng lượng ion hóa của một electron $1s$, một electron $2s$ và của mỗi electron trong hai electron $2p$. Có nghĩa là, năng lượng cần để tách các electron tương ứng ra khoảng cách vô cùng so với nguyên tử.

(b) Tia X của Zn với năng lượng lớn hơn 5 keV được phát ra trong chuyển mức của electron từ một lớp khác tới lớp K. Cụ thể là tia X được phát ra trong chuyển mức từ lớp L xuống lớp K là

$$K_{\alpha 1}: \quad E = -1,024 - (-9,678) = 8,654 \text{ keV}, \qquad (L_{\text{III}} \rightarrow K)$$

$$K_{\alpha 2}: \quad E = -1,047 - (-9,678) = 8,631 \text{ keV}. \qquad (L_{\text{II}} \rightarrow K)$$

(c) Năng lượng ion hóa của Zn^{29+} (nguyên tử tương tự hydro) là

$$E_{Zn} = 13,6\ Z^2 = 11,44 \text{ keV}.$$

(d) Năng lượng 9,678 keV ứng với năng lượng ion hóa của electron $1s$ trong nguyên tử Zn trung hòa. Do hiệu ứng chắn tĩnh điện của các electron khác nên điện tích hiệu dụng của hạt nhân $Z^* < 30$. Và khi các electron càng

xa hạt nhân thì tương tác giữa nó với hạt điện tích hạt nhân Z^* càng nhỏ. Do vậy, năng lượng ion hóa của electron $1s$ của hạt nhân Zn trung hòa sẽ nhỏ hơn nhiều năng lượng đó đối với ion Zn^{29+}.

1109

Mô tả quá trình tính "thừa số Landé g", thừa số xác định momen từ hiệu dụng của một nguyên tử trong trường yếu.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Gọi momen động lượng quỹ đạo toàn phần của các electron trong nguyên tử là $\mathbf{P}_L$, momen động lượng spin toàn phần là $\mathbf{P}_S$ ($\mathbf{P}_L$ và $\mathbf{P}_S$ đều tính theo đơn vị $\hbar$). Khi đó, các momen từ tương ứng là $\boldsymbol{\mu}_L = -\mu_B \mathbf{P}_L$ và $\boldsymbol{\mu}_S = -2\mu_B \mathbf{P}_S$, trong đó μ_B manheton Bohr. Giả sử momen từ toàn phần là $\boldsymbol{\mu}_J = -g\mu_B \mathbf{P}_J$, trong đó g là thừa số Landé. Do

$$\mathbf{P}_J = \mathbf{P}_L + \mathbf{P}_S\,,$$

$$\boldsymbol{\mu}_J = \boldsymbol{\mu}_L + \boldsymbol{\mu}_S = -\mu_B(\mathbf{P}_L + 2\mathbf{P}_S) = -\mu_B(\mathbf{P}_J + \mathbf{P}_S)\,,$$

ta có

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}_J &= \frac{\boldsymbol{\mu}_J \cdot \mathbf{P}_J}{P_J^2}\mathbf{P}_J \\ &= -\mu_B \frac{(\mathbf{P}_J + \mathbf{P}_S)\cdot \mathbf{P}_J}{P_J^2}\mathbf{P}_J \\ &= -\mu_B \frac{P_J^2 + \mathbf{P}_S \cdot \mathbf{P}_J}{P_J^2}\mathbf{P}_J \\ &= -g\mu_B \mathbf{P}_J\,.\end{aligned}$$

từ đó cho ta

$$g = \frac{P_J^2 + \mathbf{P}_S \cdot \mathbf{P}_J}{P_J^2} = 1 + \frac{\mathbf{P}_S \cdot \mathbf{P}_J}{P_J^2}\,.$$

Do

$$\mathbf{P}_L \cdot \mathbf{P}_L = (\mathbf{P}_J - \mathbf{P}_S)\cdot(\mathbf{P}_J - \mathbf{P}_S) = P_J^2 + P_S^2 - 2\mathbf{P}_J \cdot \mathbf{P}_S\,.$$

ta lại có

$$\mathbf{P}_J \cdot \mathbf{P}_S = \frac{1}{2}(P_J^2 + P_S^2 - P_L^2)\,.$$

Do vậy

$$
\begin{aligned}
g &= 1 + \frac{P_J^2 + P_S^2 - P_L^2}{2P_J^2} \\
&= 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} .
\end{aligned}
$$

1110

Trong thí nghiệm phản hồi spin, một mẫu chất lỏng chứa proton (glyxerin) được đặt trong từ trường không đổi nhưng không đồng nhất không gian khoảng vài kilogaoxơ. Một xung (vài micro giây) của một trường tần số vô tuyến (khoảng vài gaoxơ) được tác dụng vuông góc với trường không đổi. Ngay sau đó một tín hiệu tần số vô tuyến có thể thu được từ một cuộn dây quấn quanh mẫu. Nhưng tín hiệu đó sẽ biết mất trong một vài phần của mili giây trừ phi có một sự chuẩn bị đặc biệt nào đó để làm cho trường có đồng nhất không gian, trong trường hợp đó tín hiệu sẽ tồn tại trong thời gian dài. Nếu một xung tần số vô tuyến dài thứ hai được đưa vào, chẳng hạn 15 mili giây sau xung thứ nhất, thì sẽ quan sát được một tín hiệu tần số vô tuyến sau xung thứ hai 15 mili giây (phản hồi).

(a) Làm thế nào để tính được tần số thích hợp của xung tần số vô tuyến?

(b) Các yêu cầu cần thiết của tính đồng nhất không gian của trường cố định là gì?

(c) Giải thích sự hình thành của tín hiệu phản hồi.

(d) Làm thế nào để tính độ dài thích hợp của xung tần số vô tuyến đầu tiên?

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Trường tần số vô tuyến phải có tần số đủ cao để làm cho hạt nhân cộng hưởng từ

$$\hbar\omega = \gamma_p \hbar H_0(\mathbf{r}) ,$$

hay

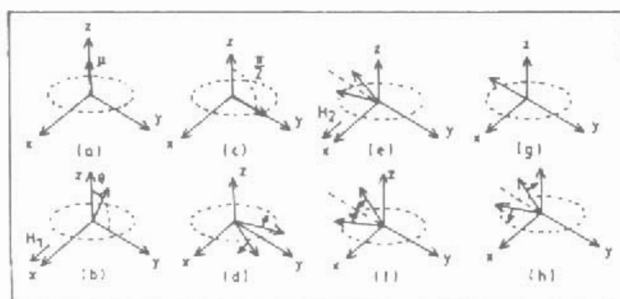
$$\omega = \gamma_p \langle H_0(\mathbf{r}) \rangle ,$$

trong đó γ_p là tỉ số từ hồi chuyển, và $\langle H_0(\mathbf{r}) \rangle$ là giá trị trung bình của từ trường trong mẫu.

(b) Giả sử độ biến thiên cực đại của H_0 trong mẫu là $(\Delta H)_m$. Khi đó, thời gian phân rã là $\frac{1}{\gamma_p(\Delta H)_m}$. Ta cần $\frac{1}{\gamma_p}(\Delta H)_m > \tau$, trong đó τ là khoảng thời gian giữa hai xung. Do vậy, ta cần

$$(\Delta H)_m < \frac{1}{\gamma_p \tau}.$$

(c) Chọn trục z dọc theo phương của từ trường cố định H_0. Tại $t = 0$, các momen từ song song với H_0 (Hình 1.39(a)). Sau khi đưa vào xung từ thứ nhất H_1 theo theo phương x, các momen từ sẽ bị lệch khỏi phương z (hình 1.39(b)). Góc quay θ của các momen từ có thể được điều chỉnh bằng cách thay đổi độ rộng của xung từ, như được thể hiện trong hình 1.39(c), khi đó $\theta = 90°$.



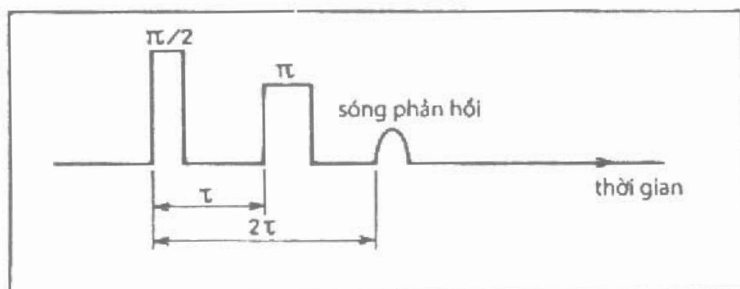
Hình 1.39

Các momen từ cũng biến đổi quanh phương của H_0. Tính không đồng nhất không gian của từ trường cố định H_0 làm cho vận tốc góc biến đổi $\omega = \gamma_p H_0$ sẽ khác nhau ở các điểm khác nhau, kết quả là các momen từ xòe ra như ở hình 1.39 (d). Nếu một xung thứ hai rộng hơn được đưa vào theo phương x tại $t = \tau$ (chẳng hạn $t = 15$ ms), nó làm cho các momen từ quay 180° quanh trục x (hình 1.39(e)). Lúc này, sự tuần tự của momen từ bị đảo ngược (hình 1.39(f)). Tại $t = 2\tau$, phương của các momen từ lại qua lại như cũ (hình 1.39(g)). Ở thời điểm này, momen từ toàn phần và tốc độ thay đổi của nó sẽ là cực đại, sinh ra một tính hiệu cộng hưởng và tạo ra một sóng phản hồi (hình 1.40). Sau đó, các momen từ lại phân tán và tín hiệu biến mất, như trong hình 1.39(h).

(d) Xung vô tuyến đầu tiên làm các momen từ quay một góc θ quanh trục x. Để tăng sóng phản hồi, momen từ đã quay cần vuông góc với H_0, tức là, $\theta \approx \pi/2$. Điều đó có nghĩa là

$$\gamma_p H_1 t \approx \pi/2,$$

nghĩa là độ rộng của xung thứ nhất sẽ là $t \approx \frac{\pi}{2\gamma_p H_1}$.



Hình 1.40

1111

Chỉ chọn MỘT trong các máy quang phổ sau đây:

Cộng hưởng spin electron liên tục

Cộng hưởng từ hạt nhân xung

Phổ học Mössbauer

(a) Vẽ sơ đồ khối của các thiết bị cần thiết để thực hiện phổ học bạn đã chọn.

(b) Mô tả ngắn gọn hoạt động của thiết bị này.

(c) Mô tả kết quả của một phép đo để làm sáng tỏ thông tin định lượng có thể thu được từ dữ liệu và ý nghĩa vật lý của thông tin định lượng đó.

(SUNY, Buffalo)

Lời giải:

(1) **Cộng hưởng spin electron liên tục**

(a) Sự lắp đặt thí nghiệm được mô tả trong hình 1.41.

(b) *Hoạt động.* Mẫu được đặt trong hốc cộng hưởng được đặt trong từ trường tĩnh B_0. Các vi sóng tần số cố định B_1 được tạo ra trong klystron được dẫn tới cầu T. Khi năng lượng vi sóng được phân bố đồng đều cho nhánh 1 và nhánh 2, thì sẽ không có tín hiệu trong đầu dò sóng. Do B_0 biến thiên, nên khi điều kiện cộng hưởng được thỏa mãn thì mẫu hấp thụ năng lượng và sự cân bằng giữa 1 và 2 bị phá vỡ.

Tín hiệu hấp thụ được truyền tới đầu dò thông qua nhánh 3, và được hiển thị

Hình 1.41

Hình 1.42

hoặc ghi lại ở đó.

(c) *Phân tích dữ liệu.* Màn hình có thể hiển thị hai loại đồ thị vi sai (hình 1.42), dạng Gauss hoặc Lagrange, từ đó có thể thu được các thông tin dưới đây.

(i) Thừa số g có thể tính từ B_0 ở tâm và tần số vi sóng.

(ii) Độ rộng vạch có thể tìm được từ khoảng cách từ đỉnh tới đỉnh ΔB_{pp} của tín hiệu vi sai.

(iii) Thời gian phục hồi T_1 và T_2 có thể thu được bằng phương pháp bão hòa, trong đó T_1 và T_2 (profin Lorenz) được cho bởi

$$T_2(\text{spin–spin}) = \frac{1,3131 \times 10^{-7}}{g\Delta B^0_{pp}},$$

$$T_1 = \frac{0,9848 \times 10^{-7}\Delta B^0_{PP}}{gB_1^2}\left(\frac{1}{s} - 1\right).$$

Ở trên g là thừa số Landé, ΔB^0_{PP} là khoảng cách đỉnh tới đỉnh bão hòa (tính theo gaoxơ), B_1 là từ trường tương ứng với biên của vạch phổ, và s là thừa số bão hòa.

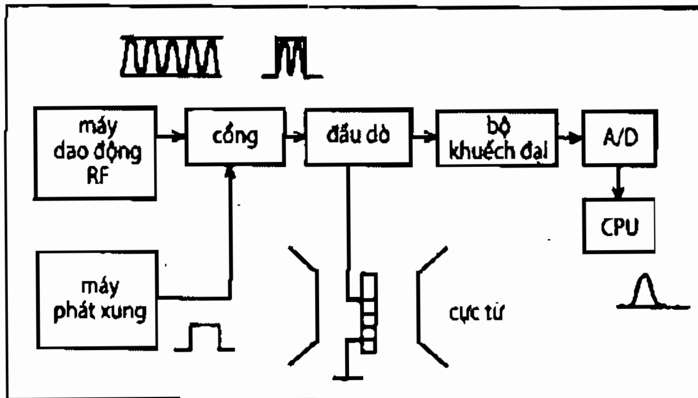
(iv) Các cường độ tương đối.

Bằng cách so sánh với phổ chuẩn, từ thừa số g và profin dạng vạch ta có thể xác định được phổ đó thuộc về loại nguyên tử thuận từ nào. Nếu có một vài loại hạt nhân thuận từ trong mẫu, cường độ tương đối của chúng sẽ cho các lượng tương đối. Và từ cấu trúc của phổ ta cũng có thể tìm được spin hạt nhân I.

(2) **Cộng hưởng từ hạt nhân xung**

(a) Hình 1.43 thể hiện sơ đồ khối của sự lắp đặt thí nghiệm.

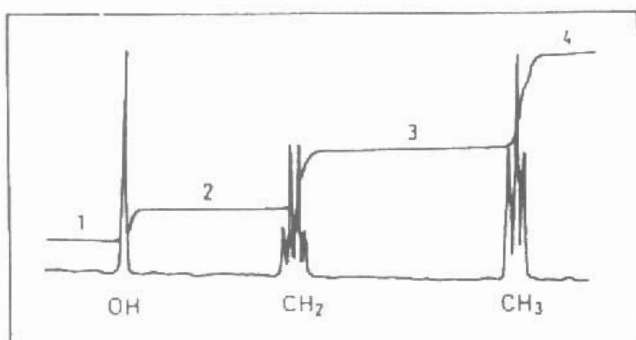
(b) *Hoạt động*. Về cơ bản, một từ trường ngoài được sử dụng để tách các trạng thái spin của hạt nhân. Khi đó, một trường xung tần số vô tuyến được đưa vào theo phương vuông góc với từ trường tĩnh để tạo các chuyển mức cộng hưởng giữa các trạng thái spin. Tín hiệu hấp thụ thu được từ cùng một cuộn dây được khuếch đại, biến đổi Fourier, và hiển thị trên màn hiển thị.



Hình 1.43

(c) Thông tin có thể thu được là vị trí và số lượng các đỉnh hấp thụ, cường độ tích hợp của các đỉnh hấp thụ, thời gian phục hồi T_1 và T_2.

Vị trí của các đỉnh hấp thụ liên hệ với dịch chuyển hóa học. Từ số lượng và cường độ tích hợp của các đỉnh, cấu trúc của hợp chất có thể rút ra do các loại nguyên tử khác nhau có cách hóa hợp khác nhau với các nguyên tử khác. Đối với một cách hóa hợp cho trước, cường độ phổ tích phân tỉ lệ với số lượng nguyên tử. Do vậy, tỉ số nguyên tử trong các dạng kết hợp khác nhau có thể xác định từ tỉ số cường độ phổ. Số đỉnh liên quan tới sự liên kết giữa các hạt nhân.

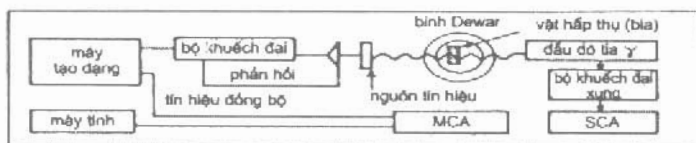


Hình 1.44

Ví dụ, hình 1.44 mô tả phổ cộng hưởng từ hạt nhân của H trong rượu. Ba nhóm phổ cộng hưởng từ hạt nhân xuất hiện. Đỉnh đơn ở bên trái xuất phát từ tổ hợp H và O. Bốn đỉnh ở giữa là phổ cộng hưởng từ hạt nhân của H trong CH_2, và 3 đỉnh ở bên phải là phổ cộng hưởng từ hạt nhân của H trong CH_3. Hình dạng vạch và số các đỉnh liên quan tới việc liên kết giữa CH_2 và CH_3. Sử dụng đường nằm ngang 1 như là một đường cơ sở, độ cao tương đối của các đường 2, 3, 4 cho ta cường độ tích hợp tương đối của 3 phổ, nó có tỉ số chính xác bằng 1:2:3.

(3) **Phổ học Mössbauer**

(a) Hình 1.45 mô tả sơ đồ khối của máy.

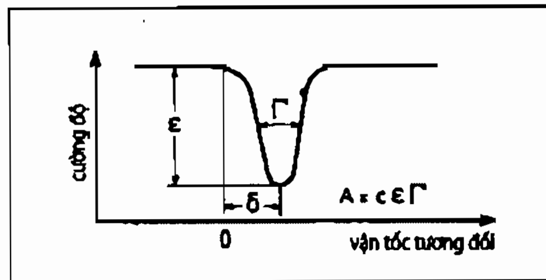


Hình 1.45

(b) *Hoạt động*. Nguồn tín hiệu chuyển động tới vật hấp thụ cố định với vận

tốc v được biến điệu bởi tín hiệu của máy phát sóng. Trong lúc hấp thụ cộng hưởng, đầu dò tia γ phía sau vật hấp thụ sẽ cho một xung tín hiệu, nó được lưu trong máy phân tích đa kênh MCA. Tín hiệu đồng bộ sẽ cho ta sự tương quan giữa vị trí của xung và vận tốc v, từ đó, ta có thể tìm được đường cong hấp thụ cộng hưởng.

(c) Các thông tin có thể thu được là vị trí δ của đỉnh hấp thụ (hình 1.46) , cường độ tích phân của đỉnh hấp thụ A, độ rộng đỉnh Γ.



Hình 1.46

Bên cạnh hiệu ứng tương tác giữa các nucleon bên trong hạt nhân, các mức năng lượng hạt nhân chịu ảnh hưởng của cấu trúc tinh thể, các electron quỹ đạo và các nguyên tử liền kề. Trong phổ Mössbauer, độ dịch chuyển đồng phân δ biến đổi theo môi trường hóa học. Ví dụ, trong số các dịch chuyển đồng phân Sn^{2+}, Sn^{4+} và Sn-β kim loại, thì độ dịch chuyển đồng phân của Sn^{2+} là lớn nhất, của Sn-β thứ hai, và nhỏ nhất là Sn^{4+}.

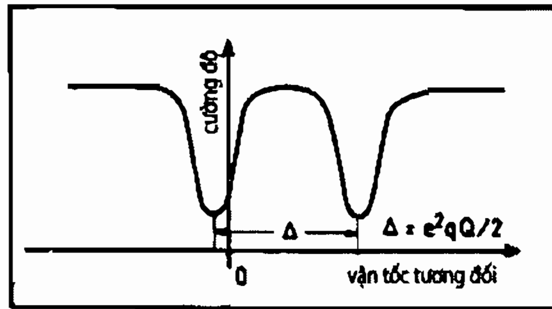
Thời gian sống của một trạng thái hạt nhân kích thích có thể được xác định từ độ rộng Γ của đỉnh bằng nguyên lý bất định $\Gamma\tau \sim \hbar$.

Phổ Mössbauer của một số nguyên tố cho thấy sự tách tứ cực, như trong hình 1.47. Momen tứ cực $Q = 2\Delta/e^2q$ của hạt nhân có thể xác định từ việc tách mức này, trong đó q là gradien điện trường ở vị trí của hạt nhân, e là điện tích electron.

1112

Chọn MỘT hiện tượng trong danh sách dưới đây, và trả lời các câu hỏi sau đây về nó:

(1) Hiệu ứng đó là gì? (ví dụ: "Hiệu ứng Mössbauer là...")



Hình 1.47

(2) Làm thế nào để đo được nó?

(3) Nêu một vài nguồn nhiễu có thể ảnh hưởng tới phép đo.

(4) Tính chất nào của mẫu vật hoặc hằng số vật lý nào có thể đo được bằng cách xem xét hiệu ứng?

Chọn một:

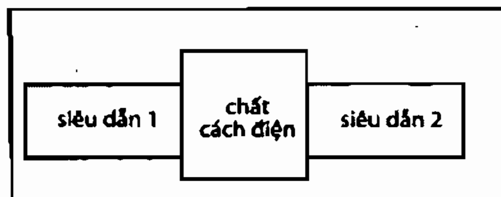
(a) Cộng hưởng spin electron. (b) Hiệu ứng Mössbauer. (c) Hiệu ứng Josephson. (d) Cộng hưởng từ hạt nhân. (e) Hiệu ứng Hall.

(*SUNY, Buffalo*)

Lời giải:

(a) (b) (d) Xem trong **Bài tập 1111**.

(c) *Hiệu ứng Josephson*: Dưới những điều kiện thích hợp, các electron siêu dẫn có thể đi từ một chất siêu dẫn này sang một chất siêu dẫn khác qua một hàng rào cách điện rất mỏng. Hiện tượng này gọi là hiệu ứng Josephson (hình. 1.48).



Hình 1.48

Hiệu ứng Josephson có hai loại, hiệu ứng Josephson dòng một chiều và hiệu

ứng Josephson dòng xoay chiều.

Hiệu ứng Josephson dòng một chiều liên quan tới hiện tượng một dòng điện một chiều đi qua tiếp xúc Josephson mà không có điện trường hay từ trường ngoài tác dụng. Mật độ dòng siêu dẫn có thể biểu diễn bằng $J_s = J_c \sin\varphi$, trong đó J_c là mật độ dòng cực đại có thể đi qua lớp tiếp xúc, φ là hiệu số pha của các hàm sóng trong các chất siêu dẫn ở hai phía của hàng rào cách điện.

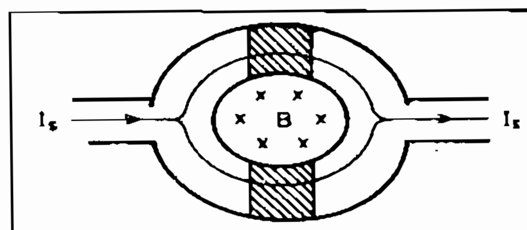
Hiệu ứng Josephson dòng xoay chiều xuất hiện trong trường hợp sau:

1. Khi có hiệu điện thế một chiều giữa hai phía của tiếp xúc Josephson, một dòng tần số vô tuyến $J_s = J_c \sin(\frac{2e}{\hbar}Vt + \varphi_0)$ được đưa vào tiếp xúc Josepson, trong đó V là hiệu điện thế một chiều đặt lên hai phía của tiếp xúc.

2. Nếu một tiếp giáp Josephson dưới tác dụng của một hiệu điện thế V được đặt vào một vi sóng tần số ω thỏa mãn điều kiện $V = n\hbar\omega/2e$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), một thành phần dòng một chiều sẽ xuất hiện trong dòng siêu dẫn đi qua lớp tiếp xúc.

Hiệu ứng Josephson có thể sử dụng cho phép đo chính xác $e/\hbar$. Trong thí nghiệm lớp tiếp xúc Josephson được đặt vào một vi sóng có tần số cố định. Bằng cách điều chỉnh hiệu điện thế V, các bước dòng có thể xuất hiện trong đồ thị I-V, và $e/\hbar$ được xác định từ biểu thức $\Delta V = \hbar\omega/2e$, trong đó ΔV là độ chênh lệch điện thế giữa các bậc liền nhau.

Tiếp xúc Josephson cũng có thể được sử dụng như một đầu dò vi sóng nhạy. Hơn nữa, $\Delta V = \hbar\omega/2e$ có thể coi như một thế chuẩn.



Hình 1.49

Sử dụng hiệu ứng biến điệu trên dòng tiếp xúc của từ trường chúng ta có thể đo các từ trường yếu. Với một cấu trúc vành bao gồm hai lớp tiếp xúc Josephson song song như trong hình 1.49 ("máy giao thoa lượng tử hai lớp

tiếp xúc"), dòng được cho bởi

$$I_s = 2I_{s0}\sin\varphi_0\cos\left(\frac{\pi\Phi}{\varphi_0}\right),$$

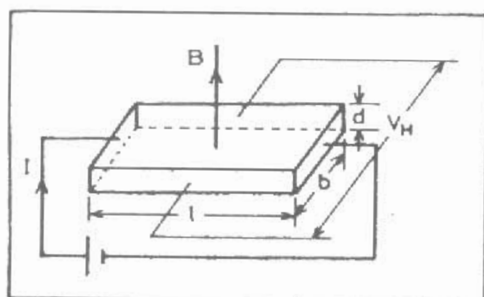
trong đó, I_{s0} là dòng siêu dẫn cực đại có thể được tạo ra trong một tiếp xúc Josephson, $\phi_0 = \frac{h}{2e}$ là lượng tử thông lượng từ, Φ là thông từ trong vành siêu dẫn. Ta có thể đo được các từ trường nhỏ tới 10^{-11} gaoxơ.

(e) **Hiệu ứng Hall**. Khi một mẫu kim loại hoặc bán dẫn với dòng điện được đặt trong một từ trường đều vuông góc với dòng điện, một điện trường ngang, vuông góc với cả dòng điện và từ trường sẽ được sinh ra theo chiều ngang của mẫu. Hiện tượng này gọi là là hiệu ứng Hall. Từ trường đều **B**, mật độ dòng điện j, và điện trường Hall **E** có mối quan hệ: $\mathbf{E} = R_H\mathbf{B}\times \mathrm{j}$, trong đó tham số R_H gọi là hệ số Hall.

Trong hình 1.50, một mẫu hình khối chữ nhật mỏng được đặt trong từ trường đều **B**. Hệ số Hall R_H và độ dẫn điện σ của mẫu có thể tìm được bằng cách đo hiệu điện thế Hall V_H, từ trường B, dòng I và kích thước của mẫu

$$R_H = \frac{V_H d}{IB}, \qquad \sigma = \frac{Il}{Ubd},$$

trong đó U là hiệu điện thế của nguồn dòng. Từ R_H và σ đo được, ta có thể biết được loại và mật độ N của hạt tải điện trong bán dẫn, cũng như độ linh động của chúng μ.



Hình 1.50

Hiệu ứng Hall sinh ra do tác dụng của lực Lorentz lên các hạt tải dòng điện. Ở trạng thái cân bằng, lực từ tác dụng lên các hạt tải cân bằng với lực do điện trường Hall

$$q\mathbf{E} = q\mathbf{v}\times\mathbf{B},$$

từ đó ta có

$$\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{1}{Nq}\mathbf{j} \times \mathbf{B}\,.$$

Do vậy $R_H = \frac{1}{Nq}$, trong đó q là điện tích của các hạt tải ($|q| = e$), từ đó ta có thể xác định được loại bán dẫn (p hoặc n dựa vào dấu của R_H là dương hay âm). Mật độ hạt tải và độ linh động có thể tính bởi

$$N = \frac{1}{qR_H}\,,$$

$$\mu = \frac{\sigma}{Ne} = \sigma|R_H|\,.$$

1113

Phát biểu ngắn gọn về sự quan trọng của mỗi thí nghiệm sau trong sự phát triển của vật lý nguyên tử.

(a) Thí nghiệm Faraday về điện phân.

(b) Thí nghiệm của Bunsen và Kirchhoff với máy quang phổ.

(c) Thí nghiệm của J. J. Thomson về e/m của các hạt trong một bình phóng điện.

(d) Thí nghiệm về tán xạ hạt α của Geiger và Marsdens.

(e) Thí nghiệm tán xạ tia X của Barkla.

(f) Thí nghiệm Frank-Hertz.

(g) Thí nghiệm e/m của các ion neon của J. J. Thomson.

(h) Thí nghiệm Stern-Gerlach.

(i) Thí nghiệm Lamb-Rutherford.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Thí nghiệm điện phân của Faraday là thí nghiệm đầu tiên chỉ ra rằng có một đơn vị cơ bản của điện tích $e = F/N_a$, trong đó F là hằng số Faraday và N_a là số Avogadro. Điện tích của mọi vật đều là một số nguyên lần của e.

(b) Bunsen và Kirchhoff phân tích các vạch Fraunhofer của phổ mặt trời và đưa ra một giải thích thỏa đáng đầu tiên cho nguồn gốc của chúng rằng các vạch đó sinh ra từ sự hấp thụ ánh sáng với bước sóng nhất định bởi khí quyển

của mặt trời và trái đất. Nghiên cứu của họ dẫn tới sự hình thành phổ học và dẫn tới sự phát hiện ra các nguyên tố rubidium và xesi.

(c) J. J. Thomson phát hiện ra electron bằng việc đo trực tiếp tỉ số e/m của tia catốt. Nó đánh dấu sự bắt đầu của sự hiểu biết của chúng ta về cấu trúc nguyên tử.

(d) Thí nghiệm tán xạ hạt α của Geiger và Marsden tạo nên cơ sở thực nghiệm cho mô hình nguyên tử của Rutherford.

(e) Thí nghiệm của Barkla về sự tán xạ tia X dẫn tới sự phát hiện phổ tia X đặc trưng của các nguyên tố cung cấp một phương pháp quan trọng để nghiên cứu cấu trúc nguyên tử.

(f) Thí nghiệm Frank – Hertz về tán xạ không đàn hồi của electron bởi nguyên tử cho thấy sự tồn tại của các mức năng lượng không liên tục trong nguyên tử.

(g) Phép đo tỉ số e/m của ion neon của J. J. Thomson dẫn tới sự phát hiện của đồng vị ^{20}Ne và ^{22}Ne.

(h) Thí nghiệm Stern – Gerlach chứng minh rằng chỉ tồn tại một định hướng cho phép nhất định của momen động lượng của một nguyên tử.

(i) Thí nghiệm Lamb-Rutherford cung cấp bằng chứng cho sự tương tác của một electron với trường bức xạ điện từ, từ đó củng cố cho lý thuyết điện động lực lượng tử.

1114

Trong thí nghiệm Stern-Gerlach có sử dụng nguyên tử hydro.

(a) Điều gì quy định số vạch xuất hiện? Đặc điểm nào của mẫu xác định độ tách biệt giữa các vạch?

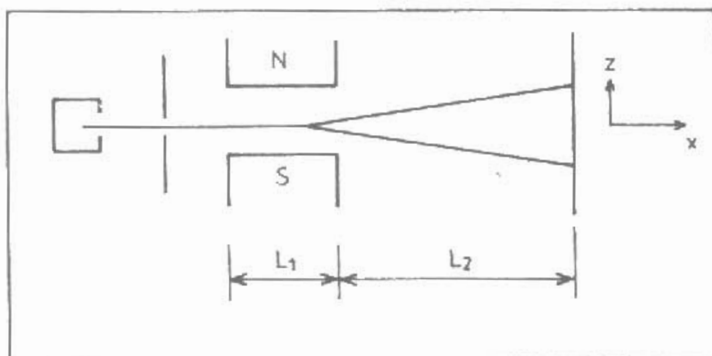
(b) Làm một phép ước lượng độ tách biệt giữa hai vạch nếu thí nghiệm Stern – Gerlach tiến hành với nguyên tử H. Có thể đặt bất cứ giả thiết hợp lý nào về cách lắp đặt thí nghiệm. Nếu không nhớ các hằng số, hãy chỉ ra có thể tìm thấy nó ở đâu và đơn vị của nó là gì trong công thức thu được.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Một chùm hẹp các nguyên tử được cho đi qua một từ trường không đồng nhất với gradien $\frac{dB}{dz}$ vuông góc với phương chuyển động của chùm hạt. Gọi độ dài của từ trường là L_1, độ dài đường đi của các nguyên tử hydro sau

khi đi qua từ trường là L_2 (hình 1.51).



Hình 1.51

Momen từ của nguyên tử hydro ở trạng thái cơ bản là $\mu = g\mu_B \mathbf{J} - 2\mu_B \mathbf{J}$. Trong từ trường không đồng nhất, gradien $\frac{\partial B}{\partial z}\mathbf{i}_z$ tác dụng lên momen từ một lực $F_z = 2\mu_B M_J(\frac{\partial B}{\partial z})$. Do $J = \frac{1}{2}$, $M_J = \pm\frac{1}{2}$ và chùm hạt bị tách thành hai thành phần.

Sau khi ra khỏi từ trường một nguyên tử sẽ nhận được một vận tốc ngang là $\frac{F_z}{m} \cdot \frac{L_1}{v}$ và một dịch chuyển ngang là $\frac{1}{2}\frac{F_z}{m}(\frac{L_1}{v})^2$, trong đó m và v lần lượt là khối lượng và vận tốc dài song song của nguyên tử. Khi chùm hạt đập vào màn hình sự tách biệt giữa các vạch là

$$\frac{\mu_B L_1}{mv^2}(L_1 + 2L_2)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\frac{\partial B}{\partial z}.$$

(b) Giả sử $L_1 = 0,03$ m, $L_2 = 0,10$ m, $dB/dz = 10^3$ T/m, $v = 10^3$ m/s. Ta có

$$d = \frac{0,927 \times 10^{-23} \times 0,03}{1,67 \times 10^{-27} \times 10^6} \times (0,03 + 2 \times 0,10) \times 10^3$$

$$= 3,8 \times 10^{-2} \text{ m} = 3,8 \text{ cm}.$$

1115

Hãy mô tả ngắn gọn thí nghiệm Stern-Gerlach và trả lời các câu hỏi sau:

(a) Tại sao từ trường phải không đồng nhất?

(b) Làm thế nào để thu được từ trường không đồng nhất đó?

(c) Dạng phổ nào thu được với một chùm nguyên tử hydro ở trạng thái cơ bản? Tại sao?

(d) Dạng phổ nào thu được nếu dùng một chùm nguyên tử thủy ngân (trạng thái cơ bản $^1S_0$)? Tại sao?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

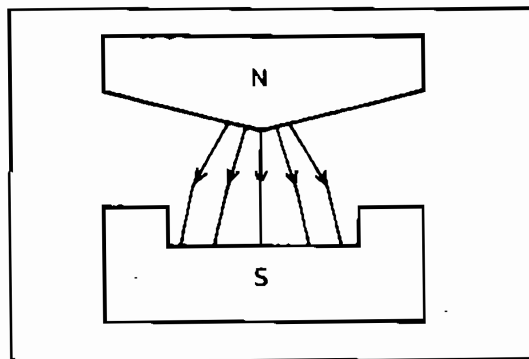
Mô tả ngắn gọn thí nghiệm Stern – Gernlach có trong **Bài tập 1114**.

(a) Lực tác dụng lên momen từ nguyên tử μ trong từ trường không đồng nhất là

$$F_z = -\frac{d}{dz}(\mu B\cos\theta) = -\mu\frac{dB}{dz}\cos\theta\,,$$

trong đó θ là góc giữa phương của μ và **B**. Nếu từ trường là đồng nhất thì sẽ không có lực và như vậy không có sự tách chùm nguyên tử.

(b) Từ trường không đồng nhất có thể tạo ra bằng các cực từ không đối xứng như trong hình 1.52.



Hình 1.52

(c) Trạng thái cơ bản của nguyên tử hydro là $^2S_{1/2}$. Do vậy, một chùm nguyên tử hydro sẽ bị tách thành hai thành phần khi đi qua một từ trường không đồng nhất.

(d) Do momen động lượng toàn phần J của trạng thái cơ bản của Hg là 0

nên sẽ không có sự tách chùm hạt bởi vì $(2J + 1) = 1$.

1116

Số hiệu nguyên tử của nhôm là 13.

(a) Viết cấu hình electron của Al ở trạng thái cơ bản.

(b) Thành phần phân loại của trạng thái cơ bản là gì? Sử dụng kí hiệu phổ chuẩn (ví dụ $^4S_{1/2}$) và giải thích tất cả các chỉ số trên và chỉ số dưới.

(c) Sử dụng sơ đồ mức năng lượng xác định điều gì xảy ra với trạng thái cơ bản khi chịu tác dụng của một từ trường mạnh (vùng Paschen-Back). Chú thích tất cả các trạng thái bằng các số lượng tử phù hợp và chỉ ra khoảng cách tương đối của các mức.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Cấu hình electron của trạng thái cơ bản của Al là

$$(1s)^2(2s)^2(2p)^6(3s)^2(3p)^1 .$$

(b) Kí hiệu phổ của trạng thái cơ bản của Al là $^2P_{1/2}$, trong đó chỉ số trên 2 là số bội kép, bằng $2S + 1$, S là số lượng tử spin toàn phần, chỉ số dưới 1/2 là số lượng tử momen động lượng toàn phần, kí hiệu P xác định rằng số lượng tử momen động lượng quỹ đạo toàn phần $L = 1$.

(c) Trong một từ trường rất mạnh, liên kết LS sẽ bị phá vỡ, và các momen spin và momen từ quỹ đạo tương tác độc lập với từ trường ngoài, làm tách mức năng lượng. Bổ chính năng lượng trong từ trường cho bởi

$$\Delta E = -(\boldsymbol{\mu}_L + \boldsymbol{\mu}_s) \cdot \mathbf{B} = (M_L + 2M_s)\mu_B B ,$$

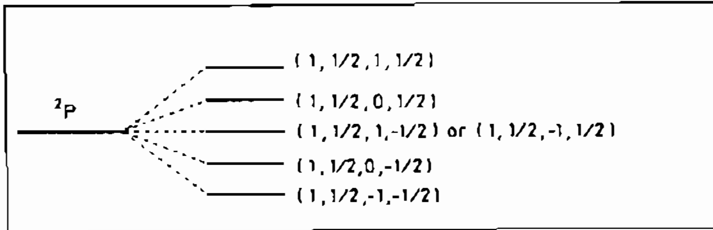
trong đó

$$M_L = 1, 0, -1, \qquad M_S = 1/2, -1/2 .$$

Mức năng lượng ^2P được tách thành 5 mức, khoảng cách giữa các mức liền nhau là $\mu_B B$. Các tách mức và các số lượng tử (L, S, M_L, M_S) được thể hiện trong hình 1.53

1117

Khí nguyên tử lithi trung tính được nung nóng $(Z = 3)$ nằm trong một từ



Hình 1.53

trường. Trạng thái nào sau đây nằm ở mức thấp nhất. Nói ngắn gọn nguyên nhân vật lý cho câu trả lời.

(a) $3\ ^2P_{1/2}$ và $2\ ^2S_{1/2}$.

(b) $5\ ^2S_{1/2}$ và $5\ ^2P_{1/2}$.

(c) $5\ ^2P_{3/2}$ và $5\ ^2P_{1/2}$.

(d) Các mức con của $5^2P_{3/2}$.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Các mức năng lượng của một nguyên tử sẽ bị dịch chuyển trong từ trường ngoài B bởi một lượng

$$\Delta E = M_J g \mu_B B .$$

trong đó g là thừa số Landé, M_J là thành phần momen động lượng toàn phần theo phương từ trường B. Các dịnh chuyển chỉ cỡ $\sim 5 \times 10^{-5}$ eV ngay cả trong từ trường mạnh tới 1 T.

(a) $3^2P_{1/2}$ cao hơn $2^2S_{1/2}$ (hiệu năng lượng ~ 1 eV), bởi vì số lượng tử chính của trạng thái đầu cao hơn. Trong các trạng thái $^2S_{1/2}$ thì trạng thái với $M_J = -\frac{1}{2}$ nằm thấp nhất.

(b) Trạng thái với $M_J = -1/2$ của $^2S_{1/2}$ nằm thấp nhất. Hiệu năng lượng giữa ^2S và ^2P chủ yếu là do sự thâm nhập quỹ đạo và bậc của nó ~ 1 eV.

(c) Trạng thái nào trong các trạng thái $^2P_{3/2}$ và $^2P_{1/2}$ có năng lượng thấp nhất phụ thuộc vào cường độ của từ trường ngoài. Nếu từ trường ngoài tạo ra sự tách mức lớn hơn liên kết LS thì trạng thái với $M_J = -3/2$ của $^2P_{3/2}$ là thấp nhất. Ngược lại, $M_J = -1/2$ của $^2P_{1/2}$ là thấp nhất.

(d) Trạng thái con với $M_J = -3/2$ của $^2P_{3/2}$ là thấp nhất.

1118

Một vạch phổ ứng với chuyển mức $J = 1 \to J = 0$ bị tách thành các thành phần cách nhau 0,0016 Åtrong một từ trường 1000 gaoxơ. Vạch 0 xuất hiện tại 1849 Å.

(a) Xác định xem spin toàn phần có ở trong trạng thái $J = 1$ hay không bằng cách xem xét thừa số g trong trạng thái đó.

(b) Tìm momen từ trong trạng thái kích thích?

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Độ dịch chuyển năng lượng trong một từ trường ngoài B là

$$\Delta E = g\mu_B B .$$

Mức năng lượng của $J = 0$ sẽ không bị tách. Do vậy, sự tách mức do chuyển tiếp $J = 1 \to J = 0$ bằng với sự tách mức của mức $J = 1$

$$\Delta E(J = 1) = hc\Delta\bar{\nu} = hc\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} ,$$

hay

$$g = \frac{hc}{\mu_B B}\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} .$$

Với

$$\Delta\lambda = 0,0016 \text{ Å} ,$$

$$\lambda = 1849 \text{ Å} = 1849 \times 10^{-8} \text{ cm} ,$$

$$hc = 4\pi \times 10^{-5} \text{ eV} \cdot \text{cm} ,$$

$$\mu_B = 5,8 \times 10^{-9} \text{ eV} \cdot \text{Gs}^{-1} ,$$

$$B = 10^3 \text{ Gs} ,$$

ta tìm được

$$g = 1 .$$

Do $J = 1$ cho biết rằng $S = 0$, $L = 1$ (**Bài tập 1091(b)**), nghĩa là, chỉ có momen từ quỹ đạo có vai trò trong sự tách mức Zeeman.

(b) Momen từ của nguyên tử kích thích là

$$\mu_J = g\mu_B P_J/\hbar = 1 \cdot \mu_B \cdot \sqrt{J(J+1)} = \sqrt{2}\mu_B .$$

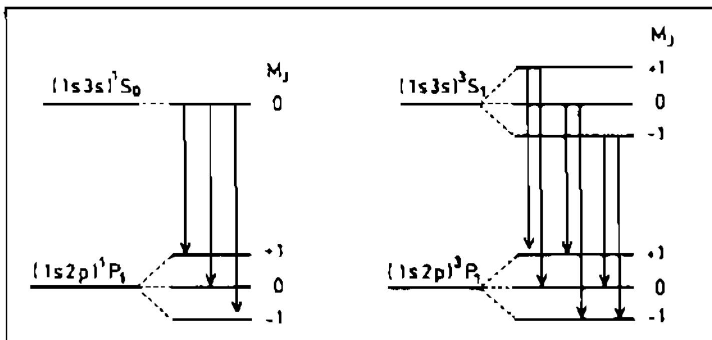
1119

So sánh hiệu ứng Zeeman trường yếu đối với các chuyển mức $(1s3s)\ ^1S_0 \to (1s2p)\ ^1P_1$ và $(1s3s)\ ^3S_1 \to (1s2p)\ ^3P_1$ trong heli. Có thể trả lời định tính miễn là các đặc điểm quan trọng được chứng minh.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Trong từ trường yếu, mỗi mức năng lượng của $^3P_1$, $^3S_1$ và $^1P_1$ tách thành 3 mức. Theo quy tắc lựa chọn ($\Delta J = 0, \pm 1$; $M_J = 0, \pm 1$), chúng ta có thể thấy chuyển mức $(1s3s)^1S_0 \to (1s2p)^1P_1$ tạo ra 3 vạch phổ, chuyển mức $(1s3s)^3S_1 \to (1s2p)^3P_1$ sinh ra 6 vạch phổ như trong Hình 1.54.



Hình 1.54

Sự dịch chuyển năng lượng trong từ trường yếu B là $\Delta E = gM_J\mu_B B$, trong đó μ_B là manheton Bohr, g là thừa số tách vạch Landé được cho bởi

$$g = 1 + \frac{J(J+1) - L(L+1) + S(S+1)}{2J(J+1)} .$$

Với bốn mức trên ta có

Mức	$(1s3s)^1S_0$	$(1s2p)^1P_1$	$(1s3s)^3S_1$	$(1s2p)^3P_1$
(JLS)	(000)	(110)	(101)	(111)
ΔE	0	$\mu_B B$	$2\mu_B B$	$3\mu_B B/2$

Từ đó ta có thể thu được năng lượng của các chuyển mức.

1120

Người ta nghiên cứu ảnh hưởng của từ trường lên cấu trúc phổ của một ánh sáng vàng đặc trưng (trong lân cận 6000 Å) từ hơi natri kích thích (hiệu ứng Zeeman). Ta thu được phổ đối với cả ánh sáng phát ra theo phương song song và vuông góc với từ trường.

(a) *Hãy mô tả:* (i) Phổ trước khi có tác dụng của từ trường.

(ii) Sự thay đổi của phổ trong cả hai phương sau khi từ trường được đặt vào.

(iii) Tìm các trạng thái phân cực có thể cho các thành phần phổ trong mỗi trường hợp?

(b) *Giải thích* cách giải thích các quan sát trên dựa vào đặc trưng của các trạng thái lượng tử nguyên tử liên quan.

(c) Nếu ta có một máy quang phổ với độ phân giải $(\lambda/\delta\lambda)$ là 100000, từ trường phải có năng lượng bao nhiêu để quan sát rõ sự tách vạch bởi từ trường? (Ước lượng số tới hai chữ số hoặc hơn nếu cần thiết. Ta có thể bỏ qua sự mở rộng vạch trong nguồn sáng).

(*Columbia*)

Lời giải:

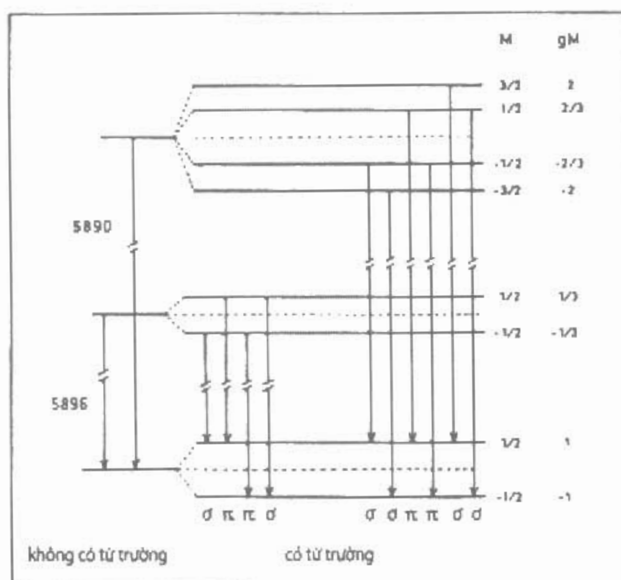
(a) Phổ thu được khi có hoặc không có từ trường được thể hiện trong Hình 1.55.

(i) Trước khi có từ trường, hai vạch có quan sát được với bước sóng 5896 Å và 5890 Å trong các phương.

(ii) Sau khi có từ trường, ta có thể quan sát thấy các 6 vạch σ trong phương của từ trường và 10 vạch, 4 vạch π và 6 vạch σ trong phương vuông góc với từ trường.

(iii) Các vạch σ là các cặp ánh sáng phân cực tròn trái và phải. Các vạch π là ánh sáng phân cực phẳng.

(b) Sự tách vạch phổ xuất phát từ sự lượng tử hóa phương của momen



Hình 1.55

động lượng toàn phần. Số các thành phần tách ra được xác định bởi quy tắc lựa chọn ($\Delta M_J = 1, 0, -1$) của chuyển tiếp, trong khi đó trạng thái phân cực được xác định bởi định luật bảo toàn momen động lượng.

(c) Sự khác biệt số sóng của hai vạch gần nhất là

$$\Delta\tilde{\nu} = \frac{|g_1 - g_2|\mu_B B}{hc} = \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \approx \frac{\delta\lambda}{\lambda^2},$$

trong đó g_1, g_2 là các thừa số tách vạch Landé của các mức năng lượng cao hơn vào thấp hơn. Do vậy, độ mạnh từ trường cần thiết là ở mức

$$B \sim \frac{hc\delta\lambda}{|g_1 - g_2|\mu_B\lambda^2} = \frac{12 \times 10^{-5} \times 10^8}{1 \times 6 \times 10^{-5}} \times \frac{10^{-5}}{6000} = 0,3\ T\,.$$

1121

Hãy trình bày định tính sự dịch mức do một điện trường ngoài không đổi E_0 của các mức năng lượng $n = 2$ của hydro. Bỏ qua spin, nhưng xét cả sự tách vạch trường - zero W của các trạng thái $2s$ và $2p$

$$W - E_{2s} - E_{2p} \sim 10^{-5}\ \text{eV}.$$

Xét riêng rẽ trường hợp $|e|E_0a_0 \gg W$ và $|e|E_0a_0 \ll W$, trong đó a_0 là bán kính Bohr.

(*Columbia*)

Lời giải:

Xét điện trường không đổi E_0 như là một sự nhiễu loạn. Khi đó $H' = e\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}$. Các thành phần ma trận khác không chỉ tồn tại giữa các trạng thái $|200\rangle$ và $|210\rangle$ trong số 4 trạng thái $|n=2\rangle$, $|200\rangle, |211\rangle, |210\rangle, |21-1\rangle$. **Bài tập 1122(a)** cho ta

$$\langle 210|H'|200\rangle \equiv u = -3eE_0a_0 .$$

Các trạng thái $|211\rangle$ và $|21-1\rangle$ vẫn suy biến.

(i) Trường hợp $W \gg |e|E_0a_0$, hoặc $W \gg |u|$, nhiễu loạn nằm trong các trạng thái không suy biến. Chỉ có một bổ chính năng lượng khác không trong tính toán bậc 2. Bổ chính năng lượng là

$$E_+ = W + u^2/W, \ E_- = W - u^2/W .$$

(ii) Trường hợp $W \ll |e|E_0a_0$, hay $W \ll |u|$, bổ chính nằm trong các trạng thái suy biến và bổ chính năng lượng là

$$E_+ = -u = 3eE_0a_0, \ E_- = u = -3eE_0a_0 .$$

1122

Một chùm nguyên tử hydro kích thích ở trạng thái $2s$ đi qua giữa hai bản tụ trong đó có một điện trường đều $\mathbf{E}$ trên khoảng cách L, như trong hình 1.56. Các nguyên tử hydro có vận tốc v dọc theo trục x và trường $\mathbf{E}$ định hướng dọc theo trục z.

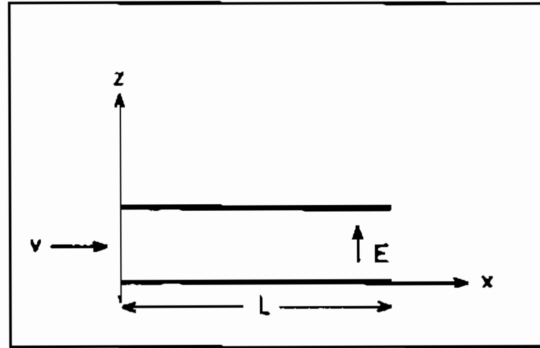
Tất cả các trạng thái $n = 2$ của hydro đều suy biến khi không có trường $\mathbf{E}$ nhưng một số trong đó sẽ nhập vào nhau khi có điện trường.

(a) Trạng thái $n = 2$ nào liên kết trong bậc một thông qua nhiễu loạn?

(b) Tìm tổ hợp tuyến tính của các trạng thái $n = 2$ trong đó loại sự suy biến đến mức tối đa.

(c) Đối với một hệ bắt đầu trong trạng thái $2s$ tại $t = 0$, tìm hàm sóng tại thời điểm $t \le L/v$.

(d) Tìm xác suất để chùm ló ra có chứa nhiều trạng thái $n = 2$.



Hình 1.56

(*MIT*)

Lời giải:

(a) Hamintonian nhiễu loạn $H' = eEr\cos\theta$ giao hoán với $\hat{l}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$, do vậy, các phần tử ma trận của H' giữa các trạng thái m khác nhau sẽ triệt tiêu. Có 4 trạng thái suy biến trong mức năng lượng $n = 2$

$$2s: \quad l = 0, m = 0\,,$$

$$2p: \quad l = 1, m = 0, \pm 1\,.$$

Chỉ có một phần tử ma trận khác không nằm giữa các trạng thái $2s$ và $2p(m = 0)$

$$\begin{aligned}\langle 210|eEr\cos\theta|200\rangle &= eE\int \psi_{210}(\mathbf{r})r\cos\theta\psi_{200}(\mathbf{r})d^3r \\ &= \frac{eE}{16a^4}\int_0^\infty\int_{-1}^1 r^4\left(2-\frac{r}{a}\right)e^{-r/a}\cos^2\theta d\cos\theta dr \\ &= -3eEa\,,\end{aligned}$$

trong đó a là bán kính Bohr.

(b) Phương trình đặc trưng xác định độ dịch chuyển năng lượng

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -3eEa & 0 & 0 \\ -3eEa & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

cho ta

$$\lambda = 3eEa\,, \qquad \Psi^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_{200} - \Phi_{210})\,,$$

$$\lambda = -3eEa\,, \qquad \Psi^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_{200} + \Phi_{210})\,,$$

$$\lambda = 0\,, \qquad \Psi = \Phi_{211}, \Phi_{21-1}\,.$$

(c) Gọi năng lượng của trạng thái $n = 2$ trước khi có nhiễu loạn là E_1. Do tại $t = 0$,

$$\Psi(t=0) = \Phi_{200} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_{200} - \Phi_{210}) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_{200} + \Phi_{210})\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi^{(-)} + \Psi^{(+)})\,,$$

nên ta có

$$\Psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\Psi^{(-)}\exp\left[-\frac{i}{\hbar}(E_1 + 3eEa)t\right] + \Psi^{(+)}\exp\left[-\frac{i}{\hbar}(E_1 - 3eEa)t\right]\right\}$$
$$= \left[\Phi_{200}\cos\left(\frac{3eEat}{\hbar}\right) + \Phi_{210}\sin\left(\frac{3eEat}{\hbar}\right)\right]\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_1 t\right)\,.$$

(d) Khi chùm hạt đi ra khỏi tụ tại thời điểm $t = L/v$, xác suất chùm hạt nằm ở trạng thái $2s$ là

$$\left|\cos\left(\frac{3eEat}{h}\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_1 t\right)\right|^2 = \cos^2\left(\frac{3eEat}{\hbar}\right) = \cos^2\left(\frac{3eEaL}{\hbar v}\right)\,.$$

Xác suất để chùm hạt nằm trong trạng thái $2p(m = 0)$ là

$$\left|\sin\left(\frac{3eEat}{\hbar}\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_1 t\right)\right|^2 = \sin^2\left(\frac{3eEat}{\hbar}\right) = \sin^2\left(\frac{3eEaL}{\hbar v}\right)\,.$$

Xác suất để chùm hạt nằm trong trạng thái $2p(m = \pm 1)$ là 0.

2. VẬT LÝ PHÂN TỬ (1123-1142)

1123

(a) Giả thiết rằng hai proton của phân tử H_2^+ cách nhau một khoảng tiêu

chuẩn 1,06 Å, hãy vẽ thế năng của của electron dọc theo trục đi qua các proton.

(b) Vẽ hàm sóng của electron đối với hai trạng thái thấp nhất trong H_2^+, nêu vắn tắt sự liên quan giữa chúng với hàm sóng của hydro. Hàm sóng nào ứng với trạng thái cơ bản của H_2^+, và tại sao?

(c) Điều gì xảy ra với hai mức năng lượng thấp nhất của H_2^+ trong giới hạn mà các proton dịch chuyển ra xa nhau?

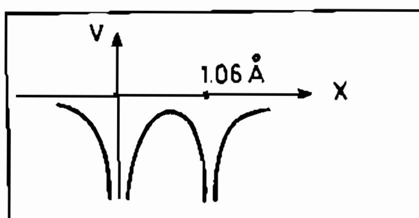
(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Lấy vị trí của một proton làm gốc tọa độ và ví trí của proton còn lại sẽ là 1,06 Å theo trục x. Khi đó, thế năng của các electron là

$$V(r_1, r_2) = -\frac{e^2}{r_1} - \frac{e^2}{r_2},$$

trong đó, r_1 và r_2 là khoảng cách từ electron tới hai proton. Thế năng của electron dọc theo trục x được thể hiện trong hình 1.57.



Hình 1.57

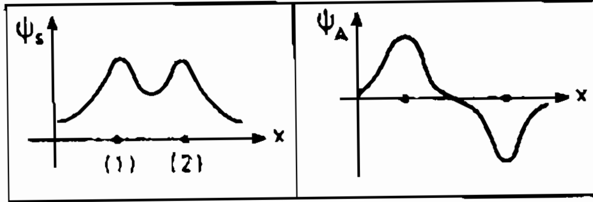
(b) Hàm sóng phân tử của H_2^+ có dạng

$$\Psi_S = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_{1s}(1) + \Phi_{1s}(2)),$$

$$\Psi_A = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_{1s}(1) - \Phi_{1s}(2)),$$

trong đó, $\Phi(i)$ là hàm sóng của một nguyên tử tạo bởi electron và proton thứ i. Chú ý rằng năng lượng của Ψ_S nhỏ hơn năng lượng của Ψ_A và do vậy Ψ_S là trạng thái cơ bản của H_2^+; Ψ_A là trạng thái kích thích thứ nhất. Ψ_S và Ψ_A là các tổ hợp tuyến tính của các trạng thái $1s$ của nguyên tử H, và được thể hiện trong hình 1.58. Phần giao nhau của hai hàm sóng hydro lớn hơn nhiều trong

trường hợp hàm sóng đối xứng Ψ_S và do vậy trạng thái đó gọi là trạng thái liên kết. Hàm sóng phản đối xứng Ψ_A được gọi là trạng thái phản liên kết. Do Ψ_S có liên kết chặt hơn nên năng lượng của nó thấp hơn.



Hình 1.58

(c) Giả sử, với proton 1 cố định, proton 2 di chuyển tới vô cùng, tức là $\mathbf{r}_2 \to \infty$. Khi đó $\Phi(2) \sim e^{-r_2/a} \to 0$ và $\Psi_S \approx \Psi_A \approx \Phi(1)$. Hệ sẽ bị tách thành một nguyên tử hydro và một proton không tương tác.

1124

Cho thành phần bán kính của phương trình Schrödinger trong trường lực xuyên tâm $V(r)$ là

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Psi(r)}{dr}\right) + \left[V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}\right]\Psi(r) = E\Psi(r)\,,$$

xét một phân tử hai nguyên tử với hạt nhân có khối lượng m_1 và m_2. Ta có thể lấy xấp xỉ thế phân tử khá chính xác bằng

$$V(r) = -2V_0\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{2\rho^2}\right)\,,$$

trong đó $\rho = r/a$, với a là một tham số độ dài đặc trưng.

(a) Bằng cách khai triển phương trình Schrödinger quanh giá trị nhỏ nhất của thế hiệu dụng, chứng minh rằng với B nhỏ phương trình sóng được thu gọn thành phương trình của dao động tử điều hòa đơn giản với tần số

$$\omega = \left[\frac{2V_0}{\mu a^2(1+B)^3}\right]^{1/2}, \qquad \text{trong đó } B = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu a^2 V_0}\,.$$

(b) Giả sử $\hbar^2/2\mu \gg a^2V_0$, tìm các mức năng lượng quay, năng lượng dao động và năng lượng dao động quay đối với dao động nhỏ.

(*SUNY, Buffalo*)

Lời giải:

(a) Thế hiệu dụng là

$$V_{\text{eff}} = \left[V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}\right] = -2V_0\left[\frac{a}{r} - \frac{a^2}{2r^2}(1+B)\right].$$

Để tìm vị trí V_{eff} cực tiểu, ta cho $\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = 0$, từ đó ta tìm được $r = a(1+B) \equiv r_0$ - là vị trí cân bằng. Khai triển V_{eff} trong lân cận $r = r_0$ và bỏ qua các thành phần có bậc lớn hơn $(\frac{r-r_0}{a})^2$, ta có

$$V_{\text{eff}} \approx -\frac{V_0}{1+B} + \frac{V_0}{(1+B)^3 a^2}[r-(1+B)a]^2 .$$

Thành phần bán kính của phương trình Schrödinger trở thành

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Psi(r)}{dr}\right) + \left\{-\frac{V_0}{B+1} + \frac{V_0}{(1+B)^3a^2}[r-(1+B)a]^2\right\}\Psi(r)$$
$$= E\Psi(r),$$

hay, đặt $\Psi(r) = \frac{1}{r}\chi(r)$, $R = r - r_0$,

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dR^2}\chi(R) + \frac{V_0}{(1+B)^3a^2}R^2\chi(R) = \left(E + \frac{V_0}{1+B}\right)\chi(R),$$

đó chính là phương trình chuyển động của một dao động tử điều hòa với tần số góc

$$\omega = \left[\frac{2V_0}{\mu a^2(1+B)^3}\right]^{1/2}.$$

(b) Nếu $\hbar^2/2\mu \gg a^2V_0$, ta có

$$B = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu a^2 V_0} \gg 1, \qquad r_0 \approx Ba,$$

$$\omega \approx \sqrt{\frac{2V_0}{\mu a^2 B^3}}.$$

Các mức năng lượng dao động cho bởi

$$E_v = (n+1/2)\hbar\omega, n = 1, 2, 3 \ldots .$$

Các mức năng lượng quay cho bởi

$$E_r = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r_0} \approx \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu Ba} .$$

Do vậy, các mức năng lượng dao động quay cho bởi

$$E = E_v + E_r \approx \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu Ba} .$$

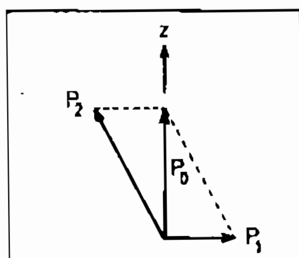
1125

Một chùm phân tử hydro chuyển động theo phương z với động năng 1 eV. Các phân tử ở trạng thái kích thích, từ đó chúng phân rã và tách thành hai nguyên tử hydro. Khi một nguyên tử tách ra có vận tốc cuối cùng vuông góc với phương z thì động năng của nó luôn bằng 0,8 eV. Hãy tính năng lượng giải phóng trong phản ứng phân tách.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Một phân tử hydro động năng 1 eV chuyển động với động lượng $\mathbf{p}_0$ theo phương z tách thành 2 nguyên tử hydro, một nguyên tử có động năng 0,8 eV và động lượng $\mathbf{p}_1$ vuông góc với phương z. Gọi động lượng của nguyên tử hydro thứ hai là $\mathbf{p}_2$, động năng của nó là E_2. Do $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$, nên các vectơ động lượng sẽ được thể hiện như trong hình 1.59



Hình 1.59

Ta có

$$p_0 = \sqrt{2m(H_2)E(H_2)}$$

$$= \sqrt{2 \times 2 \times 938 \times 10^6 \times 1} = 6,13 \times 10^4 \text{ eV/c},$$

$$p_1 = \sqrt{2m(H)E(H)}$$

$$= \sqrt{2 \times 938 \times 10^6 \times 0.8} = 3,87 \times 10^4 \text{ eV/c}.$$

Động lượng của nguyên tử hydro thứ hai là

$$p_2 = \sqrt{p_0^2 + p_1^2} = 7,25 \times 10^4 \text{ eV/c},$$

tương ứng với năng lượng

$$E_2 = \frac{p_2^2}{2m(H)} = 2,80 \text{ eV}.$$

Do vậy, năng lượng sinh ra trong phản ứng phân tách là $0,8 + 2,8 - 1 = 2,6$ eV.

1126

Các lực nội nguyên tử là do:

(a) sự phân cực tĩnh điện tương hỗ giữa các nguyên tử.

(b) các lực giữa các hạt nhân nguyên tử.

(c) sự trao đổi photon giữa các nguyên tử.

(*CCT*)

Lời giải:

Câu trả lời là (a).

1127

Trường hợp nào sau đây có khoảng cách giữa các mức năng lượng là nhỏ nhất?

(a) Các mức quay của phân tử.

(b) Các mức dao động phân tử.

(c) Các mức electron phân tử. (*CCT*)

Lời giải:

Câu trả lời là (a). $\Delta E_e > \Delta E_v > \Delta E_r$.

1128

Coi gần đúng phân tử $^1{}_1H\ ^{17}{}_{35}Cl$ như là một quả tạ rắn với khoảng cách giữa các hạt nhân là $1,29 \times 10^{-10}$ m, hãy tính độ tách biệt tần số của các vạch phổ hồng ngoại xa của nó. ($h = 6,6 \times 10^{-34}$ J s, 1 đvklnt$= 1,67 \times 10^{-27}$ kg).

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Momen quán tính của phân tử là

$$I = \mu r^2 = \frac{m_{Cl} m_H}{m_{Cl} + m_H} r^2 = \frac{35}{36} \times 1,67 \times 10^{-27} \times (1,29 \times 10^{-10})^2$$

$$= 2,7 \times 10^{-47} \text{ kg} \cdot m^2$$

Tần số vạch phổ hồng ngoại xa của nó được cho bởi

$$\nu = \frac{hcBJ(J+1) - hcBJ(J-1)}{h} = 2cBJ\,,$$

trong đó $B = \hbar^2/(2Ihc)$. Do vậy ta có

$$\nu = \frac{\hbar^2}{Ih}J\,, \quad \text{và do vậy } \Delta\nu = \frac{\hbar^2}{hI} = \frac{h}{4\pi^2 I} = \frac{6,6 \times 10^{-34}}{4\pi^2 \times 2,7 \times 10^{-47}} = 6,2 \times 10^{11} \text{ Hz}.$$

1129

(a) Biết rằng một hạt nhân hydro có spin 1/2 và một hạt nhân đơteri có spin 1, hãy liệt kê tất cả các trạng thái spin hạt nhân có thể cho các phân tử H_2, D_2 và HD.

(b) Đối với mỗi phân tử H_2, D_2 và HD, trình bày các trạng thái quay được phép của phân tử đối với mỗi trạng thái spin hạt nhân.

(c) Ước lượng hiệu năng lượng giữa hai mức quay đầu tiên của H_2. Mức độ đóng góp của động năng hạt nhân gần đúng bằng bao nhiêu? Đóng góp của tương tác của hai spin hạt nhân? Của tương tác giữa spin hạt nhân với chuyển động quỹ đạo?

(d) Dùng câu trả lời trong câu (c) để thu được phân bố các trạng thái spin hạt nhân của H_2, D_2 và HD ở nhiệt độ 1 K.

(*Columbia*)

Lời giải:

(a) Do $s(p) = \frac{1}{2}, s(d) = 1$, và $\mathbf{S} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$, nên spin của H_2 là 1 hoặc 0, spin của D_2 là 2, 1, hoặc 0, và spin của HD là 1/2 hay 3/2.

(b) Hai hạt nhân của H_2 là như nhau, và các hạt nhân của D_2 cũng vậy. Do đó, các hàm sóng toàn phần của H_2 và D_2 phải là phản đối xứng với sự trao đổi hạt, trong khi đó thì DH không như vậy. Hàm sóng toàn phần có thể viết thành $\Psi_T = \Psi_e \Psi_v \Psi_r \Psi_s$, trong đó Ψ_e, Ψ_v, Ψ_r, và Ψ_s lần lượt là hàm sóng electron, hàm sóng dao động hạt nhân, hàm sóng quay hạt nhân, và hàm sóng spin hạt nhân. Trong trường hợp trạng thái cơ bản, Ψ_e, Ψ_v là đối xứng trao đổi. Với trạng thái quay của H_2 hoặc D_2, thừa số $(-1)^J$ sẽ xuất hiện trong hàm sóng khi trao đổi hai hạt nhân, trong đó J là số lượng tử quay. Yêu cầu về tính đối xứng của hàm sóng khi đó cho ta

$$H_2: \quad \text{Với } S = 1 \ (\Psi_s \text{ đối xứng}), \ J = 1, 3, 5, \dots;$$

$$\text{với } S = 0 \ (\Psi_s \text{ phản đối xứng}), \ J = 0, 2, 4, \dots .$$

$$D_2: \quad \text{Với } S = 0, 2, J = 0, 2, 4, \dots; \quad \text{với } S = 1, J = 1, 3, 5, \dots .$$

$$HD: \quad S = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; J = 1, 2, 3, \dots \text{(không có sự hạn chế)}.$$

(c) Đối với H_2, lấy khoảng cách giữa hai hạt nhân là $a \approx 2a_0 \approx 1$ Å $a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}$ là bán kính Bohr. Khi đó $I = 2m_p a_0^2 = \frac{1}{2} m_p a^2$ và hiệu năng lượng giữa hai trạng thái quay đầu tiên là

$$\Delta E = \frac{\hbar^2}{2I} \times [1 \times (1+1) - 0 \times (0+1)] \approx \frac{2\hbar^2}{m_p a^2} \approx \frac{m_e}{m_p} E_0 ,$$

trong đó

$$E_0 = \frac{2\hbar^2}{m_e a^2} = \frac{e^2}{2a_0}$$

công thức trên là thế ion hóa của hydro. Thêm vào đó có sự đóng góp của năng lượng dao động hạt nhân $\Delta E_v \approx \hbar\omega$. Lực giữa các hạt nhân là $f \approx e^2/a^2$, do vậy $K = |\nabla f| \approx \frac{2e^2}{a^3}$, cho ta

$$\Delta E_0 = \hbar\omega \approx \sqrt{\frac{K}{m_p}} = \sqrt{\frac{2e^2\hbar^2}{m_p a^3}} = \sqrt{\frac{m_e}{m_p}} \frac{e^2}{2e_0} = \sqrt{\frac{m_e}{m_p}} E_0 .$$

Do đó, đóng góp của động năng hạt nhân có bậc bằng $\sqrt{\frac{m_e}{m_p}}E_0$.

Tương tác giữa các spin nguyên tử được cho bởi

$$\Delta E \approx \mu_N^2/a^3 \approx \left(\frac{e\hbar}{2m_pc}\right)^2 \frac{1}{8a_0^3} = \frac{1}{16}\left(\frac{\hbar}{m_pc}\right)^2 \left(\frac{m_ee^2}{\hbar^2}\right)^2 \frac{e^2}{2a_0}$$

$$= \frac{1}{16}\left(\frac{m_e}{m_p}\right)^2 \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2 E_0 = \frac{1}{16}\left(\frac{m_e}{m_p}\right)^2 \alpha^2 E_0\,,$$

trong đó $\alpha = \frac{1}{137}$ là hằng số cấu trúc tinh tế, và tương tác giữa spin hạt nhân và momen động lượng quỹ đạo electron là

$$\Delta E \approx \mu_N\mu_B/a_0^3 \approx \frac{1}{2}\left(\frac{m_e}{m_p}\right)\alpha^2 E_0\,.$$

(d) Với H_2, momen quán tính là $I = \mu a^2 = \frac{1}{2}m_pa^2 \approx 2m_pa_0^2$, do vậy, hiệu năng lượng giữa các trạng thái $l = 0$ và $l = 1$ là

$$\Delta E_{H_2} = \frac{\hbar^2}{2I} \times (2-0) = \frac{2m_e}{m_p}E_0\,.$$

Với D_2, do khối lượng hạt nhân bằng hai lần khối lượng H_2,

$$\Delta E_{D_2} = \frac{1}{2}\Delta E_{H_2} = \frac{m_e}{m_p}E_0\,.$$

Do $kT = 8,7 \times 10^{-5}$ eV với $T = 1$ K, $\Delta E \approx \frac{E_0}{2000} = 6,8 \times 10^{-3}$ eV, ta có $\Delta E \gg kT$ và do vậy với cả H_2 và D_2, đều thỏa mãn điều kiện $\exp(-\Delta E/kT) \approx 0$. Khi đó, từ định luật phân bố Boltzmann, ta biết rằng các phân tử H_2 và D_2 đều ở trạng thái cơ bản.

Các suy biến spin $2S+1$ đối với H_2, $g_{s=1} : g_{s=0} = 3:1$; đối với D_2, $g_{s=2} : g_{s=1} : g_{s=0} = 5:3:1$; và đối với HD, $g_{s=3/2} : g_{s=1/2} = 2:1$. Từ tỉ số độ cư trú g_2/g_1, ta có thể kết luận rằng hầu hết H_2 nằm trong trạng thái $S = 1$; hầu hết D_2 trong trạng thái $S = 2$ và $S = 1$, tỉ số tương đối sẽ là 5:3. Hai phần ba HD trong trạng thái $S = 3/2$ và một phần ba nằm trong trạng thái $S = 1/2$.

1130

Xét phân tử (đồng hạt nhân) $^{14}N_2$. Sử dụng thực tế là một hạt nhân nitơ có spin $I = 1$ để chứng minh rằng tỉ số cường độ của các vạch quay liên tiếp nhau trong phổ phân tử là 2:1.

(*Chicago*)

Lời giải:

Do hạt nhân nitơ có spin $I = 1$, hàm sóng toàn phần của phân tử phải đối xứng. Khi trao đổi hạt nhân sẽ xuất hiện thừa số $(-1)^J$ trong hàm sóng. Do vậy, khi số lượng tử quay J chẵn thì mức năng lượng sẽ là một trạng thái của spin chẵn, trong khi đó một trạng thái quay với J lẻ sẽ gắn với một trạng thái spin phản đối xứng. Hơn nữa, ta có

$$\frac{g_S}{g_A} = \frac{(I+1)(2I+1)}{I(2I+1)} = (I+1)/I = 2:1$$

trong đó g_S là bậc suy biến của trạng thái đối xứng spin, g_A là bậc suy biến của trạng thái phản đối xứng spin. Do một phân tử đồng hạt nhân chỉ có phổ Raman trong đó $\Delta J = 0, \pm 2$, nên tính đối xứng của hàm sóng không thay đổi trong chuyển dời. Điều này cũng đúng đối với hàm spin. Do vậy, tỉ số cường độ của các vạch quay kế cận trong phổ phân tử là 2 : 1.

1131

Ước lượng động năng nơtron thấp nhất mà với động năng đó một nơtron khi va chạm với một phân tử oxy có thể mất năng lượng do kích thích quay phân tử. (Độ dài liên kết của phân tử oxy là 1,2 Å).

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Momen quán tính của phân tử oxy là

$$I = \mu r^2 = \frac{1}{2} m r^2 ,$$

trong đó r là độ dài liên kết của phân tử oxy, m là khối lượng nguyên tử oxy.

Các mức năng lượng quay được cho bởi

$$E_J = \frac{h^2}{8\pi^2 I} J(J+1), \qquad J = 0, 1, 2, \ldots .$$

Để kích thích quay phân tử, năng lượng thấp nhất có thể hấp thụ bởi phân

Do đó, đóng góp của động năng hạt nhân có bậc bằng $\sqrt{\frac{m_e}{m_p}}E_0$.

Tương tác giữa các spin nguyên tử được cho bởi

$$\Delta E \approx \mu_N^2/a^3 \approx \left(\frac{e\hbar}{2m_pc}\right)^2 \frac{1}{8a_0^3} = \frac{1}{16}\left(\frac{\hbar}{m_pc}\right)^2 \left(\frac{m_ee^2}{\hbar^2}\right)^2 \frac{e^2}{2a_0}$$

$$= \frac{1}{16}\left(\frac{m_e}{m_p}\right)^2 \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2 E_0 = \frac{1}{16}\left(\frac{m_e}{m_p}\right)^2 \alpha^2 E_0\,,$$

trong đó $\alpha = \frac{1}{137}$ là hằng số cấu trúc tinh tế, và tương tác giữa spin hạt nhân và momen động lượng quỹ đạo electron là

$$\Delta E \approx \mu_N\mu_B/a_0^3 \approx \frac{1}{2}\left(\frac{m_e}{m_p}\right)\alpha^2 E_0\,.$$

(d) Với H_2, momen quán tính là $I = \mu a^2 = \frac{1}{2}m_pa^2 \approx 2m_pa_0^2$, do vậy, hiệu năng lượng giữa các trạng thái $l = 0$ và $l = 1$ là

$$\Delta E_{H_2} = \frac{\hbar^2}{2I} \times (2-0) = \frac{2m_e}{m_p}E_0\,.$$

Với D_2, do khối lượng hạt nhân bằng hai lần khối lượng H_2,

$$\Delta E_{D_2} = \frac{1}{2}\Delta E_{H_2} = \frac{m_e}{m_p}E_0\,.$$

Do $kT = 8,7 \times 10^{-5}$ eV với $T = 1$ K, $\Delta E \approx \frac{E_0}{2000} = 6,8 \times 10^{-3}$ eV, ta có $\Delta E \gg kT$ và do vậy với cả H_2 và D_2, đều thỏa mãn điều kiện $\exp(-\Delta E/kT) \approx 0$. Khi đó, từ định luật phân bố Boltzmann, ta biết rằng các phân tử H_2 và D_2 đều ở trạng thái cơ bản.

Các suy biến spin $2S+1$ đối với H_2, $g_{s=1} : g_{s=0} = 3:1$; đối với D_2, $g_{s=2} : g_{s=1} : g_{s=0} = 5:3:1$; và đối với HD, $g_{s=2/3} : g_{s=1/2} = 2:1$. Từ tỉ số độ cư trú g_2/g_1, ta có thể kết luận rằng hầu hết H_2 nằm trong trạng thái $S = 1$; hầu hết D_2 trong trạng thái $S = 2$ và $S = 1$, tỉ số tương đối sẽ là 5:3. Hai phần ba HD trong trạng thái $S = 3/2$ và một phần ba nằm trong trạng thái $S = 1/2$.

1130

Xét phân tử (đồng hạt nhân) $^{14}N_2$. Sử dụng thực tế là một hạt nhân nitơ có spin $I = 1$ để chứng minh rằng tỉ số cường độ của các vạch quay liên tiếp nhau trong phổ phân tử là 2:1.

tử oxy là

$$E_{\min} = E_1 - E_0 = \frac{h^2}{4\pi^2 I} = \frac{h^2}{2\pi^2 mr^2} = \frac{2(\hbar c)^2}{mc^2 r^2}$$
$$= \frac{2 \times (1,97 \times 10^{-5})^2}{16 \times 938 \times 10^6 \times (1,2 \times 10^{-8})^2} = 3,6 \times 10^{-4}\ \text{eV}.$$

Do khối lượng nơtron nhỏ hơn nhiều khối lượng của phân tử oxy nên động năng nhỏ nhất nơtron phải có là $3,6 \times 10^{-4}$ eV.

1132

(a) Sử dụng các hàm sóng trạng thái cơ bản của nguyên tử hydro (gồm cả spin electron) hãy viết các hàm sóng cho phân tử hydro thỏa mãn nguyên lý loại trừ Pauli. Loại trừ các thành phần đặt cả hai electron trên cùng một hạt nhân. Phân loại hàm sóng dựa trên spin toàn phần của nó.

(b) Giả sử rằng chỉ có thành phần thế năng trong Hamintonian xuất phát từ lực Coulomb, hãy trình bày một cách định tính năng lượng của các trạng thái ở trên trong trường hợp khoảng cách tiêu chuẩn giữa các hạt nhân trong phân tử và trường hợp giới hạn khi khoảng cách giữa các hạt nhân rất lớn.

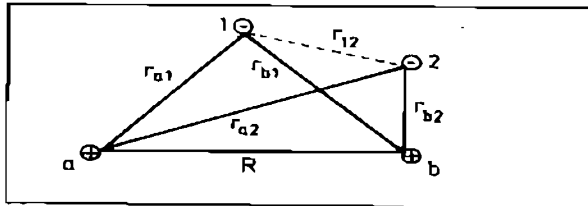
(c) Ý nghĩa của "lực trao đổi" là gì?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Hình 1.60 thể hiện cấu hình của một phân tử hydro. Để thuận tiện ta sử dụng đơn vị hạt nhân trong đó a_0 (bán kính Bohr) $= e = \hbar = 1$.

(a) Hamintonian của phân tử hydro có thể viết dưới dạng



Hình 1.60

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}(\nabla_1^2 + \nabla_2^2) + \frac{1}{r_{12}} - \left(\frac{1}{r_{a1}} + \frac{1}{r_{a2}} + \frac{1}{r_{b1}} + \frac{1}{r_{b2}}\right) + \frac{1}{R}.$$

Do các electron là không phân biệt được và theo nguyên lý Pauli thì hàm sóng của phân tử hydro có thể viết thành

$$\Psi_S = [\Psi(r_{a1})\Psi(r_{b2}) + \Psi(r_{a2})\Psi(r_{b1})]\chi_0$$

hay

$$\Psi_A = [\Psi(r_{a1})\Psi(r_{b2}) - \Psi(r_{a2})\Psi(r_{b1})]\chi_1 ,$$

trong đó χ_0, χ_1 lần lượt là các hàm sóng của trạng thái đơn bội và bội ba, $\psi(r) = \frac{\lambda^{3/2}}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda r}$, tham số λ bằng 1 đối với nguyên tử hydro trạng thái cơ bản.

(b) Khi khoảng cách giữa các hạt nhân là rất lớn năng lượng phân tử đơn giản là tổng năng lượng của các nguyên tử.

Nếu hai electron cùng xuất hiện ở cùng một vị trí không gian, spin của chúng phải ngược nhau theo nguyên lý Pauli. Trong phân tử hydro lực hút tĩnh điện giữa hai hạt nhân và các electron có xu hướng tập trung ở giữa các hạt nhân, ép chúng vào với nhau và do đó giống như một trạng thái đơn bội. Khi hai nguyên tử hydro được đưa lại gần nhau từ khoảng cách vô cùng, lực đẩy đối với hai spin cùng chiều làm cho năng lượng trạng thái bội ba tăng và lực hút giữa hai spin ngược chiều gây ra sự giảm năng lượng trạng thái đơn bội cho tới khi đạt tới khoảng cách $\sim 1,5a_0$ sau đó năng lượng của cả hai trạng thái sẽ tăng. Do vậy, trạng thái đơn bội có năng lượng nhỏ hơn ở khoảng cách hạt nhân tiêu chuẩn.

(c) Ảnh hưởng của lực Coulomb giữa các electron đối với năng lượng phân tử gồm hai phần, một là tích phân Coulomb từ tương tác của một electron ở vị trí 1 và một electron ở vị trí 2. Thành phần khác là tích phân trao đổi từ thực tế là một phần thời gian electron 1 ở vị trí 1 và electron 2 ở vị trí 2 và một phần thời gian electron 1 ở vị trí 2 và electron 2 ở vị trí 1. Tích phân trao đổi có nguồn gốc từ tính đồng nhất của các electron và nguyên lý Pauli và không có sự tương ứng trong vật lý cổ điển. Lực liên quan tới nó gọi là lực trao đổi.

Tích phân trao đổi có dạng

$$\varepsilon = \iint d\tau_1 d\tau_2 \frac{1}{r_{12}} \psi^*(r_{a1})\psi(r_{b1})\psi(r_{a2})\psi^*(r_{b2}) .$$

Nếu hai hạt nhân ở xa nhau, các electron là không thể phân biệt được và sự phân biệt giữa hàm sóng đối xứng và phản đối xứng biến mất; vì vậy cũng

không còn lực trao đổi.

1133

(a) Xét trạng thái cơ bản của một phân tử tương tự quả tạ đôi: khối lượng của mỗi hạt nhân $= 1,7 \times 10^{-24}$ g, khoảng cách hạt nhân cân bằng là $= 0,75$ Å. Xem các hạt nhân là không phân biệt được. Hãy tính hiệu năng lượng giữa hai mức năng lượng quay đầu tiên của phân tử này. Lấy $\hbar = 1,05 \times 10^{-27}$ ec.s.

(b) Khi hình thành H_2 từ nguyên tử hydro, 75% phân tử được tạo thành trong trạng thái -octo và còn lại là ở trạng thái -para. Tìm hiệu năng lượng giữa hai trạng thái. Tại sao lại có tỉ lệ 75%?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Momen quán tính của phân tử là

$$I_0 = \mu r^2 = \frac{1}{2} m r^2 ,$$

trong đó r là khoảng cách giữa các hạt nhân. Năng lượng quay là

$$E_J = \frac{\hbar^2}{2I_0} J(J+1) ,$$

Với

$$J = \begin{cases} 0, 2, 4, \ldots & \text{với hydro-para} , \\ 1, 3, 5, \ldots & \text{với hydro-octo} . \end{cases}$$

Do

$$\frac{\hbar^2}{2I} = \frac{\hbar^2}{mr^2} = \frac{(\hbar c)^2}{mc^2 r^2} = \frac{1973^2}{9,4 \times 10^8 \times 0,75^2} = 7,6 \times 10^{-3} \text{ eV} ,$$

nên hiệu năng lượng giữa các mức quay $J = 0$ và $J = 1$ là

$$\Delta E_{0,1} = \frac{\hbar^2}{I_0} = 1,5 \times 10^{-2} \text{ eV} .$$

(b) Hai hạt nhân của phân tử hydro là các proton với spin $\frac{1}{2}$. Do vậy, phân tử H_2 có hai trạng thái spin hạt nhân $I = 1, 0$. Các trạng thái với spin hạt nhân toàn phần $I = 1$ có hàm spin đối xứng và chính là hydro-octo, và các trạng thái với $I = 0$ có hàm spin phản đối xứng tương ứng với hydro-para.

Tỉ số giữa số lượng H_2-octo và H_2-para được cho bởi độ suy biến $2I+1$ của hai trạng thái spin

$$\frac{\text{bậc suy biến của } H_2 - octo}{\text{bậc suy biến của } H_2 - para} = \frac{3}{1}.$$

Do đó, 75% phân tử H_2 là ở trạng thái octo.

1134

Một hạt nhân ${}^7N_{14}$ có spin hạt nhân $I = 1$. Giả thiết rằng phân tử hai nguyên tử N_2 có thể quay nhưng không dao động ở nhiệt độ thường và bỏ qua chuyển động của electron. Hãy tìm tỉ số phân tử octo và para trong mẫu khí nitơ. (Octo = trạng thái spin đối xứng; para= trạng thái spin phản đối xứng). Điều gì xảy ra với tỉ lệ đó nếu nhiệt độ được hạ xuống gần không độ tuyệt đối?

(*SUNY, Buffalo*)

Lời giải:

Hạt nhân ${}^7N_{14}$ là một boson với spin $I = 1$, do vậy, hàm sóng toàn phần của hệ gồm những hạt như vậy phải đối xứng. Đối với nitơ-octo, hạt có spin đối xứng, số lượng tử quay J phải là số chẵn để hàm sóng toàn phần đối xứng. Đối với nitơ-para, với spin phản đối xứng, J phải là số lẻ.

Các mức năng lượng quay của N_2 là

$$E_J = \frac{\hbar^2}{2H} J(J+1), \qquad J = 0, 1, 2, \dots .$$

trong đó H là momen quán tính của nó. Vật lý thống kê cho ta

$$\frac{\text{số lượng nitơ-para}}{\text{số lượng nitơ-octo}} = \frac{\sum\limits_{J\text{chẵn}} (2J+1)\exp\left[-\frac{\hbar^2}{2HkT}J(J+1)\right]}{\sum\limits_{J\text{lẻ}} (2J+1)\exp\left[-\frac{\hbar^2}{2HkT}J(J+1)\right]} \times \frac{I+1}{I},$$

trong đó I là spin của hạt nhân nitơ.

Nếu $\hbar^2/IIRT \ll 1$, ta có thể lấy xấp xỉ tổng bằng tích phân:

$$\sum_{J\text{chẵn}} (2J+1)\exp\left[-\frac{\hbar^2}{2HkT}J(J+1)\right]$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}(4m+1)\exp\left[-\frac{\hbar^2}{2HkT}2m(2m+1)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{\hbar^2 x}{2HkT}\right)dx=\frac{HkT}{\hbar^2},$$

trong đó $x = 2m(2m+1)$;

$$\sum_{J\text{lẻ}}(2J+1)\exp\left[-\frac{\hbar^2}{2HkT}J(J+1)\right]$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}(4m+3)\exp\left[-\frac{\hbar^2}{2HkT}(2m+1)(2m+2)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{\hbar^2 y}{2HkT}\right)dy=\frac{HkT}{\hbar^2}\exp\left(-\frac{\hbar^2}{HkT}\right),$$

trong đó $y = (2m+1)(2m+2)$.

Do vậy ta có

$$\frac{\text{số lượng para-nitrogen}}{\text{số lượng ortho-nitrogen}}=\frac{I+1}{I}\exp\left(\frac{\hbar^2}{HkT}\right)\approx\frac{I+1}{I}$$

$$=\frac{1+1}{1}=2:1.$$

Khi $T \to 0$, $\hbar^2/HkT \gg 1$, khi đó ta có

$$\sum_{J\text{chẵn}} (2J+1)\exp\left[-\frac{\hbar^2}{2HkT}J(J+1)\right]$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}(4m+1)\exp\left[-\frac{\hbar^2}{2HkT}2m(2m+1)\right] \approx 1,$$

$$\sum_{J\text{lẻ}}(2J+1)\exp\left[-\frac{\hbar^2}{2HkT}J(J+1)\right]$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}(4m+3)\exp\left[-\frac{\hbar^2}{2HkT}(2m+1)(2m+2)\right]$$

$$\approx 3\exp\left[-\frac{\hbar^2}{HkT}\right],$$

chỉ giữ lại số hạng bậc thấp nhất. Do vậy, ta có

$$\frac{\text{số lượng para-nitrogen}}{\text{số lượng ortho-nitrogen}} \approx \frac{I+1}{3I}\exp\left(\frac{\hbar^2}{HkT}\right) \to \infty,$$

có nghĩa là các phân tử N_2 đều nằm ở trạng thái para ở 0 K.

1135

Trong HCl có một số vạch hấp thụ với số sóng (theo cm^{-1}) là 83,03; 103,73; 124,30; 145,03; 165,51 và 185,86. Các vạch này là chuyển mức quay hay chuyển mức dao động? Nếu là chuyển mức dao động, thì tần số đặc trưng là bao nhiêu? Nếu là chuyển mức quay thì giá trị J tương ứng là bao nhiêu, và momen quán tính của HCl là bằng bao nhiêu? Trong trường hợp đó, ước lượng khoảng cách giữa các hạt nhân.

(*Chicago*)

Lời giải:

Độ tách biệt trung bình giữa các vạch của phổ đã cho là 20,57 cm^{-1}. Khoảng cách giữa hai vạch dao động gần nhau là cỡ 10^{-1} eV = 10^3 cm^{-1}. Do vậy, phổ không thể bắt nguồn từ chuyển mức năng lượng dao động, mà phải là do chuyển mức quay.

Các mức quay được cho bởi

$$E = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1)\,,$$

trong đó J là số lượng tử quay, I là momen quán tính của phân tử

$$I = \mu R^2 = \frac{m_{Cl} m_H}{m_{Cl} + m_H} R^2 = \frac{35}{36} m_H R^2\,,$$

μ là khối lượng rút gọn của hai hạt nhân tạo nên phân tử và R là khoảng cách giữa chúng. Trong chuyển mức $J' \to J' - 1$, ta có

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{\hbar^2}{2I}[J'(J'+1) - (J'-1)J'] = \frac{\hbar^2 J'}{I}\,,$$

hay

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{\hbar J'}{2\pi I c}\,.$$

Khi đó, độ phân tách giữa các vạch quay lân cận là

$$\Delta\tilde{\nu} = \frac{\hbar}{2\pi I c}\,,$$

từ đó ta có

$$R = \left[\frac{\hbar c}{2\pi\left(\frac{35}{36}\right) m_H c^2 \Delta\tilde{\nu}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\frac{19,7\times 10^{-12}}{2\pi\left(\frac{35}{36}\right)\times 938\times 20,57}\right]^{\frac{1}{2}} = 1,29\times 10^{-8}\ \text{cm} = 1,29\ \text{Å}\,.$$

Do $J' = \frac{\tilde{\nu}}{\Delta\tilde{\nu}}$, nên các vạch đã cho tương ứng với $J' = 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

1136

Khi phổ Raman của nitơ ($^{14}N^{14}N$) được đo lần đầu tiên (trước khi Chadwick phát hiện ra nơtron vào năm 1932), các nhà khoa học rất bối rối khi phát hiện rằng hạt nhân nitơ có spin $I = 1$. Hãy giải thích

(a) làm cách nào họ có thể tìm được hạt nhân spin $I = 1$ từ phổ Raman;

(b) tại sao các nhà khoa học lại ngạc nhiên khi thấy hạt nhân nitơ có $I = 1$. Trước năm 1932 người ta cho rằng hạt nhân bao gồm proton và electron.

(*Chicago*)

Lời giải:

(a) Đối với phân tử hai nguyên tử đồng nhất như $(^{14}N)_2$, nếu mỗi nguyên tử có spin hạt nhân I, phân tử có thể có các trạng thái spin hạt nhân toàn phần đối xứng và phản đối xứng với tỉ số độ cư trú $(I+1)/I$. Do hạt nhân nguyên tử nitơ là một boson, nên hàm sóng toàn phần của phân tử phải đối xứng. Khi trạng thái quay có J chẵn, trạng thái spin phải đối xứng. Ngược lại, khi số lượng tử quay J lẻ thì trạng thái spin phải phản đối xứng. Quy tắc lựa chọn đối với chuyển mức Raman là $\Delta J = 0, \pm 2$, vì vậy, chuyển mức Raman luôn xuất hiện tương ứng với chuyển mức $J_{\text{chẵn}} \to J_{\text{chẵn}}$ hay $J_{\text{lẻ}} \to J_{\text{lẻ}}$. Điều này có nghĩa là khi J thay đổi một đơn vị thì cường độ của vạch Raman đến lượt cũng thay đổi theo tỉ số $(I+1)/I$. Do vậy, đo tỉ số cường độ của của các vạch Raman, ta có thể xác định được I.

(b) Nếu hạt nhân nitơ được cấu tạo bởi 14 proton và 7 electron (điện tích hạt nhân =7) thì nó sẽ có spin là số lẻ lần của 1/2, điều này không phù hợp với thí nghiệm. Mặt khác, nếu hạt nhân nitơ cấu tạo bởi 7 proton và 7 nơtron thì một spin hạt nhân tổng cộng được trông đợi đúng như thực nghiệm.

1137

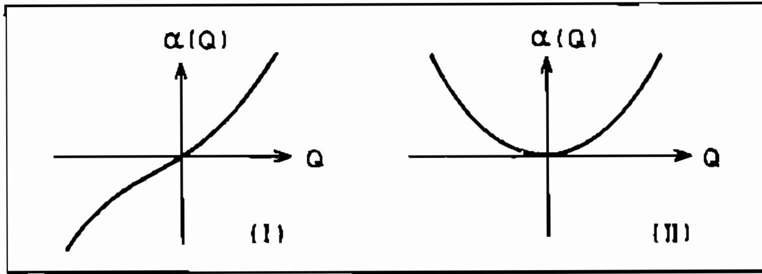
Một phân tử thể hiện một kiểu dao động chuẩn với tọa độ chuẩn Q và tần số Ω có độ phân cực là $\alpha(Q)$. Nó được đặt vào một trường ngoài $E = E_0 \cos \omega_0 t$. Coi phân tử như là một dao động tử cổ điển.

(a) Chứng minh rằng phân tử có thể tán xạ các bức xạ ở tần số ω_0 (tán xạ Rayleigh) và $\omega_0 \pm \Omega$ (hiệu ứng Raman bậc nhất).

(b) Với $\alpha(Q)$ nào thì sẽ không có tán xạ Raman bậc nhất?

(c) Khí O_2 có thể hiện hiệu ứng Raman dao động bậc nhất không? Khí O_2 có dải hấp thụ hồng ngoại bậc nhất hay không? Giải thích ngắn gọn câu trả lời.

(*Chicago*)



Hình 1.61

Lời giải:

(a) Khai triển $\alpha(Q)$ quanh $Q = 0$,

$$\alpha(Q) = \alpha_0 + \left(\frac{d\alpha}{dQ}\right)_{Q=0} Q + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\alpha}{dQ^2}\right)_{Q=0} Q^2 + \cdots .$$

và chỉ giữ lại hai số hạng đầu tiên, khi đó momen lưỡng cực của phân tử có thể tính xấp xỉ theo

$$P = \alpha E \approx \left[\alpha_0 + \left(\frac{d\alpha}{dQ}\right)_{Q=0} Q\cos\Omega t\right] E_0 \cos\omega_0 t$$

$$= \alpha_0 E_0 \cos\omega_0 t + QE_0 \left(\frac{d\alpha}{dQ}\right)_{Q=0} \left\{\frac{1}{2}[\cos(\omega_0+\Omega)t + \cos(\omega_0-\Omega)t]\right\} .$$

Bởi vì một lưỡng cực sẽ phát xạ năng lượng tại tần số dao động, nên phân tử không những tán xạ bức xạ tại tần số ω_0 mà cả tại tần số $\omega_0 \pm \Omega$.

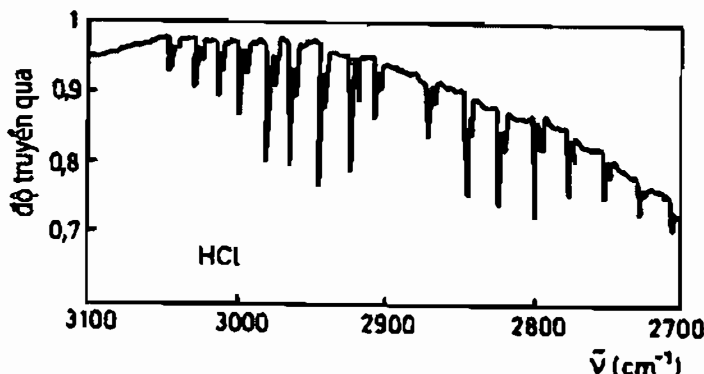
(b) Hiệu ứng Raman bậc nhất bắt nguồn từ thành phần liên quan tới $(\frac{d\alpha}{dQ})_{Q=0}$. Do vậy, trong trường hợp (II) trong đó $(\frac{d\alpha}{dQ})_{Q=0} = 0$ sẽ không có hiệu ứng Raman bậc một.

(c) O_2, sẽ có hiệu ứng Raman bậc một, với trường hợp này có một sự thay đổi trong độ phân cực với tọa độ chuẩn của nó sao cho $(\frac{d\alpha}{dQ})_{Q=0} \neq 0$. Tuy nhiên, không có dải hấp thụ hồng ngoại bậc nhất, bởi vì do phân bố điện tích của O_2 là hoàn toàn đối xứng, nên nó không có momen lưỡng cực điện riêng, và dao động và quay của nó không làm thay đổi momen lưỡng cực điện.

1138

Trong hình 1.62 mô tả sự truyền ánh sáng qua hơi HCl ở nhiệt độ phòng

như là hàm của số sóng (nghịch đảo bước sóng trong đơn vị cm^{-1}) giảm từ trái qua phải.



Hình 1.62

Hãy giải thích tất cả các đặc điểm của phổ truyền qua này và nêu các thông tin định lượng về HCl. Vẽ sơ đồ mức năng lượng phù hợp chú thích bằng các số lượng tử để bổ sung cho phần giải thích. Không xét tới sự giảm chậm đường cơ sở trên với $\lambda^{-1} < 2900$ cm^{-1} và giả sử rằng đường cơ sở trên đỉnh phổ đó thể hiện độ truyền qua 100%. Độ lớn tương đối của các đường hấp thụ là chính xác.

(*Chicago*)

Lời giải:

Hình 1.62 mô tả phổ dao động quay của các phân tử hydro với hai đồng vị của clo, $H^{35}Cl$ và $H^{37}Cl$, năng lượng chuyển tiếp sẽ là

$$E_{v,k} = (v + 1/2)h\nu_0 + \frac{\hbar^2 k(k+1)}{2I},$$

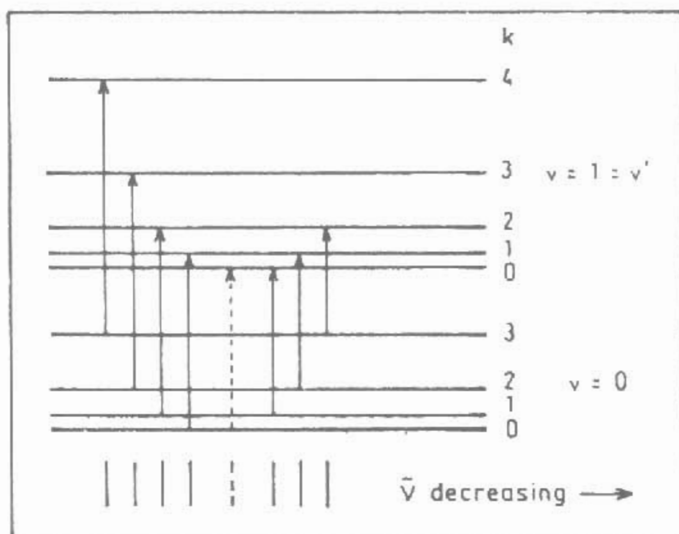
trong đó v, k lần lượt là các số lượng tử dao động và số lượng tử quay. Quy tắc lựa chọn là $\Delta v = \pm 1, \Delta k = \pm 1$.

Vạch hấp thụ bị thiếu ở giữa phổ thể hiện trong hình. 1.63 ứng với chuyển mức $k = 0 \to k' = 0$. Vạch bị cấm này là tại $\lambda^{-1} = 2890$ cm^{-1}, hay $\nu_0 = c\lambda^{-1} = 8,67 \times 10^{13}$ s^{-1}.

Từ hệ thức

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{\mu}},$$

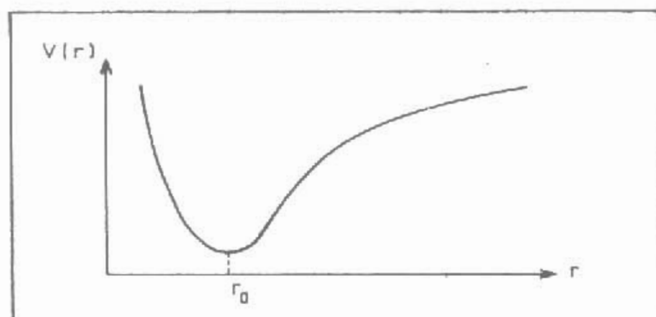
trong đó K là hằng số lực, $\mu = \frac{35}{36}m_H = 1,62 \times 10^{-24}$ g là khối lượng rút gọn



Hình 1.63

của HCl, ta thu được $K = 4.8 \times 10^5$ ec cm^{-2} = 30 eV Å^{-2}.

Hình 1.64 thể hiện sơ lược thế giữa hai nguyên tử của HCl. r có thể dao động nhỏ quanh r_0 với hằng số lực $K = \frac{d^2V}{dr^2}|_{r=r_0}$. Từ độ tách biệt của các vạch phổ quay lân cận nhau $\Delta\tilde{\nu} = 20,5$ cm^{-1}, ta có thể tìm được khoảng cách nguyên tử cân bằng (**Bài tập 1135**)



Hình 1.64

$$r_0 = \left[\frac{\hbar c}{2\pi\left(\frac{36}{37}\right)m_H c^2 \Delta\bar{\nu}}\right]^{\frac{1}{2}} = 1,30 \times 10^{-8}\ \text{cm}$$
$$= 1,30\ \text{Å}\,.$$

Tỉ số đồng vị có thể thu được từ tỉ số cường độ của hai dãy phổ trong hình 1.62. Đối với $H^{35}Cl$, $\mu = \frac{35}{36}m_H$, và đối với $H^{37}Cl$, $\mu = \frac{37}{38}m_H$. Do số sóng ở vạch phổ là $\bar{\nu} \propto \frac{1}{\mu}$, nên số sóng ở vạch phổ của $H^{37}Cl$ nhỏ hơn vạch tương ứng của $H^{35}Cl$. Ta thấy từ hình 1.62 rằng tỉ số của các cường độ phổ tương ứng là 3:1, do vậy, tỉ số đồng vị của ^{35}Cl trên ^{37}Cl là 3:1.

1139

(a) Sử dụng thực tế rằng electron trong một phân tử bị giam cầm trong một thể tích thông thường của phân tử, tính khoảng năng lượng giữa các trạng thái kích thích của các electron (E_{elect}).

(b) Khi các hạt nhân trong phân tử dịch chuyển nó làm méo hàm sóng electron. Sự biến dạng này làm thay đổi năng lượng electron. Các hạt nhân dao động quanh vị trí năng lượng cực tiểu, bao gồm năng lượng electron và năng lượng đẩy Coulomb giữa các hạt nhân. Tính tần số và năng lượng của các dao động này (E_{vib}) bằng cách cho rằng hạt nhân ở trong một thế năng của một dao động tử điều hòa.

(c) Tính độ lệch khỏi vị trí cân bằng của hạt nhân.

(d) Tính năng lượng của các kích thích quay (E_{rot}).

(e) Tính tỉ số $E_{\text{elect}} : E_{\text{vib}} : E_{\text{rot}}$ theo tỉ số của khối lượng electron so với khối lượng hạt nhân, m_e/m_n.

(Columbia)

Lời giải:

(a) Nguyên lý bất định $pd \approx \hbar$ cho ta khoảng năng lượng giữa hai trạng thái kích thích là $E_{\text{elect}} = \frac{p^2}{2m_e} \approx \frac{\hbar^2}{2m_e d^2}$, trong đó d là kích thước dài của phân tử, có cùng bậc về độ lớn với bán kính Bohr $a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}$.

(b) Ở điều kiện cân bằng, lực đẩy Coulomb giữa các hạt nhân là $f \approx \frac{e^2}{d^2}$, với gradien là $K \approx \frac{f}{d} \approx \frac{e^2}{d^3}$. Các hạt nhân sẽ dao động quanh vị trí cân bằng

với tần số góc là

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \approx \sqrt{\frac{m_e}{m}}\sqrt{\frac{e^2 a_0}{m_e d^4}} = \sqrt{\frac{m_e}{m}}\frac{\hbar}{m_e d^2},$$

trong đó m là khối lượng rút gọn của hạt nhân nguyên tử.

Do vậy, ta có

$$E_{\text{vib}} = \hbar\omega \approx \sqrt{\frac{m_e}{m}} E_{\text{elect}} .$$

(c) Do

$$E_{\text{vib}} = \frac{1}{2} m\omega^2 (\Delta x)^2 = \hbar\omega ,$$

ta có

$$\Delta x \approx \left(\frac{m_e}{m}\right)^{\frac{1}{4}} d .$$

(d) Năng lượng quay có độ lớn cỡ $E_{\text{rot}} \approx \frac{\hbar^2}{2I}$. Với $I \approx md^2$, ta có

$$E_{\text{rot}} \approx \frac{m_e}{m} E_{\text{elect}} .$$

(e) Do $m \approx m_n$, khối lượng hạt nhân, nên ta có

$$E_{\text{elect}} : E_{\text{vib}} : E_{\text{rot}} \approx 1 : \sqrt{\frac{m_e}{m_n}} : \frac{m_e}{m_n} .$$

1140

Vẽ đường cong thế năng $V(r)$ đối với phân tử HF theo khoảng cách r giữa tâm của các hạt nhân, chỉ ra năng lượng phân tách trên sơ đồ đã vẽ.

(a) Biểu thức gần đúng đơn giản nào của $V(r)$ có thể sử dụng ở lân cận cực tiểu của nó để tính các mức năng lượng dao động? Nếu năng lượng điểm 0 của HF là 0,265 eV, hãy sử dụng sự xấp xỉ đó (không cần tính toán chi tiết) để tính năng lượng điểm 0 của phân tử DF (D = đơteron, F = ^{19}F).

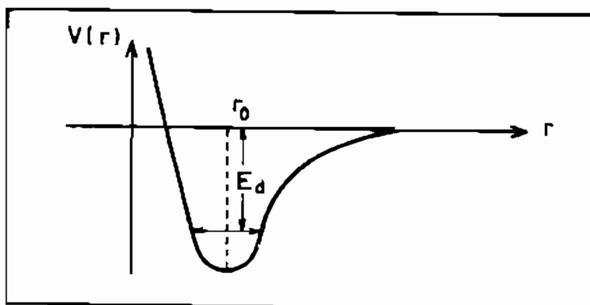
(b) Phát biểu quy tắc lựa chọn đối với các chuyển dời điện từ giữa các mức dao động trong HF trong phạm vi sự xấp xỉ trên, và giải thích ngắn gọn câu

trả lời. Năng lượng photon của các chuyển dời này là bao nhiêu?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Hình 1.65 thể hiện $V(r)$ và năng lượng phân tách E_d cho phân tử HF. Ở lân cận điểm thế cực tiểu r_0, ta có thể dùng xấp xỉ sau



Hình 1.65

$$V(r) \approx \frac{1}{2}k(r - r_0)^2 .$$

Do vậy, chuyển động quanh r_0 là dao động điều hòa đơn giản với tần số góc $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$, μ là khối lượng rút gọn của các hạt nhân. Năng lượng điểm 0 là $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0$.

Do tính chất điện của chúng giống nhau nên DF và HF có cùng một đường cong thế. Tuy nhiên, khối lượng rút gọn khác nhau

$$\mu(DF) = \frac{m(D)m(F)}{m(D) + m(F)} = \frac{2 \times 19}{2 + 19}u = 1,81u ,$$

$$\mu(HF) = \frac{m(H)m(F)}{m(H) + m(F)} = \frac{1 \times 19}{1 + 19}u = 0,95u .$$

trong đó u là khối lượng nucleon.

Do vậy

$$\frac{E_0(HF)}{E_0(DF)} = \sqrt{\frac{\mu(DF)}{\mu(HF)}}$$

và năng lượng điểm 0 của DF là

$$E_0(DF) = \sqrt{\frac{\mu(HF)}{\mu(DF)}}E_0(HF) = 0,192 \text{ eV} .$$

(b) Trong gần đúng dao động tử điều hòa, các mức năng lượng dao động được cho bởi

$$E_\nu = (\nu + 1/2)\hbar\omega, \quad \nu = 0, 1, 2, 3 \ldots .$$

Quy tắc lựa chọn đối với các chuyển tiếp điện từ giữa các mức năng lượng đó là

$$\Delta\nu = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots ,$$

trong khi quy tắc lựa chọn đối với các chuyển mức lưỡng cực điện là

$$\Delta\nu = \pm 1 .$$

Nói chung, bức xạ điện từ phát ra bởi điện tích chuyển động bao gồm các thành phần đa cực từ và đa cực điện, mỗi thành phần có quy tắc lựa chọn riêng $\Delta\nu$ và mối liên hệ chẵn lẻ giữa các trạng thái đầu và cuối. Nhiễu loạn bậc thấp nhất ứng với chuyển mức lưỡng cực điện đòi hỏi $\Delta\nu = \pm 1$ và phải có sự thay đổi tính chẵn lẻ.

Đối với các chuyển mức dao động đơn thuần, năng lượng của photon phát ra xấp xỉ bằng $\hbar\omega_0 \sim 0.1$ đến 1 eV.

1141

Các phân tử hai nguyên tử như HBr có năng lượng kích thích bao gồm các thành phần điện tử, thành phần quay và thành phần dao động.

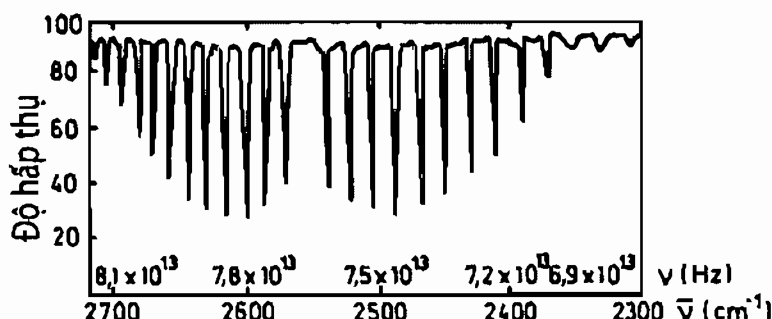
(a) Làm một phép xấp xỉ thô, tính độ lớn của 3 thành phần này của năng lượng, dựa vào các hằng số vật lý như $M, m_e, e, \ldots$, trong đó M là khối lượng hạt nhân.

(b) Đối với phần này và các phần sau, giả thiết rằng phân tử nằm ở trạng thái điện tử cơ bản. Quy tắc lựa chọn nào quy định các chuyển mức bức xạ? Giải thích câu trả lời.

(c) Một phổ hấp thụ hồng ngoại của hơi HBr được biểu diễn trong hình 1.66 (hấp thụ hồng ngoại liên quan tới dịch chuyển điện tử). Sử dụng nó để xác định momen quán tính và tần số dao động ω_0 cho HBr.

(d) Chú ý rằng khoảng cách giữa các vạch hấp thụ tăng khi năng lượng tăng. Giải thích điều này?

(e) Phổ này khác gì so với phổ của các phân tử đồng nguyên tử như H_2 hoặc D_2?



Hình 1.66

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Gọi a là kích thước dài của phân tử lưỡng nguyên tử. Do các electron hóa trị chuyển động trong một quỹ đạo có kích thước dài a, độ bất định của động lượng là $\Delta p \approx h/a$ và do vậy độ lớn của năng lượng điểm 0 có bậc là

$$E_e \approx \frac{(\Delta p)^2}{m_e} \approx \frac{\hbar^2}{m_e a^2} .$$

Một dao động tử điều hòa khối lượng m và độ cứng k được dùng như một mô hình cho dao động hạt nhân. Một sự thay đổi khoảng cách giữa các hạt nhân sẽ làm thay đổi đáng kể hàm sóng điện tử và và do vậy liên quan đến sự thay đổi năng lượng điện tử, tức là $ka^2 \approx E_e$.

Do vậy

$$E_{\text{vib}} \approx h\omega \approx \hbar\sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{m_e}{M}}\sqrt{\frac{\hbar^2}{m_e a^2}}\sqrt{ka^2} \approx \left(\frac{m_e}{M}\right)^{\frac{1}{2}} E_e$$

Ta có thể thu được các mức năng lượng quay bằng cách coi phân tử như là một vật quay với momen quán tính là $I \approx Ma^2$. Do vậy

$$E_{\text{rot}} \approx \frac{\hbar^2}{I} \approx \frac{m_e}{M}\frac{\hbar^2}{m_e a^2} \approx \frac{m_e}{M} E_e .$$

(b) Các quy tắc lựa chọn đối với các chuyển mức phát xạ là $\Delta J = \pm 1$. $\Delta v = \pm 1$, trong đó J là số lượng tử quay, v là số lượng tử dao động. Do các electron vẫn nằm trong trạng thái cơ bản, nên không có chuyển dời giữa các mức năng

lượng electron. Như vậy, các chuyển dời xảy ra giữa các mức năng lượng dao động và các mức năng lượng quay.

(c) Từ hình 1.66 ta có thể xác định khoảng cách giữa các vạch hấp thụ liền kề, vào khoảng $\Delta\tilde{\nu} = 18$ cm^{-1}. Do **(Bài tập 1135)** $\Delta\tilde{\nu} = 2B$, trong đó $B = \frac{\hbar}{4\pi Ic}$, nên momen quán tính là

$$I = \frac{\hbar}{2\pi c\Delta\tilde{\nu}} = 3,1 \times 10^{-40} \text{ g cm}^2 .$$

Tương ứng với vạch phổ thiếu ở miền giữa ta tìm được tần số dao động $\nu_0 = 3 \times 10^{10} \times 2560 = 7,7 \times 10^{13}$ Hz.

(d) Thực tế các phân tử hai nguyên tử không hoàn toàn tương đương với một dao động tử điều hòa. Với sự tăng của năng lượng dao động, khoảng cách trung bình giữa các hạt nhân sẽ lớn hơn một chút, hay B_v nhỏ hơn

$$B_v = B_e - \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\alpha_e ,$$

trong đó B_e là giá trị của B khi các hạt nhân ở vị trí cân bằng, $\alpha_e > 0$ là một hằng số. Một chuyển mức từ E đến $E'(E < E')$ tạo ra một vạch hấp thụ của số sóng

$$\begin{aligned}\tilde{\nu} &= \frac{E' - E}{hc} = \frac{1}{hc}[(E'_{\text{vib}} + E'_{\text{rot}}) - (E_{\text{vib}} + E_{\text{rot}})] \\ &= \tilde{\nu}_0 + B'J'(J' + 1) - BJ(J + 1) .\end{aligned}$$

trong đó $B' < B$. Đối với nhánh R, $J' = J + 1$, ta có

$$\tilde{\nu}_R = \tilde{\nu}_0 + (B' + B)J' + (B' - B)J'^2 ,$$

và vì vậy, độ phân tách vạch phổ là

$$\Delta\tilde{\nu} = (B' + B) + (B' - B)(2J' + 1) ,$$

trong đó $J' = 1, 2, 3 \ldots$. Do vậy, khi năng lượng của các vạch phổ tăng, nghĩa là, J' tăng, thì $\Delta\tilde{\nu}$ sẽ giảm.

Đối với nhánh P, $J' = J - 1$,

$$\tilde{\nu}_P = \tilde{\nu}_0 - (B' + B)J + (B' - B)J^2 ,$$

$$\Delta\tilde{\nu} = (B' + B) - (B' - B)(2J + 1) .$$

trong đó $J = 1, 2, 3 \ldots$. Do vậy $\Delta\tilde{\nu}$ sẽ giảm khi năng lượng vạch phổ tăng.

(e) Các phân tử tạo bởi hai nguyên tử đồng nhất như H_2 và D_2 không có momen lưỡng cực, vì vậy, sự quay và dao động của các phân tử này không liên quan tới sự hấp thụ hay phát xạ của lưỡng cực điện. Do vậy, nó trong suốt trong vùng hồng ngoại.

1142

Trong số gần đây của tạp chí khoa học (Science Magazine), G. Zweig đưa ra một ý tưởng về việc sử dụng các quac tự do (nếu chúng tồn tại) để làm xúc tác cho phản ứng nhiệt hạch của đơteri. Trong một phân tử đơteri âm thông thường (ded) hai đơteron được liên kết với nhau bởi một electron, mà hầu hết thời gian nó nằm giữa hai hạt nhân. Về nguyên tắc một nơtron có thể chui hầm từ một proton sang một proton khác, tạo ra triti cộng với p và năng lượng, nhưng khoảng cách lớn đến mức xác suất có thể bỏ qua. Nếu electron được thay thế bởi một quac nặng, điện tích $-4e/3$, khoảng cách giảm và xác suất chui hầm tăng lên đáng kể. Sau phản ứng, nói chung quac sẽ thoát ra và kết hợp với đơteron khác để tạo ra một nguyên tử dQ, điện tích $-e/3$. Nguyên tử phân rã bức xạ xuống trạng thái cơ bản, khi đó thu một đơteron khác trong quỹ đạo n lớn. Nó lại tiếp tục phân rã xuống trạng thái cơ bản. Phản ứng nhiệt hạch tiếp tục rất nhanh và quac lại được giải phóng.

(a) Giả sử quac nặng hơn nhiều đơteron. Độ lớn của khoảng cách đơteron ở trạng thái cơ bản của phân tử dQd là bao nhiêu?

(b) Viết biểu thức xác định bậc độ lớn của thời gian để đơteron bị thu ở một bán kính lớn (n lớn) trong dQ để phát xạ trở về trạng thái cơ bản. Đưa vào các kí hiệu như khối lượng, điện tích, ... nếu cần; không cần tính toán biểu thức.

(c) Viết biểu thức của xác suất có khoảng cách giữa proton – nơtron trong một đơteron là $r \geq r_0$, với $r_0 \gg 10^{-13}$ cm. Và một lần nữa có thể dùng các kí hiệu như năng lượng liên kết đơteron khi cần, và không tính toán biểu thức đó.

(d) Bằng một mô hình đơn giản cho xác suất chui hầm, giả thiết rằng nếu nơtron đạt tới khoảng cách $r \geq r_0$ so với proton nó chắc chắn sẽ bị thu bởi đơteron khác. Hãy viết biểu thức độ lớn của thời gian sống của dQd (nhưng không tính toán).

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Phân tử dQd có thể coi như là ion H_2^+ với việc chuyển $m_e \to m$, khối lượng dơteron, điện tích hạt nhân $e \to$ điện tích quac $-\frac{4}{3}e$.

Khi đó tương tự với ion H_2^+, Hamintonian cho phân tử dQd có thể viết thành

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} - \frac{4e^2}{3r_1} - \frac{4e^2}{3r_2} + \frac{e^2}{r_{12}},$$

trong đó $r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$, $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ là các vectơ bán kính của dơteron tính từ quac nặng.

Giả sử hàm sóng của trạng thái cơ bản có thể viết như sau

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \Psi_{100}(\mathbf{r}_1)\Psi_{100}(\mathbf{r}_2),$$

trong đó

$$\Psi_{100}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} a^{-3/2} \exp\left(-\frac{r}{a}\right),$$

với

$$a = \frac{3\hbar^2}{4me^2}.$$

Khoảng cách trung bình của các dơteron ở trạng thái cơ bản là

$$\bar{r}_{12} = \frac{1}{\pi^2 a^6} \iint r_{12} \exp\left[-\frac{2(r_1 + r_1)}{a}\right] d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_1 = \frac{8}{5}a = \frac{6\hbar^2}{5me^2}.$$

(b) Một nguyên tử giống hydro với điện tích hạt nhân Ze có năng lượng $-\frac{Z^2e^4m_e}{2\hbar^2n^2}$. Tương tự, phân tử dQd có năng lượng cơ bản là

$$E = -2 \times \left(\frac{4}{3}\right)^2 \frac{me^4}{2\hbar^2} + \frac{e^2}{r_{12}}$$
$$= -\frac{4}{3}\frac{e^2}{a} + \frac{5}{8}\frac{e^2}{a} = -\frac{17}{24}\frac{e^2}{a}.$$

Khi n rất lớn, phân tử có thể coi như là một nguyên tử giống hydro với dQ là hạt nhân (điện tích $-4/3e + e = -e/3$) và d thứ hai thay cho electron quỹ đạo (điện tích $+e$). Năng lượng tương ứng là

$$E_n = -\frac{4}{6}\frac{e^2}{a} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{me^4}{2\hbar^2 n^2} = -\frac{4}{6}\frac{e^2}{a} - \frac{1}{6}\frac{e^2}{a'}\frac{1}{n^2},$$

trong đó $a' = \frac{3\hbar^2}{me^2}$. Do vậy, khi hệ chuyển xuống trạng thái cơ bản, năng lượng phát ra là

$$\Delta E = E_n - E_0 = -\frac{4e^2}{6a} + \frac{17}{24}\frac{e^2}{a} - \frac{e^2}{6a'}\frac{1}{n^2} \approx \frac{e^2}{24a}.$$

Các photon phát ra có tần số

$$\omega = \frac{\Delta E}{\hbar} \approx \frac{e^2}{24\hbar a}.$$

Xác suất chuyển mức trên một đơn vị thời gian cho bởi

$$A_{n1} = \frac{4e^2\omega^3}{3\hbar c^3}|\mathbf{r}_{1n}|^2,$$

và do vậy thời gian để đơteron có bậc bằng

$$\tau = 1/A_{n1} = \frac{3\hbar c^3}{4e^2\omega^3|\mathbf{r}_{1n}|^2}.$$

Hàm sóng của trạng thái kích thích là

$$\Psi_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}[\Psi_{100}(\mathbf{r}_1)\Psi_{nlm}(\mathbf{r}_2) \pm \Psi_{100}(\mathbf{r}_2)\Psi_{nlm}(\mathbf{r}_1)],$$

hàm sóng này chỉ tác dụng lên một d. Bởi vì

$$\langle\Psi_{100}|\mathbf{r}|\Psi_{100}\rangle = 0,$$

ta có

$$\mathbf{r}_{1n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle\Psi_{nlm}|\mathbf{r}|\Psi_{100}\rangle$$

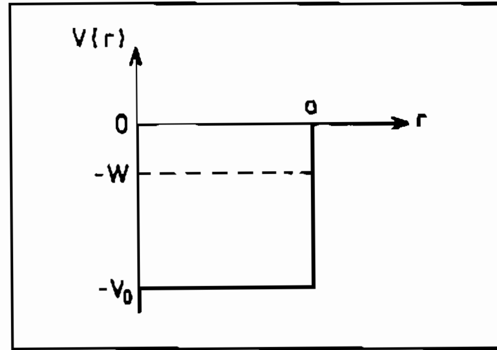
và do vậy

$$\tau = \frac{3\hbar c^3}{2e^2\omega^3|\langle\Psi_{nlm}|\mathbf{r}|\Psi_{100}\rangle|^2}.$$

(c) Trong một đơteron thế tương tác giữa proton và nơtron có thể coi giống như trong hình 1.67, trong đó W là năng lượng liên kết và $a \approx 10^{-13}$ cm.

Ta có thể chứng minh thành phần theo phương bán kính của hàm sóng thỏa mãn phương trình sau

$$R'' + \frac{1}{r}R' + \frac{M}{\hbar^2}[-W - V(r)]R = 0,$$



Hình 1.67

trong đó M là khối lượng nơtron. Đặt $rR = u$. Phương trình trên trở thành

$$u'' - \frac{M}{\hbar^2}[W + V(r)]u = 0\,.$$

Do $V = -V_0$ với $0 \leq r \leq a$ và $V = 0$ với r khác, ta có

$$\begin{cases} u'' - \dfrac{M}{\hbar^2}[W - V_0]u = 0, & (r \leq a)\,, \\ u'' - \dfrac{MW}{\hbar^2}u = 0\,, & (r \geq a)\,. \end{cases}$$

Các điều kiện biên là $u|_{r=0} = 0$ và $u|_{r\to\infty}$ là hữu hạn. Nghiệm thỏa mãn các điều kiện này là

$$u = \begin{cases} A\sin(k_1 r), & (r \leq a) \\ B\exp(-k_2 r), & (r \geq a) \end{cases}$$

trong đó $k_1 = \sqrt{\frac{M}{\hbar^2}(V_0 - W)}$, $k_2 = \sqrt{\frac{MW}{\hbar^2}}$. Hàm sóng cần phải liên tục tại $r = a$, do đó, ta có

$$u = \begin{cases} A\sin(k_1 r), & (r \leq a) \\ A\sin(k_1 a)\exp[-k_2(a - r)]\,. & (r \geq a) \end{cases}$$

Tính liên tục của đạo hàm bậc nhất của hàm sóng tại $r = a$ cho ta

$$\text{cotg}\,(k_1 a) = -k_2/k_1\,.$$

Do vậy, xác suất có $r \geq r_0$ là

$$P = \frac{\int_{r_0}^{\infty} r^2 R^2(r)dr}{\int_0^{\infty} r^2 R^2(r)dr} = \frac{\sin^2(k_1 a)\exp[2k_2(a - r_0)]}{ak_2 - \frac{k_2}{2k_1}\sin(2k_1 a) + \sin^2(k_1 a)}$$

$$\approx \frac{\sin^2(k_1 a)}{ak_2}\exp(-2k_2 r_0)\,,$$

trong đó sử dụng điều kiện $r_0 \gg a$.

Một ước lượng thô của xác suất có thể thu được khi thay $u \approx C\exp(-k_2 r)$, khi đó

$$P = \frac{\int_{r_0}^{\infty}\exp(-2k_2 r)dr}{\int_0^{\infty}\exp(-2k_2 r)dr} = \exp(-2k_2 r_0)\,.$$

(d) Nơtron có vận tốc xuyên tâm trong hố thế là

$$v = \frac{p}{M} = \sqrt{\frac{2(V_0 - W)}{M.}}$$

Xác suất chuyển mức trên một đơn vị thời gian là

$$\lambda = \frac{vP}{a}\,,$$

và do đó thời gian sống dQd được cho bởi

$$\tau = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{a\ln 2}{vP} \approx a\ln 2\sqrt{\frac{M}{2(V_0 - W)}}\exp(2k_2 r_0)\,.$$

PHẦN II

VẬT LÝ HẠT NHÂN

1. CÁC TÍNH CHẤT HẠT NHÂN CƠ BẢN (2001–2023)

2001

Hãy thảo luận về 4 luận cứ độc lập chống lại sự tồn tại của các electron bên trong hạt nhân.

(*Columbia*)

Lời giải:

Luận cứ thứ nhất - Thống kê. Bản chất thống kê của hạt nhân có thể được suy từ phổ quay của phân tử lưỡng nguyên tử. Nếu một hạt nhân (A, Z) bao gồm A proton và $(A - Z)$ electron, thì spin của một hạt nhân lẻ - lẻ hay một hạt nhân chẵn - lẻ sẽ không đúng với kết quả thực nghiệm. Lấy hạt nhân lẻ - lẻ ^{14}N như một thí dụ. Một số chẵn proton tạo ra một spin nguyên trong khi một số lẻ electron tạo ra một spin nguyên và một nửa, do đó, spin toàn phần của hạt nhân ^{14}N sẽ là một nửa nguyên và do đó nó là một fecmion. Nhưng kết quả này không phù hợp với thực nghiệm. Do đó, hạt nhân không thể tạo thành từ proton và electron.

Luận cứ thứ hai - Năng lượng liên kết. Electron là một lepton và không tham gia vào tương tác mạnh liên kết các nucleon với nhau. Nếu electron tồn tại bên trong một hạt nhân, nó có thể tồn tại ở tình trạng liên kết bởi tương tác Coulomb với năng lượng liên kết có bậc độ lớn là

$$E \approx -\frac{Ze^2}{r},$$

trong đó r là bán kính điện từ của hạt nhân, $r = 1,2A^{1/3}$fm. Như thế

$$E \approx -Z\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)\frac{\hbar c}{r} = -\frac{197Z}{137 \times 1,2A^{1/3}} \approx -1,20\frac{Z}{A^{1/3}} \text{ MeV}.$$

Lưu ý rằng, hằng số cấu trúc tinh tế

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}.$$

Giả sử $A \approx 124$, $Z \approx A/2$. Khi đó $E \approx -15$ MeV, và bước sóng de Broglie của electron sẽ là

$$\lambda = \hbar/p = c\hbar/cp = 197/15 = 13 \text{ fm}.$$

Do $\lambda > r$ electron không thể liên kết bên trong hạt nhân.

Luận cứ thứ ba - Momen từ hạt nhân. Nếu hạt nhân bao gồm nơtron và proton, momen từ sẽ là tổng đóng góp của hai loại nucleon. Trong khi các phương pháp ghép cặp khác nhau cho các kết quả khác nhau một ít, momen từ hạt nhân phải cùng bậc độ lớn của của một nucleon, μ_N. Mặt khác, nếu hạt nhân bao gồm proton và electron, momen từ hạt nhân phải cùng bậc độ lớn của một electron, $\mu_e \approx 1800\mu_N$. Kết quả thực nghiệm phù hợp với lập luận trước và mâu thuẫn với lập luận sau.

Luận cứ thứ tư - Phân rã β. Hạt nhân phát xạ electron theo phân rã β, tạo thành hạt nhân con. Do đó, đây là phân rã hai vật và các electron phát xạ phải có phổ đơn mức năng lượng. Điều này trái ngược với phổ β năng lượng liên tục tìm thấy trong loại phân rã đó. Điều đó có nghĩa là trong phân rã β electron phải kèm theo vật thứ ba nào đó, một hạt trung hòa. Điều này mâu thuẫn với giả định là chỉ có proton và electron ở trong một hạt nhân.

Bốn luận cứ trên đây chứng minh rằng electron không tồn tại trong hạt nhân.

2002

Kích thước của hạt nhân có thể xác định bởi (a) tán xạ electron, (b) mức năng lượng của nguyên tử muyon, hay (c) các trạng thái năng lượng cơ bản của đồng vị đa bội spin (spin multiplet). Hãy thảo luận các đại lượng vật lý nào được đo với hai và chỉ hai trong số ba thí nghiệm trên và vì sao các đại lượng này liên quan đến bán kính của hạt nhân.

(*SUNY, Buffalo*)

Lời giải:

(a) Đó là thừa số dạng hạt nhân được đo trong thí nghiệm tán xạ electron:

$$F(q^2) = \frac{(d\sigma)_{\text{exp}}}{(d\sigma)_{\text{point}}},$$

trong đó $(d\sigma)_{\text{exp}}$ là giá trị thực nghiệm, còn $(d\sigma)_{\text{point}}$ là giá trị lý thuyết tìm được bằng cách xem hạt nhân như là một điểm. Với gần đúng Born bậc nhất, ta có

$$F(q^2) = \int \rho(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r}.$$

Giả thiết $\rho(\mathbf{r}) = \rho(r)$ và $\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} \ll 1$, ta có

$$F(q^2) \approx \int \rho(r)\left[1 + \frac{1}{2}(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})^2\right]d^3\mathbf{r} = 1 - \frac{1}{2}\int \rho(r)(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})^2 d^3\mathbf{r}$$

$$= 1 - \frac{1}{e2}\int \rho(r)q^2r^2\cdot 4\pi r^2 dr \int_0^\pi \frac{1}{2}\cos^2\theta\sin\theta d\theta$$

$$= 1 - \frac{1}{6}q^2\langle r^2\rangle$$

với $\langle r^2\rangle = \int \rho(r)r^2 d^3\mathbf{r}$.

Bằng cách xác định sự phân bố theo góc của electron tán xạ đàn tính, ta có thể suy ra $F(q^2)$, và tìm được sự phân bố $\rho(r)$, như một hàm số của r, cho ta một thước đo của kích thước hạt nhân.

(b) Ta có thể đo hiệu số năng lượng giữa trạng thái kích thích và trạng thái cơ bản của nguyên tử muyon. Do khối lượng của một hạt muyon là $m_\mu \approx 210m_e$, bán kính đầu tiên của nguyên tử muyon là $a_\mu \approx (1/210)a_0$, trong đó a_0 là bán kính Bohr, như vậy mức năng lượng của nguyên tử muyon nhạy cảm với bán kính hạt nhân hơn. Như một ví dụ ta hãy xem xét một trạng thái s có Hamintonian là

$$H = -\frac{1}{2m_\mu}\nabla^2 + V(r)\,.$$

Nếu hạt nhân được coi như là chất điểm, khi đó $V(r) = V_0(r) = -e^2/r$, r là khoảng cách từ hạt nhân đến hạt muyon.

Mặt khác nếu ta xem điện tích hạt nhân được phân bố đều trong một hình cầu bán kính R, khi đó

$$V(r) = \begin{cases} -\dfrac{e^2}{2R^3}(3R^2 - r^2)\,, & 0 < r \le R\,,\\ -\dfrac{e^2}{r}\,, & r > R\,. \end{cases}$$

Để tìm ra độ dịch chuyển năng lượng của trạng thái cơ bản, ΔE, gây ra do kích thước hữu hạn của hạt nhân, ta lấy

$$H' = H - H_0 = V(r) - V_0(r) = \begin{cases} -\dfrac{e^2}{2R^3}(3R^2 - r^2) + \dfrac{e^2}{r}\,, & 0 < r \le R\,,\\ 0, & r > R\,, \end{cases}$$

như một nhiễu loạn. Khi đó

$$\Delta E = \langle\Phi_0|H'|\Phi_0\rangle = 4\pi\int_0^R |\Phi_0|^2 H' r^2 dr\,,$$

trong đó $\Phi_0 = \left(\frac{1}{\pi a_\mu^3}\right)^{1/2} e^{-\frac{r}{a_\mu}}$. Do $R \sim 10^{-12}$ cm, $a_\mu \sim 10^{-10}$ cm, ta có thể lấy $\frac{R}{a_\mu} \ll 1$ và từ đó $e^{-2r/a_\mu} \approx \left(1 - \frac{2r}{a_\mu}\right)$. Từ đó $\Delta E = \frac{2}{5}\left(\frac{e^2}{2a_\mu}\right)\left(\frac{R}{a_\mu}\right)^2$, bỏ qua các số hạng bậc $(\frac{R}{a_\mu})^3$ và cao hơn.

Ta có thể xác định năng lượng của tia X phát xạ do sự chuyển dời từ trạng thái kích thích thứ nhất xuống trạng thái cơ bản,

$$E_X = (E_1 - E_0) - \frac{2}{5}\left(\frac{e^2}{a_\mu}\right)\left(\frac{R}{a_\mu}\right)^2,$$

trong đó E_1 và E_0 là các trị riêng của H_0, tức là E_1 là mức năng lượng ở trạng thái kích thích thứ nhất và E_0 là mức năng lượng của trạng thái cơ bản (đối với hạt nhân điện tích điểm). Nếu biết được hiệu số giữa E_X và $(E_1 - E_0)$, có thể suy ra được R.

(c) Cấu trúc hạt nhân của cùng đồng vị đa bội spin là như nhau, bởi vậy sự hiệu số khối lượng ở đa bội bắt nguồn từ tương tác điện từ và hiệu số khối lượng proton-nơtron. Do đó (**Bài tập 2009**)

$$\begin{aligned}\Delta E &\equiv [M(Z,A) - M(Z-1,A)]c^2\\ &= \Delta E_e - (m_n - m_p)c^2\\ &= \frac{3e^2}{5R}[Z^2 - (Z-1)^2] - (m_n - m_p)c^2\,,\end{aligned}$$

từ đó có thể suy ra R.

Người ta tìm được $R \approx R_0 A^{\frac{1}{3}}$ với $R_0 = 1,2 - 1,4$ fm.

2003

Để nghiên cứu kích thước, hình dạng và sự phân bố mật độ hạt nhân người ta sử dụng electron, proton và nơtron như những vật dò.

(a) Tiêu chí của việc lựa chọn vật dò là gì? Hãy giải thích.

(b) Hãy so sánh thuận lợi và không thuận lợi của các vật dò nói trên.

(c) Ý kiến của bạn thế nào về việc sử dụng photon cho mục đích này?

(*SUNY, Buffalo*)

Lời giải:

(a) Tiêu chí cơ bản cho việc lựa chọn vật dò ở đây là bước sóng de Broglie của vật dò nhỏ hơn hay bằng kích thước của vật nghiên cứu. Do đó, $\lambda = h/p \le d_n$, hay $p \ge h/d_n$, trong đó d_n là kích thước dài của hạt nhân. Đối với một nghiên cứu có hiệu quả về phân bố mật độ hạt nhân, ta đòi hỏi $\lambda \ll d_n$.

(b) Electron là vật dò thích hợp cho việc nghiên cứu bán kính điện từ hạt nhân và sự phân bố điện tích bởi vì electron không tham gia vào tương tác mạnh mà chỉ với tương tác điện từ. Kết quả do đó dễ dàng phân tích. Trong thực tế, nhiều kết quả quan trọng đạt được từ tán xạ electron-hạt nhân, nhưng với những chùm electron có năng lượng cao. Do $d_n \approx 10^{-13}$ cm, ta đòi hỏi

$$p_e \approx \hbar/d_n \approx 0,2 \text{ GeV}/c, \qquad \text{hay} \qquad E_e \approx pc = 0,2 \text{ GeV}.$$

Sự tương tác giữa proton và hạt nhân có thể sử dụng để nghiên cứu cấu trúc hạt nhân, hình dạng và sự phân bố. Lợi thế là các chùm proton mật độ cao và thông số thích hợp luôn có sẵn. Sự bất lợi là cả hai tương tác điện từ và tương tác mạnh xuất hiện trong tán xạ proton - hạt nhân, do đó, kết quả khá phức tạp để phân tích.

Nơtron như là vật dò trên nguyên tắc "tinh xảo" hơn nhiều so với proton. Tuy nhiên, rất khó để tạo ra được chùm nơtron có năng lượng cao và thông số thích hợp. Ngoài ra, phát hiện và đo đạc đối với nơtron cũng khó khăn hơn.

(c) Nếu photon được sử dụng như là vật dò để nghiên cứu cấu trúc hạt nhân, photon năng lượng cao mà phải sử dụng liên quan đến hạt nhân sẽ thể hiện tính chất giống như hạt hadron và làm phức tạp bài toán.

2004

Xem xét một hạt nhân biến dạng (có dạng elipsoit, trục dài dài hơn khoảng 10% so với trục ngắn). Nếu bạn tính toán điện thế ở bán kính Bohr thứ nhất, độ chính xác sẽ là bao nhiêu nếu bạn xem hạt nhân như điện tích điểm? Hãy ước lượng một cách hợp lý, không lấy tích phân.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Giả định sự phân bố điện tích trong hạt nhân là đều, trong hình elipsoit và đối xứng trục. Khi đó, momen lưỡng cực điện của hạt nhân là zero, và thế

năng có thể viết dưới dạng sau

$$V = V_p + V_q,$$

trong đó $V_p = Q/r$ là thế năng tạo ra bởi hạt nhân xem như điện tích điểm,

$V_q = MQ/r^3$, M là momen tứ cực điện.

Đối với hạt nhân elipsoit, đặt trục dài là $a = (1+\varepsilon)R$, trục ngắn là $b = (1-\varepsilon/2)R$, trong đó ε là thông số biến dạng, và R là bán kính hạt nhân. Do $a : b = 1,1$, ta có $\frac{3\varepsilon}{2} = 0,1$, hay $\varepsilon = 0,2/3$, và như thế

$$M = \frac{2}{5}(a^2 - b^2) = \frac{2}{5}(a-b)(a+b) = \frac{1,22}{15}R^2.$$

Với hạt nhân trung bình, ta lấy $A \sim 125$, như thế $R = 1,2A^{1/3} = 6$ fm. Khi đó

$$\Delta V = \frac{V_q}{V_p} = \frac{M}{r^2} = \frac{1,22}{15}\frac{R^2}{r^2} = \frac{1,22}{15} \times \left(\frac{6 \times 10^{-13}}{0,53 \times 10^{-8}}\right) \approx 1 \times 10^{-9},$$

tại bán kính Bohr thứ nhất $r = 0,53 \times 10^{-8}$ cm. Như thế, nếu ta xem hạt nhân như điện tích điểm thì sai số tương đối ở thế năng vào khoảng 10^{-9} ở bán kính Bohr thứ nhất.

2005

Tần số tiến động của một hạt nhân trong từ trường của trái đất là 10^{-1}, 10^1, 10^3, 10^5 s^{-1}.

(*Columbia*)

Lời giải:

Tần số tiến động được cho bởi biểu thức

$$\omega = \frac{geB}{2m_N c}.$$

Với $g = 1$, $e = 4,8 \times 10^{-10}$ đv CGSE, $c = 3 \times 10^{10}$ cm/s, $B \approx 0,5$ Gs, $m_N \approx 10^{-23}$g cho những hạt nhân nhẹ, $\omega = \frac{4,8 \times 0,5 \times 10^{-10}}{2 \times 10^{-23} \times 3 \times 10^{10}} = 0,4 \times 10^3$s^{-1}.

Từ đó, câu trả lời là 10^3 s^{-1}.

2006

Cho thông tin sau đối với một vài hạt nhân nhẹ (1 đvklnt = 931,5 MeV)

trên bảng 2.1.

(a) Momen từ gần đúng của nơtron, $^3H_1$, $^3He_2$, and $^6Li_3$ là bao nhiêu?

(b) Năng lượng cực đại của hạt β phát xạ khi $^3H_1$ phân rã thành $^3He_2$ là bao nhiêu?

(c) Phản ứng nào tạo ra nhiều năng lượng hơn, nhiệt hạch của $^3H_1$ và $^3He_2$ hay $^2H_1$ và $^4He_2$?

(*Wisconsin*)

Hạt nhân	J^π	Khối lượng hạt nhân (đvklnt)	momen từ (μ_N)
$^1H_1$	$1/2^+$	1,00783	+2,79
$^2H_1$	1^+	2,01410	+0,86
$^3H_1$	$1/2^+$	3,01605	—
$^3He_2$	$1/2^+$	3,01603	—
$^4He_2$	0^+	4,02603	0
$^6Li_3$	1^+	6,01512	—

Lời giải:

Momen từ hạt nhân được cho bởi $\mu = g\mu_N J$, trong đó J là spin hạt nhân, g là hệ số Landé, μ_N là manheton hạt nhân. Từ đó, từ bảng ta có thể nhận thấy

$$g(^1\mathrm{H}_1) = 2 \times 2,79 = 5,58, \qquad g(^2H_1) = 0,86, \qquad g(^4He_2) = 0\,.$$

Khi hai hạt có hệ số Landé g_1 và g_2 kết hợp lại thành hạt mới có hệ số Landé g, (giả định momen động lượng của chuyển động tương đối là zero), khi đó

$$g = g_1\frac{J(J+1) + j_1(j_1+1) - j_2(j_2+1)}{2J(J+1)} + g_2\frac{J(J+1) + j_2(j_2+1) - j_1(j_1+1)}{2J(J+1)}\,,$$

trong đó J là spin của hạt mới, j_1 và j_2 là spin của các hạt thành phần.

$^2H_1$ là sự kết hợp của một nơtron và $^1H_1$, với $J = 1$, $j_1 = j_2 = 1/2$. Đặt $g_1 = g(n)$, $g_2 = g(^1\mathrm{H}_1)$. Khi đó $\frac{1}{2}g_1 + \frac{1}{2}g_2 = g(^2\mathrm{H}_1)$, hay

$$g(n) = g_1 = 2(0,86 - 2,79) = -3,86\,.$$

Theo mẫu vỏ hạt nhân đơn hạt (single-particle shell model), momen từ hạt nhân do nucleon không ghép cặp cuối cùng gây ra. Đối với ^{3}H, $j = 1/2$, $l = 0$,

$s = 1/2$, cũng tương tự như ^{1}H. Như thế, $g(^3\text{H}) = g(^1\text{H})$. Lập luận tượng tự, ^{3}He có một n không ghép cặp do đó $g(^3\text{He}) = g(n)$. Từ đó

$$\mu(^3\text{H}) = 2,79\mu_N, \qquad \mu(^3\text{He}) = -1,93\mu_N .$$

$^6\text{Li}_3$ có thể xem như sự kết hợp của $^4\text{He}_2$ và $^2\text{H}_1$, với $J = 1$, $j_1 = 0$, $j_2 = 1$. Do đó

$$g = \left(\frac{2-2}{2\times 2}\right) g_1 + \left(\frac{2+2}{2\times 2}\right) g_2 = g_2 ,$$

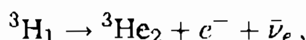
hay

$$g(^6\text{Li}_3) = g(^2\text{H}_1) = 0,86 .$$

(a) Giá trị gần đúng của momen từ của nơtron, $^3\text{H}_1$, $^3\text{He}_2$, $^6\text{Li}_3$, do đó sẽ là

$$\mu(n) = g(n)\mu_N/2 = -1,93\mu_N ,$$
$$\mu(^3\text{H}_1) = 2,79\mu_N ,$$
$$\mu(^3\text{He}_2) = -1,93\mu_N ,$$
$$\mu(^6\text{Li}) = g(^6\text{Li}_3)\mu_N \times 1 = 0,86\mu_N .$$

(b) Phân rã β từ $^3\text{H}_1$ đến ^{3}He là do sự tương tác



$$^3\text{H}_1 \rightarrow {}^3\text{He}_2 + e^- + \bar{\nu}_e ,$$

ở đây, năng lượng phân rã là

$$Q = m(^3\text{H}_1) - m(^3\text{He}_2) = 3,01605 - 3,01603 = 0,00002 \text{ đvklnt}$$
$$= 2 \times 10^{-5} \times 938 \times 10^3 \text{ keV} = 18,7 \text{ keV} .$$

Từ đó, năng lượng cực đại của hạt β phát xạ là 18,7 keV.

(c) Phản ứng nhiệt hạch của $^3\text{H}_1$ và $^3\text{He}_2$,



$$^3\text{H}_1 + {}^3\text{He}_2 \rightarrow {}^6\text{Li}_3 ,$$

giải phóng một năng lượng là

$$Q = m(^3\text{H}_1) + m(^3\text{He}_2) - m(^6\text{Li}_3) = 0,01696 \text{ đvklnt} = 15,9 \text{ MeV} .$$

Phản ứng nhiệt hạch giữa $^2\text{H}_1$ và $^4\text{He}_2$,



$$^2\text{H}_1 + {}^4\text{He}_2 \rightarrow {}^6\text{Li}_3 .$$

giải phóng năng lượng là

$$Q' = m(^2H_1) + m(^4He_2) - m(^6Li_3) = 0,02501 \text{ đvklnt } = 23,5 \text{ MeV}.$$

Như thế, phản ứng nhiệt hạch thứ hai tạo ra nhiều năng lượng hơn.

2007

Để xuyên qua một hàng rào thế Coulomb của một hạt nhân nhẹ, một proton phải có một năng lượng tối thiểu có bậc là

(a) 1 GeV.

(b) 1 MeV.

(c) 1 KeV.

(*CCT*)

Lời giải:

Hàng rào thế Coulomb của một hạt nhân nhẹ là $V = Q_1Q_2/r$. Đặt $Q_1 \approx Q_2 \approx e$, $r \approx 1$ fm. Khi đó

$$V = e^2/r = \frac{\hbar c}{r}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right) = \frac{197}{1} \cdot \frac{1}{137} = 1,44 \text{ MeV}.$$

Do đó câu trả lời là (b).

2008

Mật độ vật chất của hạt nhân theo đơn vị tấn/cm^3 là bao nhiêu?

(a) 0,004.

(b) 400.

(c) 10^9.

(*CCT*)

Lời giải:

Kích thước dài của một nucleon vào khoảng 10^{-13} cm, do đó, thể tích trên mỗi nucleon vào khoảng 10^{-39} cm^3. Khối lượng của mỗi nucleon vào khoảng 10^{-27} kg $= 10^{-30}$ ton, như vậy mật độ vật chất là $\rho = m/V \approx 10^{-30}/10^{-39} =$

10^9tấn/cm^3. Từ đó câu trả lời là (c).

2009

(a) Hãy tính toán năng lượng tĩnh điện của một điện tích Q phân bố đều trong cả một hình cầu bán kính R.

(b) Do $^{27}_{14}$Si và $^{27}_{13}$Al là "hạt nhân gương", trạng thái cơ bản của chúng là đồng nhất ngoại trừ điện tích. Nếu hiệu số khối lượng của chúng là 6 MeV, hãy ước lượng bán kính của chúng (bỏ qua sự chênh lệch khối lượng giữa proton và nơtron).

(Wisconsin)

Lời giải:

(a) Cường độ điện trường tại một điểm cách tâm quả cầu tích điện đều một khoảng r là

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{Qr}{R^3} & \text{với } r < R\,, \\ \dfrac{Q}{r^2} & \text{với } r > R\,. \end{cases}$$

Năng lượng tĩnh điện là

$$\begin{aligned} W &= \int_0^\infty \frac{1}{8\pi} E^2 d\tau \\ &= \frac{Q^2}{8\pi}\left[\int_0^R \left(\frac{r}{R^3}\right)^2 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty \frac{1}{r^4} 4\pi r^2 dr\right] \\ &= \frac{Q^2}{2}\left(\int_0^R \left(\frac{r^4}{R^6} dr + \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr\right) \\ &= \frac{Q^2}{2}\left(\frac{1}{5R} + \frac{1}{R}\right) \\ &= \frac{3Q^2}{5R}\,. \end{aligned}$$

(b) Hiệu số khối lượng giữa hai hạt nhân gương $^{27}_{14}Si$ và $^{27}_{13}Al$ có thể coi như bằng hiệu số của năng lượng tĩnh điện

$$\Delta W = \frac{3e^2}{5R}(Z_1^2 - Z_2^2)\,.$$

Như vậy

$$R = \frac{3e^2}{5\Delta W}(14^2 - 13^2) = \frac{3\hbar c}{5\Delta W}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)(14^2 - 13^2)$$

$$= \frac{3 \times 1,97 \times 10^{-11}}{5 \times 6} \times \frac{1}{137} \times (14^2 - 13^2)$$

$$= 3,88 \times 10^{-11}\ \text{cm}$$

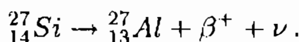
$$= 3,88\ \text{fm}\,.$$

2010

Hạt nhân ${}^{27}_{14}Si$ phân rã thành hạt nhân gương ${}^{27}_{13}Al$ của nó do sự phát xạ pozitron. Năng lượng cực đại (động năng+m_ec^2) của pozitron là 3,48 MeV. Giả sử rằng, hiệu số khối lượng giữa các hạt nhân là do năng lượng tĩnh điện Coulomb. Giả sử hạt nhân là một quả cầu tích điện đều với điện tích Ze và bán kính R. Cho rằng bán kính có dạng $r_0A^{1/3}$, hãy sử dụng các giả thiết trên để ước lượng r_0.

(*Princeton*)

Lời giải:



$${}^{27}_{14}Si \to {}^{27}_{13}Al + \beta^+ + \nu\,.$$

Nếu bỏ qua năng lượng giật lùi của hạt nhân, năng lượng cực đại của pozitron xấp xỉ bằng hiệu số khối lượng của hạt nhân trừ đi $2m_ec^2$. Năng lượng tĩnh điện Coulomb của một quả cầu tích điện đều là (**Bài tập 2009**)

$$E_e = \frac{3e^2Z^2}{5R} = \frac{3e^2}{5r_0}Z^2A^{-1/3}\,.$$

Đối với ${}^{27}_{14}Si$ và ${}^{27}_{13}Al$,

$$E_e = \frac{3e^2}{5r_0}27^{-\frac{1}{3}}(14^2 - 13^2) = \frac{27e^2}{5r_0} = 3,48 + 1,02 = 4,5\ \text{MeV}\,,$$

hay

$$r_0 = \frac{27e^2}{5 \times 4,5} = \frac{27\hbar c}{5 \times 4,5}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right) = \frac{27 \times 1,97 \times 10^{-11}}{5 \times 4,5 \times 137}$$

$$= 1,73 \times 10^{-13}\ \text{cm} = 1,73\ \text{fm}\,.$$

2011

Năng lượng liên kết của $^{90}_{40}Zr_{50}$ là 783,916 MeV. Năng lượng liên kết của $^{90}_{39}Y_{51}$ là 782,410 MeV. Hãy ước lượng năng lượng kích thích của trạng thái đồng vị spin thấp nhất $T = 6$ của ^{90}Zr.

(*Princeton*)

Lời giải:

Hiệu số năng lượng giữa hai hạt nhân thành viên của cùng đồng vị spin đa bội được xác định bởi năng lượng Coulomb và hiệu khối lượng của nơtron - proton. Như vậy, **(Bài tập 2009)**

$$\Delta E = E(A, Z+1) - E(A, Z) = \Delta E_e - (m_n - m_p)c^2$$

$$= \frac{3e^2}{5R}(2Z+1) - 0,78 = \frac{3(2Z+1)c\hbar\alpha}{5R} - 0,78$$

$$= \frac{3(2\times 39+1)\times 197}{5\times 1,2\times 90^{1/3}\times 137} - 0,78$$

$$= 11,89 \text{ MeV}$$

sử dụng $R = 1,2A^{1/3}$ fm.

Từ đó, năng lượng kích thích của trạng thái $T = 6$ của ^{90}Zr là

$$E = -782,410 + 11,89 + 783,916 = 13,40 \text{ MeV}.$$

2012

Khối lượng của tập hợp các các nuclit đồng khối số là những hạt nhân thành viên của cùng đồng vị spin đa bội có thể viết theo giá trị chờ đợi của toán tử khối lượng có dạng

$$M = a + bT_z + cT_z^2,$$

trong đó a, b, c là những hằng số và T_z là toán tử cho thành phần z của đồng vị spin.

(a) Hãy tìm nguồn gốc của công thức này.

(b) Các đồng vị spin phải có độ lớn bằng bao nhiêu để có thể kiểm tra được bằng thực nghiệm?

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Các thành viên của cùng đồng vị spin đa bội có cùng tính chẵn lẻ spin J^P bởi vì cấu trúc tương tự của chúng. Hiệu số khối lượng được xác định do năng lượng tĩnh điện Coulomb và sự hiệu số khối lượng nơtron - proton. Đặt số khối hạt nhân là A, số nơtron là N, khi đó $A = Z + N = 2Z - (Z - N) = 2Z - 2T_z$. Như (**Bài tập 2009**)

$$\begin{aligned} M &= \frac{3e^2Z^2}{5R} + (m_p - m_n)T_z + M_0 \\ &= B\left(\frac{A}{2} + T_z\right)^2 + CT_z + M_0 \\ &= \frac{BA^2}{4} + BAT_z + BT_z^2 + CT_z + M_0 \\ &= M_0 + \frac{BA^2}{4} + (C + BA)T_z + BT_z^2 \\ &= a + bT_z + cT_z^2 \end{aligned}$$

với $a = M_0 + BA^2/4$, $b = C + BA$, $c = B$.

Các số hạng bậc nhất ở trong công thức xuất phát từ hiệu số khối lượng nơtron - proton và năng lượng Coulomb, trong khi số hạng bậc hai chủ yếu do năng lượng Coulomb.

(b) Có tất cả ba hằng số a, b, c trong công thức, do đó, cần phải có ba phương trình bậc nhất độc lập để xác định chúng. Do có tất cả $(2T + 1)$ cấu trúc bội của một đồng vị spin T, để có thể kiểm tra được công thức bằng cách thực nghiệm ta đòi hỏi ít nhất $T = 1$.

2013

Cả hai hạt nhân $^{14}_{7}N$ và $^{12}_{6}C$ có đồng vị spin $T = 0$ đối với trạng thái cơ bản. Trạng thái thấp nhất $T = 1$ có một năng lượng kích thích 2,3 MeV đối với trường hợp $^{14}_{7}N$ và khoảng 15,0 MeV đối với $^{12}_{6}C$. Vì sao lại có sự khác nhau lớn như vậy? Đồng thời hãy chỉ ra cơ sở mà theo đó một giá trị T được quy cho các trạng thái hạt nhân như thế. (Xem các thành viên khác của bội ba $T = 1$

và giải thích mối quan hệ của chúng theo các tính chất hạt nhân có hệ thống).

(*Columbia*)

Lời giải:

Các trạng thái kích thích với $T = 1$ của ${}^{12}_{6}$C tạo ra một đồng vị spin bội ba bao gồm ${}^{12}_{5}$B, ${}^{12}_{6}$C và ${}^{12}_{7}$N. ${}^{12}_{5}$B và ${}^{12}_{7}$N có $|T_3| = 1$, do đó chúng là trạng thái cơ bản bội ba. Tương tự như thế, ${}^{14}_{6}$C và ${}^{14}_{8}$O là trạng thái cơ bản của đồng vị spin bội ba của trạng thái kích thích $T = 1$ của ${}^{14}_{7}$N. Năng lượng liên kết $M - A$ được cho ở bảng phía dưới.

Nguyên tố	M-A (MeV)
${}^{12}_{6}C$	0
${}^{12}_{5}B$	13,370
${}^{14}_{7}N$	2,864
${}^{14}_{6}C$	3,020

Hiệu số năng lượng giữa hai hạt nhân của đồng vị đa bội là

$$\begin{aligned}
\Delta E &= [M(Z, A) - M(Z-1, A)]c^2 \\
&= \frac{3e^2}{5R}(2Z - 1) - (m_n - m_p)c^2 \\
&= \frac{3e^2}{5R_0A^{1/3}}(2Z - 1) - 0,78 \\
&= \frac{3\hbar c}{5R_0A^{1/3}}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)(2Z - 1) - 0,78 \\
&= \frac{3 \times 197}{5 \times 137 R_0 A^{1/3}}(2Z - 1) - 0,78 \text{ MeV}.
\end{aligned}$$

Lấy $R_0 \approx va, 4$ fm và như vậy

$$M({}^{14}N, T = 1) - M({}^{14}C, T = 1) = 2,5 \text{ MeV}/c^2,$$

$$M({}^{12}C, T = 1) - M({}^{12}B, T = 1) = 2,2 \text{ MeV}/c^2,$$

ta có

$$\begin{aligned}
M(^{14}N, T=1) - M(^{14}N, T=0) \\
&= M(^{14}N, T=1) - M(^{14}C, T=1) \\
&\quad + M(^{14}C, T=1) - M(^{14}N, T=0) \\
&= 2,5 + 3,02 - 2,86 \\
&= 2,66 \text{ MeV}/c^2 ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M(^{12}C, T=1) - M(^{12}C, T=0) \\
&= M(^{12}C, T=1) - M(^{12}B, T=1) \\
&\quad + M(^{12}B, T=1) - M(^{12}C, T=0) \\
&= 2,2 + 13,37 \\
&= 15,5 \text{ MeV}/c^2 ,
\end{aligned}$$

các giá trị này phù hợp với giá trị thực nghiệm 2,3 MeV và 15,0 MeV. Sự khác biệt lớn giữa các năng lượng kích thích ^{12}C và ^{14}N do thực tế trạng thái cơ bản của ^{12}C là một cấu trúc α và do đó có mức năng lượng rất thấp.

Các hạt nhân của một đồng vị spin đa bội có cấu trúc tương tự và cùng J^p. Hiệu số khối lượng giữa hai thành viên đồng vị spin đa bội được xác định bởi sự khác biệt ở năng lượng Coulomb của hạt nhân và hiệu số khối lượng nnơtron - proton. Các dữ liệu như thế tạo thành cơ sở của quy ước đồng vị spin. Chẳng hạn ^{14}O, ^{14}N* và ^{14}C thuộc về cùng đồng vị spin đa bội với $J^p = 0^+$ và các trạng thái cơ bản ^{14}C và ^{14}O, ^{14}N* là một trạng thái kích thích. Tương tự ^{12}C*, ^{12}C và ^{12}B tạo thành một đồng vị spin đa bội với $J^p = 1^+$, trong đó ^{14}N và ^{12}B là trạng thái cơ bản trong khi ^{12}C* là một trạng thái kích thích.

2014

(a) Điền vào những chỗ trống ở bảng sau cho biết tính chất của trạng thái cơ bản của các hạt nhân được chỉ ra. Khối lượng dư $\Delta M_{Z,A}$ được xác định, do vậy ta có

$$M_{Z,A} = A(931,5 \text{ MeV}) + \Delta M_{Z,A} ,$$

trong đó $M_{Z,A}$ là khối lượng nguyên tử, A là số khối lượng, T và T_z là các lượng tử số cho spin toàn phần của đồng vị và thành phần thứ ba của đồng vị spin. Hãy xác định quy ước của bạn đối với T_z.

(b) Hàm sóng của trạng thái tương tự đồng khối số (IAS) ở ^{81}Kr có thể lấy được bằng cách tác dụng lên hàm sóng của trạng thái cơ bản của ^{81}Br với toán tử đồng vị spin up T.

(i) Các toán tử J^{π}, T, và T_z đối với IAS ở trạng thái ^{81}Kr như thế nào?

(ii) Ước lượng năng lượng kích thích của IAS ở trạng thái ^{81}Kr.

(iii) Hãy ước lượng năng lượng phân rã khả dụng cho phân rã của IAS ở trạng thái ^{81}Kr bởi phát xạ của

nơtron, tiaγ, hạtα, tiaβ^+.

(iv) Giả sử rằng năng lượng phân rã đủ khả dụng cho mỗi phát xạ ở phần (iii), hãy chỉ ra các quy tắc chọn lựa hay các yếu tố khác có thể cấm phân rã bởi kiểu đó.

(*Princeton*)

Đồng vị	Z	T_z	T	J^p	Độ dôi khối lượng (MeV)
n	0				8,07
^{1}H	1				7,29
^{4}He	2				2.43
^{77}Se	34			$1/2^-$	-74,61
^{77}Br	35			$3/2^-$	-73,24
^{77}Kr	36			$7/2^+$	-70,24
^{80}Br	35			1^+	-76,89
^{80}Kr	36				-77,90
^{81}Br	35			$3/2^-$	-77,98
^{81}Kr	36			$7/2^+$	-77,65
^{81}Rb	37			$3/2^-$	-77,39

Lời giải:

(a) Bảng hoàn thiện được chỉ ra ở trang sau.

(b) (i) Trạng thái tương tự đồng khối số (IAS) là một trạng thái kích thích cao của một hạt nhân với cùng số khối nhưng với một số nguyên tử cao hơn, tức là một trạng thái có cùng A, cùng T nhưng với T_z tăng thêm 1. Như vậy, đối với ^{81}Br, $|T, T_z\rangle = |11/2, -11/2\rangle$, các số lượng tử của IAS ở ^{81}Kr là $T = 11/2$, $T_z = -9/2$, $J^p[^{81}\text{Kr(IAS)}] = J^p(^{81}\text{Br}) = 3/2^-$.

Đồng vị	Z	T_z	T	J^p	Độ dôi khối lượng (MeV)
n	0	-1/2	1/2	$1/2^+$	8,07
^{1}H	1	1/2	1/2	$1/2^+$	7,29
^{4}He	2	0	0	0^+	2,43
^{77}Se	34	-9/2	9/2	$1/2^-$	-74,61
^{77}Br	35	-7/2	7/2	$3/2^-$	-73,24
^{77}Kr	36	-5/2	5/2	$7/2^+$	-70,24
^{80}Br	35	-5	5	1^+	-76,89
^{80}Kr	36	-4	4	0^+	-77,90
^{81}Br	35	-11/2	11/2	$3/2^-$	-77,98
^{81}Kr	36	-9/2	9/2	$7/2^+$	-77,65
^{81}Rb	37	-7/2	7/2	$3/2^-$	-77,39

(ii) Hiệu số khối lượng giữa ^{81}Br và ^{81}Kr(IAS) là do sự khác nhau giữa năng lượng Coulomb của hạt nhân và hiệu số khối lượng nơtron - proton

$$\Delta M_{^{81}\text{Kr}(IAS)} = \Delta M_{^{81}\text{Br}} + \frac{3}{5} \times \frac{(2Z-1)e^2}{R_0 A^{1/3}} - [m(n) - M(^1\text{H})]$$

$$= \Delta M_{^{81}\text{Br}} + 0,719\left(\frac{2Z-1}{A^{\frac{1}{3}}}\right) - 0,78 \text{ MeV},$$

do $R_0 = 1,2$ fm, $m_n - m_p = 0,78$ MeV. Với $Z = 36$, $A = 81$, $\Delta M_{^{81}\text{Br}} = -77,98$ MeV, ta có $\Delta M_{^{81}\text{Kr}(IAS)} = -67,29$ MeV.

Từ đó, năng lượng kích thích của ^{81}Kr(IAS) từ trạng thái cơ bản của ^{81}Kr là

$$\Delta E = -67,29 - (-77,65) = 10,36 \text{ MeV}.$$

(iii) Đối với phân rã nơtron $^{81}\text{Kr(IAS)} \to n + ^{80}\text{Kr}$,

$$Q_1 = \Delta M_{^{81}\text{Kr}(IAS)} - \Delta(n) - \Delta M_{^{80}\text{Kr}}$$

$$= -67,29 - 8,07 + 77,90 = 2,54 \text{ MeV}.$$

Đối với phân rã γ, $^{81}\text{Kr}(IAS) \to {}^{81}\text{Kr} + \gamma$,

$$Q_2 = \Delta M_{^{81}\text{Kr}(IAS)} - \Delta M_{^{81}\text{Kr}} = -67,29 - (-77,65) = 10,36 \text{ MeV}.$$

Đối với phân rã α, $^{81}\text{Kr}(IAS) \to \alpha + ^{77}\text{Se}$,

$$Q_3 = \Delta M_{^{81}\text{Kr}(IAS)} - \Delta M_{\alpha} - \Delta M_{^{77}\text{Se}}$$

$$= -67,29 - 2,43 - (-74,61) = 4,89 \text{ MeV}.$$

Đối với phân rã β^+, $^{81}\text{Kr}(IAS) \to ^{81}\text{Br} + \beta^+ + \nu_e$,

$$Q_4 = \Delta M_{^{81}\text{Kr}(IAS)} - \Delta M_{^{81}\text{Br}} - 2m_e$$
$$= -67,29 - (-77,98) - 1,02 = 9,67 \text{ MeV}.$$

(iv)

$$\begin{array}{lcccc} \text{Trong tương tác} & ^{81}\text{Kr}(IAS) \to & ^{81}\text{Kr} & + & n \\ T: & 11/2 & 4 & & \frac{1}{2} \end{array}$$

$\Delta T \neq 0$. Do tương tác mạnh đòi hỏi sự bảo toàn T và T_z, sự tương tác là bị cấm.

$$\begin{array}{lcc} \text{Trong tương tác} & ^{81}\text{Kr}(IAS) \to & ^{81}\text{Kr} + \gamma \\ J^p: & \frac{3}{2}^- & \frac{7}{2}^+ \end{array}$$

ta có $\Delta J = \left|\frac{3}{2} - \frac{7}{2}\right| = 2$, $\Delta P = -1$; do đó nó có thể xảy ra thông qua chuyển dời loại $E3$ hay $M2$.

$$\begin{array}{lcccc} \text{Tương tác} & ^{81}\text{Kr}(IAS) \to & ^{77}\text{Se} & + & \alpha \\ T: & 11/2 & 9/2 & & 0 \\ T_z: & -9/2 & -9/2 & & 0 \end{array}$$

bị cấm do đồng vị spin không bảo toàn.

$$\begin{array}{lcccc} \text{Tương tác} & ^{81}\text{Kr}(IAS) \to & ^{81}\text{Br} & + & \beta^+ + \nu_e \\ J^p: & 3/2^- & \frac{3}{2}^- & & \end{array}$$

được phép, là sự pha trộn của loại tương tác Fermi và tương tác Gamow-Teller.

2015

Cấu trúc đồng vị spin của momen lưỡng cực từ.

Momen lưỡng cực từ của nơtron tự do và proton tự do tương ứng là $-1,913\mu_N$ và $+2,793\mu_N$. Xem hạt nhân như là tập hợp của các nơtron và proton có momen tự do của chúng.

(a) Hãy viết ra toán tử momen từ cho một hạt nhân có A nucleon.

(b) Trình bày khái niệm đồng vị spin và xác định các toán tử đồng vị vô hướng và đồng vị vectơ?

(c) Hãy chứng tỏ tổng của các momen từ theo manheton hạt nhân của hai hạt nhân gương $T = 1/2$ là

$$J + (\mu_p + \mu_n - 1/2)\left\langle \sum_{i=l}^{A} \sigma_z^{(i)} \right\rangle,$$

trong đó J là spin toàn phần của hạt nhân và $\sigma_z^{(i)}$ là toán tử spin Pauli đối với nucleon.

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Toán tử momen từ đối với một hạt nhân có A nucleon là

$$\boldsymbol{\mu} = \sum_{i=l}^{A}(g_l^i \boldsymbol{l}_i + g_s^i \boldsymbol{S}_i),$$

ở đây đối với nơtron: $g_l = 0$, $g_s = 2\mu_n$; đối với proton: $g_l = 1$, $g_s = 2\mu_p$ và $\boldsymbol{S}$ là toán tử spin $\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$.

(b) Sự độc lập điện tích được phát hiện để giữ các proton và nơtron lại sao cho, nếu lực Coulomb được bỏ qua, các lực $p - p$, $p - n$, $n - n$ là đồng nhất tạo ra cặp của các nuleon ở trong cùng chuyển động spin và quỹ đạo. Để tính đến điều này, khái niệm đồng vị spin T được đưa ra sao cho p và n có cùng T trong khi thành phần T_z theo trục z trong không gian đồng vị spin là $T_z = \frac{1}{2}$ đối với p và $T_z = -\frac{1}{2}$ đối với n. Ta có bốn toán tử độc lập trong không gian đồng vị spin:

toán tử vô hướng: ma trận đơn vị $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

toán tử vectơ: ma trận Pauli $\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Đặt hàm sóng của proton và nơtron tương ứng là $\psi_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\psi_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

và định nghĩa $\tau_\pm = \tau_1 \pm i\tau_2$, $T = \tau/2$. Khi đó

$$T_3\Psi_p = \frac{1}{2}\Psi_p, \qquad \tau_3\Psi_p = \Psi_p\,,$$

$$T_3\Psi_n = -\frac{1}{2}\Psi_n, \qquad \tau_3\Psi_n = -\Psi_n\,,$$

$$T_+\Psi_n = \Psi_p, \qquad T_-\Psi_p = \Psi_n\,.$$

(c) Hạt nhân gương nhận được khi thay thế toàn bộ proton của một hạt nhân bằng nơtron và toàn bộ nơtron bằng proton. Như thế các hạt nhân gương có cùng T nhưng T_z ngược nhau. Nói một cách khác, đối với các hạt nhân gương nếu số lượng tử đồng vị spin của hạt nhân thứ nhất là $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, thì của hạt nhân thứ hai là $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Đối với hạt nhân thứ nhất, toán tử momen từ là

$$\mu_1 = \sum_{i=1}^{A}(g_l^i l_1^i + g_s^i S_1^i)\,.$$

Ta có thể viết

$$g_l = \frac{1}{2}(1+\tau_3), \qquad g_s = (1+\tau_3)\mu_p + (1-\tau_3)\mu_n\,,$$

do $g_l\psi_p = \psi_p$, $g_l\psi_n = 0$, v.v. Khi đó

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \sum_{i=1}^{A}\frac{(1+\tau_3^i)}{2}l_1^i + \left[\sum_{i=1}^{A}(1+\tau_3^i)\mu_p + \sum_{i=1}^{A}(1-\tau_3^i)\mu_n\right]S_l^i \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{A}(l_1^i + S_1^i) + \left(\mu_p + \mu_n - \frac{1}{2}\right)\sum_{i=1}^{A}S_1^i \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{A}\tau_3^i[l_1^i + 2(\mu_p - \mu_n)S_1^i]\,.\end{aligned}$$

Tương tự, đối với hạt nhân khác ta có

$$\mu_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{A}(l_2^i + S_2^i) + \left(\mu_p + \mu_n - \frac{1}{2}\right)\sum_{i=1}^{A}S_2^i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{A}\tau_3^i[l_2^i + 2(\mu_p - \mu_n)S_2^i]\,.$$

Do $J^i = \sum_{i=1}^{A}(l^i + S^i)$, các hạt nhân gương có $J^1 = J^2$ nhưng các giá trị T_3 ngược nhau, ở đây $T_3 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{A}\tau_3^i$, $S = \frac{1}{2}\sigma$.

Momen từ được quan sát là $\mu = \langle \mu_z \rangle = \langle JJ_zTT_3|\mu_z|JJ_zTT_3\rangle$. Khi đó, đối với hạt nhân thứ nhất

$$\mu_1 = \left\langle JJ_z\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right|\frac{J_z}{2} + \left(\mu_p + \mu_n - \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{A}(\sigma_1^i)_z$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{A}\tau_3^i[l_{1z}^i + 2(\mu_p - \mu_n)S_{1z}^i]\left|JJ_z\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$= \frac{J_z}{2} + \frac{1}{2}\left(\mu_p + \mu_n - \frac{1}{2}\right)\left\langle \sum_{i=1}^{A}(\sigma_1^i)_z \right\rangle$$

$$+ \left\langle JJ_z\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right|\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{A}\tau_3^i[l_{1z}^i + 2(\mu_p - \mu_n)S_{1z}^i]\left|JJ_z\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle,$$

và đối với hạt nhân thứ hai

$$\mu_2 = \frac{J_z}{2} + \frac{1}{2}\left(\mu_p + \mu_n - \frac{1}{2}\right)\left\langle \sum_{i=1}^{A}(\sigma_1^i)_z \right\rangle$$

$$+ \left\langle JJ_z\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right|\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{A}\tau_3^i[l_{2z}^i + 2(\mu_p - \mu_n)S_{2z}^i]\left|JJ_z\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right\rangle.$$

Tổng của momen từ của các hạt nhân gương là

$$\mu_1 + \mu_2 = J_z + \left(\mu_p + \mu_n - \frac{1}{2}\right)\left\langle \sum_{i=1}^{A}\sigma_z^i \right\rangle,$$

do các số hạng cuối trong biểu thức μ_1 và μ_2 loại trừ lẫn nhau.

2016

Tán xạ trên quả cầu cứng:

Chứng tỏ rằng tiết diện cổ điển cho tán xạ đàn hồi của một hạt điểm từ một quả cầu bán kính R khối lượng vô cùng lớn là đẳng hướng.

(MIT)

Lời giải:

Trong cơ học cổ điển, trong tán xạ đàn hồi của một hạt điểm từ một bề mặt cố định, góc tới bằng góc phản xạ. Như vậy, nếu một hạt chuyển động dọc

theo hướng $-z$ va chạm vào một quả cầu cứng có bán kính R tại bề mặt có góc cực θ, nó sẽ bị lệch một góc $\alpha = 2\theta$. Do tham số va chạm là $b = R\sin\theta$, tiết diện tán xạ vi phân là

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2\pi b db}{2\pi \sin\alpha d\alpha} = \frac{R^2 \sin\theta\cos\theta d\theta}{4\sin\theta\cos\theta d\theta} = \frac{R^2}{4},$$

độc lập với góc θ, chứng tỏ tán xạ là đẳng hướng.

2017

Một mẫu thuận tiện cho thế năng V của một hạt tích điện q tán xạ từ một nguyên tử có điện tích Q là $V = qQe^{-\alpha r}/r$. Trong đó α^{-1} biểu diễn độ dài che chắn của electron nguyên tử.

(a) Sử dụng phép gần đúng của Bohr

$$f = -\frac{1}{4\pi}\int e^{-i\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\frac{2m}{\hbar^2}V(r)d^3\mathbf{r}$$

để tính tiết diện tán xạ σ.

(b) Sự phụ thuộc của α vào điện tích Z của hạt nhân như thế nào?

(*Columbia*)

Lời giải:

(a) Ở phép gần đúng Bohr

$$f = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int V(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}d^3\mathbf{r},$$

trong đó $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0$ là động lượng được truyền từ hạt tới cho hạt đi ra. Ta có $|\mathbf{q}| = 2k_0\sin\frac{\theta}{2}$, trong đó θ là góc giữa các hạt tới và hạt đi ra. Do $V(\mathbf{r})$ là đối xứng cầu,

$$\begin{aligned} f(\theta) &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\int_0^\pi V(r)e^{-i\Delta kr\cos\theta}\sin\theta r^2 dr d\varphi d\theta \\ &= -\frac{2m}{\hbar^2\Delta k}\int_0^\infty V(r)\sin(\Delta kr)rdr \\ &= -\frac{2mQq}{\hbar^2}\cdot\frac{1}{\alpha^2 + (\Delta k)^2}. \end{aligned}$$

Tiết diện vi phân là

$$d\sigma = |f(\theta)|^2 d\Omega = \frac{4m^2Q^2q^2}{\hbar^4} \cdot \frac{d\Omega}{[\alpha^2 + (\Delta k^2)]^2}$$

$$= \frac{m^2Q^2q^2}{4\hbar^4 k_0^4} \cdot \frac{d\Omega}{\left(\frac{\alpha^2}{4k_0^2} + \sin^2\frac{\theta}{2}\right)^2},$$

và tiết diện toàn phần là

$$\sigma = \int d\sigma = \frac{m^2Q^2q^2}{4\hbar^4 k_0^4} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta d\theta d\varphi}{\left(\frac{\alpha^2}{4k_0^2} + \sin^2\frac{\theta}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{16\pi m^2Q^2q^2}{\hbar^4\alpha^2(4k_0^2 + \alpha^2)}.$$

(b) α^{-1} cho một số đo kích thước nguyên tử. Khi Z tăng, số electron bên ngoài hạt nhân cũng như xác suất của chúng gần hạt nhân sẽ tăng, làm tăng hiệu ứng che chắn. Từ đó, α là một hàm tăng theo Z.

2018

Xét sự tán xạ của một proton 1-keV với nguyên tử hạt nhân.

(a) Bạn chờ đón sự phân bố góc sẽ như thế nào? (Vẽ một đồ thị và bình luận về dạng của nó).

(b) Hãy đánh giá tiết diện tán xạ toàn phần. Cho câu trả lời bằng cm^2, m^2 hay bac (10$^-$24 cm^2) và một lý do cho câu trả lời của bạn.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Tiết diện vi phân của tán xạ đàn hồi là (**Bài tập 2017**)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2q^2Q^2}{4\hbar^4 k_0^4} \frac{1}{\left(\frac{\alpha^2}{4k_0^4} + \sin\frac{\theta}{2}\right)^2}.$$

Đối với proton và hạt nhân hydro $Q = q = e$. Độ dài che chắn có thể lấy là $\alpha^{-1} \approx R_0$, R_0 là bán kính Bohr của nguyên tử hydro. Đối với proton tới 1 keV; Bước sóng là

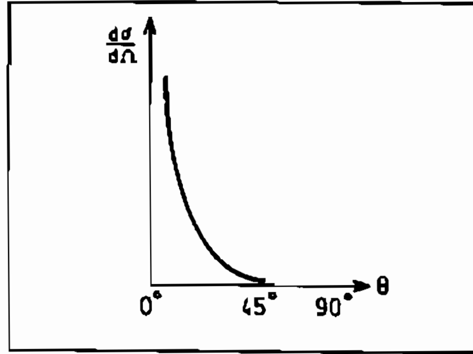
$$\bar{\lambda}_0 = \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu E}} = \frac{ch}{\sqrt{2\mu c^2 E}} = \frac{197}{\sqrt{1 \times 938 \times 10^{-3}}} = 203 \text{ fm}.$$

Với $\alpha^{-1} \approx R_0 = 5,3 \times 10^4$ fm, $\frac{\alpha^2}{4k_0^2} = \left(\frac{\bar{\lambda}_0}{2\alpha^{-1}}\right)^2 \ll 1$ và như vậy

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{m^2 e^4}{4\hbar^2 k_0^2} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}},$$

đó là công thức tán xạ Rurtherford.

Sự tán xạ của một proton 1-keV xảy ra chủ yếu ở góc nhỏ (xem hình 2.1). Xác suất của góc tán xạ lớn (gần như va chạm đối đầu) rất nhỏ, chỉ ra rằng hydro có hạt nhân rất nhỏ.



Hình 2.1

(b) Như được cho ở **Bài tập 2017**,

$$\sigma = \frac{16\pi m^2 e^4}{\hbar^4 \alpha^2 (4k_0^2 + \alpha^3)} \approx \frac{16\pi m^2 e^4}{\hbar^4 \alpha^2 4k_0^2}$$

$$= 4\pi \left[\frac{mc^2 R_0 \bar{\lambda}_0}{\hbar c}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)\right]^2 = 4\pi \left(\frac{938 \times 5.3 \times 10^4 \times 203}{197 \times 137}\right)^2$$

$$= 1,76 \times 10^{12} \text{ fm}^2 = 1,76 \times 10^{-14} \text{ cm}^2.$$

2019

(a) Với năng lượng, tâm khối 5 MeV, góc pha mô tả sự tán xạ đàn hồi của một nơtron trên hạt nhân nào đó có giá trị sau: $\delta_0 = 30^0$, $\delta_1 = 10^0$. Giả sử rằng các chuyển dịch pha khác là không đáng kể, hãy vẽ $d\sigma/d\Omega$ như là một

hàm của góc tán xạ. Hãy tính toán cụ thể $d\sigma/d\Omega$ tại 30^0, 45^0 và 90^0. Tiết diện toàn phần σ là bao nhiêu?

(b) Cho rằng tất cả các độ dịch pha δ_2, $\delta_3 \ldots$ là không đáng kể, điều đó ngầm chỉ phạm vi của thế năng vào cỡ bao nhiêu? Tính toán định lượng càng nhiều càng tốt.

(*Columbia*)

Lời giải:

(a) Tiết diện tán xạ vi phân được cho bởi

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{k^2}\left|\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)e^{i\delta_l}\sin\delta_l P_l(\cos\theta)\right|^2 .$$

Cho rằng chỉ có thành phần thứ nhất và thứ hai là quan trọng, ta có

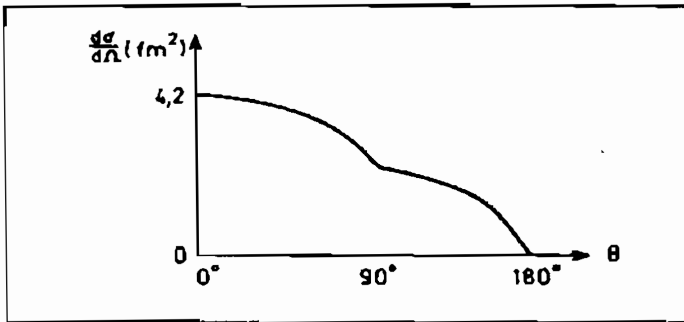
$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} &\approx \frac{1}{k^2}|e^{i\delta_0}\sin\delta_0 + 3e^{i\delta_1}\sin\delta_1\cos\theta|^2 \\ &= \frac{1}{k^2}|(\cos\delta_0\sin\delta_0 + 3\cos\delta_1\sin\delta_1\cos\theta) + i(\sin^2\delta_0 + 3\sin^2\delta_1\cos\theta)|^2 \\ &= \frac{1}{k^2}[\sin^2\delta_0 + 9\sin^2\delta_1\cos^2\theta + 6\sin\delta_0\sin\delta_1\cos(\delta_1-\delta_0)\cos\theta] \\ &= \frac{1}{k^2}[0,25 + 0,27\cos^2\theta + 0,49\cos\theta] ,\end{aligned}$$

ở đây k là số sóng của nơtron tới trong hệ quy chiếu khối tâm. Giả sử rằng khối lượng của hạt nhân lớn hơn rất nhiều so với khối lượng của nơtron m_n. Khi đó

$$\begin{aligned}k^2 &\approx \frac{2m_nE}{\hbar^2} = \frac{2m_nc^2E}{(\hbar c)^2} = \frac{2\times 938\times 5}{197^2\times 10^{-30}} \\ &= 2,4\times 10^{29}\ m^{-2} = 2,4\times 10^{25}\ cm^{-2} .\end{aligned}$$

tiết diện vi phân đối với các góc khác được cho ở bảng sau. Các số liệu cũng được vẽ ra trên hình 2.2.

θ	0^0	30^0	45^0	90^0	180^0
$k^2\frac{d\sigma}{d\Omega}$	1	0,88	0,73	0,25	0
$\frac{d\sigma}{d\Omega}\times 10^{26}$ (cm^2)	4,2	3,7	3,0	1,0	0



Hình 2.2

Tiết diện tán xạ toàn phần là

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{2\pi}{k^2} \int_0^{\pi} (0,25 + 0,49\cos\theta + 0,27\cos^2\theta)\sin\theta d\theta$$

$$= \frac{4\pi}{k^2}\left(0,25 + \frac{1}{3}\times 0,27\right) = 1,78 \times 10^{-25}\ \text{cm}^2 \approx 0,18\ b\,.$$

(b) Độ dịch pha δ_l được cho bởi phương trình

$$\delta_l \approx -\frac{2m_n k}{\hbar^2}\int_0^{\infty} V(r) J_l^2(kr) r^2 dr\,,$$

trong đó J_l là hàm cầu Bessel. Do cực đại của $J_l(x)$ xảy ra gần với $x = l$, đối với các giá trị l cao hơn thì J_l trong miền của thế năng $V(r)$ là nhỏ và có thể bỏ qua. Nói cách khác, $\delta_2, \delta_3 \ldots$ không đáng kể có nghĩa là phạm vi của thế năng V ở trong khoảng $R \approx 1/k$. Như thế, phạm vi của thế năng là $R \approx (2,4 \times 10^{25})^{-1/2} = 2 \times 10^{-13}$ cm $= 2$ fm.

2020

Nơtron có động năng là 1000 eV va chạm với một bia gồm có cacbon. Nếu tiết diện đàn hồi là 400×10^{-24} cm^2, giới hạn trên và dưới của tiết diện tán xạ đàn hồi mà ta có thể lấy là bao nhiêu?

(*Chicago*)

Lời giải:

Ở động năng 1 keV, chỉ có tán xạ sóng s là có liên quan. Độ lệch pha δ phải có một phần ảo lớn hơn không cho quá trình không đàn hồi xảy ra. Tiết diện

tán xạ đàn hồi và không đàn hồi tương ứng được cho bởi phương trình

$$\sigma_e = \pi\bar{\lambda}^2|e^{2i\delta} - 1|^2 ,$$

$$\sigma_{in} = \pi\bar{\lambda}^2(1 - |e^{2i\delta}|^2) .$$

Khối lượng rút gọn của hệ là

$$\mu = \frac{m_n m_c}{m_c + m_n} \approx \frac{12}{13} m_n .$$

Đối với $E = 1000$ eV,

$$\bar{\lambda} = \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu E}} = \frac{\hbar c}{\sqrt{2\mu c^2 E}}$$

$$= \frac{197}{\sqrt{2 \times \frac{12}{13} \times 940 \times 10^{-3}}} = 150 \text{ fm} ,$$

$$\pi\bar{\lambda}^2 = 707 \times 10^{-24} \text{ cm}^2 .$$

Do

$$1 - |e^{2i\delta}|^2 = \frac{\sigma_{in}}{\pi\bar{\lambda}^2} = \frac{400}{707} = 0,566 ,$$

ta có

$$|e^{2i\delta}| = \sqrt{1 - 0,566} = 0,659 ,$$

hay

$$e^{2i\delta} = \pm 0,659 .$$

Từ đó, tiết diện tán xạ đàn hồi là

$$\sigma_e = \pi\bar{\lambda}^2|e^{2i\delta} - 1|^2$$

có các giá trị cực đại và cực tiểu

$$(\sigma_e)_{\max} = 707 \times 10^{-24}(-0,659 - 1)^2 = 1946 \times 10^{-24} \text{ cm}^2 ,$$

$$(\sigma_e)_{\min} = 707 \times 10^{-24}(0,659 - 1)^2 = 82 \times 10^{-24} \text{ cm}^2 .$$

2021

Nghiên cứu sự tán xạ của electron năng lượng cao từ hạt nhân cho thấy nhiều thông tin lý thú về sự phân bố điện tích trong hạt nhân và trong nucleon.

Chúng ta hãy xét một hình mẫu đơn giản ở đó electron được coi như có spin bằng zero. Ta cũng giả định rằng hạt nhân có điện tích Ze, được giữ cố định trong không gian (tức là có khối lượng vô hạn). Kí hiệu $\rho(\mathbf{x})$ là mật độ điện tích của hạt nhân. Sự phân bố điện tích được coi là đối xứng cầu nhưng các thông số khác tùy ý.

Đặt $f_c(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f)$, trong đó $\mathbf{p}_i$ là động lượng ở trạng thái đầu còn $\mathbf{p}_f$ là động lượng trạng thái cuối, là biên độ tán xạ ở trong phép gần đúng Bohr bậc nhất cho tán xạ của một electron đối với hạt nhân điểm điện tích Ze. Đặt $f(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f)$ là biên độ tán xạ của một electron đối với hạt nhân thực có cùng điện tích. Đặt $\mathbf{q} = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_f$ là độ chuyển động lượng. Đại lượng F được định nghĩa bằng phương trình

$$f(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f) = F(q^2) f_c(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f)$$

được gọi là thừa số dạng. Dễ dàng thấy rằng F, trong thực tế, phụ thuộc vào $\mathbf{p}_i$ và $\mathbf{p}_f$ chỉ qua đại lượng q^2.

(a) Thừa số dạng $F(q^2)$ và phép biến đổi Fourier của mật độ điện tích $\rho(\mathbf{x})$ liên quan với nhau theo một cách thức rất đơn giản. Hãy phát biểu và đưa ra mối quan hệ này trong khuôn khổ của lý thuyết Schrödinger không tương đối tính. Giả định rằng các electron là "không tương đối tính" ở đây nhằm đơn giản hóa bài toán. Tuy nhiên, xem xét cẩn thận hơn, sự giả định đó rõ ràng không thích hợp, ta có cùng một kết quả áp dụng trong trường hợp "tương đối tính" của thực nghiệm. Trường hợp bỏ qua spin của electron thực chất không ảnh hưởng đến vấn đề mà ta quan tâm ở đây.

(b) Hình 2.3 chỉ ra một số kết quả thực nghiệm đối với thừa số dạng của proton, ta sẽ xem lý thuyết của chúng ta áp dụng được với những số liệu đó. Trên cơ sở của các dữ liệu được đưa ra hãy tính bán kính trung bình quân phương (điện tích) của proton. Gợi ý: Lưu ý rằng có mối quan hệ đơn giản giữa bán kính trung bình căn quân phương và đạo hàm của $F(q^2)$ đối với q^2, tại $q^2 = 0$. Hãy tìm mối quan hệ này sau đó hãy tính toán.

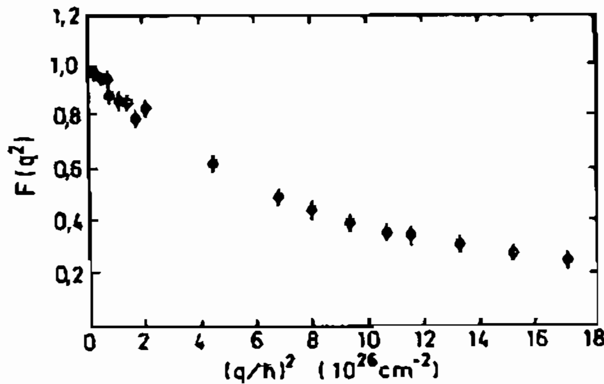
(*UC, Berkeley*)

Lời giải:

(a) Trong phép gần đúng Bohr thứ nhất, biên độ tán xạ của electron năng lượng cao đối với hạt nhân là

$$f(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int V(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}/\hbar} d^3\mathbf{x}\,.$$

Đối với một hạt nhân có phân bố điện tích đối xứng cầu, thế năng tại một



Hình 2.3

điểm x là

$$V(\boldsymbol{x}) = \int \frac{\rho(r)Ze}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}|} d^3\mathbf{r}\,.$$

Như thế

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f) &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3\boldsymbol{x} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}/\hbar}\int d^3\mathbf{r}\frac{\rho(r)Ze}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}|} \\ &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3\mathbf{r}\rho(r)e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}/\hbar}\int d^3\mathbf{x}\frac{Ze}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}|}e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{r})/\hbar} \\ &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3\mathbf{r}\rho(r)e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}/\hbar}\int d^3\mathbf{x}'\frac{Ze}{x'}e^{i\mathbf{q}\,\mathbf{x}'/\hbar}. \end{aligned}$$

Nói cách khác, đối với một hạt nhân điểm, ta có $V(\mathbf{x}) = \frac{Ze}{x}$ và như thế

$$f_c(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int \frac{Ze}{x}e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}/\hbar}d^3\mathbf{x}\,.$$

So sánh hai phương trình trên ta có

$$f(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f) = f_c(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f)\int d^3\mathbf{r}\rho(r)e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}/\hbar}$$

và từ đó

$$F(q^2) = \int d^3\mathbf{r}\rho(r)e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}/\hbar}\,.$$

(b) Khi $q \approx 0$,

$$F(q^2) = \int \rho(r) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}/\hbar} d^3\mathbf{r}$$

$$\approx \int \rho(r) \left[1 + i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}/\hbar - \frac{1}{2}(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})^2/\hbar^2\right] d^3\mathbf{r}$$

$$= \int \rho(r) d^3\mathbf{r} - \frac{1}{2}\int (\rho(r) q^2 r^2 \cos^2\theta/\hbar^2) \cdot r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

$$= F(0) - \frac{2\pi}{3}\frac{q^2}{\hbar^2}\int r^4 \rho(r) dr\,,$$

tức là,

$$F(q^2) - F(0) = -\frac{2\pi}{3}\frac{q^2}{\hbar^2}\int r^4 \rho(r) dr\,.$$

Lưu ý rằng $\frac{i}{\hbar}\int \rho(r)\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}d^3\mathbf{r} = 0$ do $\int_0^\pi \cos\theta \sin\theta d\theta = 0$. Bán kính trung bình bình phương $\langle r^2 \rangle$ theo định nghĩa là

$$\langle r^2 \rangle = \int d^3\mathbf{r} \rho(r) r^2 = 4\pi \int \rho(r) r^4 dr$$

$$= -6\hbar^2 \frac{F(q^2) - F(0)}{q^2} = -6\hbar^2 \left(\frac{\partial F}{\partial q^2}\right)_{q^2=0}.$$

Từ hình 2.3,

$$-\hbar^2 \left(\frac{\partial F}{\partial q^2}\right)_{q^2=0} \approx -\frac{0,8 - 1,0}{2 - 0} \times 10^{-26} = 0,1 \times 10^{-26}\ \text{cm}^2$$

Như vậy $\langle r^2 \rangle = 0,6 \times 10^{-26}$ cm^2, hay $\sqrt{\langle r^2 \rangle} = 0,77 \times 10^{-13}$ cm, tức là, bán kính trung bình căn quân phương của proton là 0,77 fm.

2022

Tiết diện proton - nơtron toàn phần (đàn hồi và không đàn hồi) với động lượng khối tâm $p = 10$ GeV/c là $\sigma = 40$ mb.

(a) Không tính đến spin của electron, hãy xác lập giới hạn dưới tiết diện vi phân của tán xạ proton - nơtron đàn hồi tiến.

(b) Giả sử các thí nghiệm phải tìm một sự vi phạm của giới hạn này. Điều đó có nghĩa thế nào?

(*Chicago*)

Lời giải:

(a) Tiết diện vi phân tán xạ $p-n$ tiến được cho bởi phương trình

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{0^\circ} = |f(0)|^2 \geq |\text{Im} f(0)|^2 = \left(\frac{k}{4\pi}\sigma_t\right)^2 ,$$

ở đây, hệ thức giữa $\text{Im} f(0)$ và σ_t được cho bởi định lý quang học. Do $k = p/\hbar$ ta có

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{0^\circ} \geq \left(\frac{pc}{4\pi\hbar c}\sigma_t\right)^2 = \left(\frac{10^4 \times 40 \times 10^{-27}}{4\pi \times 1,97 \times 10^{-11}}\right)^2$$

$$= 2,6 \times 10^{-24}\ \text{cm}^2 = 2,6\ b\,.$$

(b) Kết quả như thế có nghĩa là một vi phạm định lý quang học, do vậy tính unita của ma trận S, và từ đó cả cách giải thích bằng xác suất về lý thuyết lượng tử.

2023

Khi một chùm hạt proton 300 GeV bắn phá bia hydro (xem hình 2.4), tiết diện tán xạ đàn hồi có cực đại theo hướng truyền thẳng (tiến). Lệch ra khỏi phương truyền thẳng, tiết diện có một điểm cực tiểu đầu tiên.

(a) Nguyên nhân của cực tiểu này là gì? Ước lượng tại góc nào của thí nghiệm cực tiểu đó sẽ quan sát thấy?

(b) Nếu năng lượng của chùm tăng lên 600 GeV, vị trí của cực tiểu như thế nào?

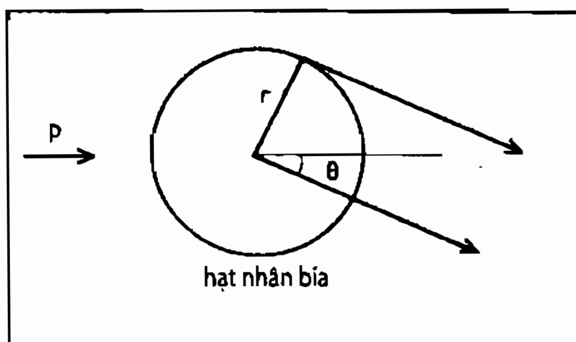
(c) Nếu bia là chì chứ không phải là hydro, vị trí cực tiểu sẽ xảy ra như thế nào (năng lượng của chùm hạt là 300 GeV)?

(d) Đối với chì, tại góc nào thì vị trí cực tiểu thứ hai xảy ra?

(*Chicago*)

Lời giải:

(a) Cực tiểu của tiết diện tán xạ đàn hồi xuất hiện do giao thoa giảm của sóng tạo thành do sự tán xạ với các thông số va chạm khác nhau. Bước sóng của proton tới , $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar c}{pc} = \frac{2\pi \times 1,97 \times 10^{-11}}{300 \times 10^3} = 4,1 \times 10^{-16}$ cm, nhỏ hơn kích thước của proton bia $\sim 10^{-13}$ cm. Cực tiểu thứ nhất của hình nhiễu xạ sẽ xảy



Hình 2.4

tại góc θ sao cho sự tán xạ từ tâm và biên của proton bia có độ lệch pha là một nửa bước sóng, tức là,

$$r\theta_{\min} = \lambda/2 = 2,1 \times 10^{-16} \text{ cm}.$$

Như thế, nếu $r = 1,0 \times 10^{-13}$ cm, cực tiểu đầu tiên sẽ là ở $2,1 \times 10^{-3}$rad.

(b) Nếu $E \to 600$ GeV/c, khi đó $\lambda \to \lambda/2$ và $\theta_{\min} \to \theta_{\min}/2$, tức là, cực tiểu sẽ xảy ra tại vị trí $\theta_{\min} = 1,05 \times 10^{-3}$rad.

(c) Đối với chì Pb: $A = 208$, $r = 1,1 \times 208^{\frac{1}{3}} = 6,5$ fm, và chúng ta chờ đón cực tiểu đầu tiên xuất hiện ở góc $\theta_{\min} = 3,2 \times 10^{-4}$rad.

(d) Tại cực tiểu thứ hai, sự tán xạ từ tâm và tại biên có độ lệch pha là 3/2 bước sóng. Như vậy, cực tiểu thứ hai sẽ xảy ra tại $\theta_{\min} = 3 \times 3,2 \times 10^{-4} = 9,6 \times 10^{-4}$rad.

2. NĂNG LƯỢNG LIÊN KẾT HẠT NHÂN, PHẢN ỨNG PHÂN HẠCH VÀ PHẢN ỨNG NHIỆT HẠCH (2024–2047)

2024

Công thức khối lượng bán kinh nghiệm liên hệ giữa khối lượng hạt nhân, $M(A, Z)$ và số nguyên tử Z và khối lượng nguyên tử A. Hãy giải thích và đánh giá từng số hạng, cho giá trị ước lượng đối với độ lớn của mỗi hệ số hay hằng

số trong mỗi số hạng.

(*Columbia*)

Lời giải:

Khối lượng của hạt nhân, $M(Z, A)$ là

$$M(Z, A) = ZM(^1\text{H}) + (A - Z)m_n - B(Z, A),$$

trong đó, $B(Z, A)$ là năng lượng liên kết của hạt nhân, cho bởi mẫu giọt chất lỏng là

$$B(Z, A) = B_v + B_s + B_e + B_a + B_p = a_v A - a_s A^{2/3} - a_e Z^2 A^{-1/3}$$
$$- a_a \left(\frac{A}{2} - Z\right)^2 A^{-1} + a_p \delta A^{-1/2},$$

trong đó B_v, B_s, B_e tương ứng là năng lượng thể tích, năng lượng bề mặt và năng lượng tĩnh điện giữa các proton.

Do bán kính hạt nhân có thể đưa ra như $r_0 A^{-1/3}$, r_0 hằng số, khi đó B_v, là đại lượng tỉ lệ với thể tích của hạt nhân, sẽ tỉ lệ với A. Tương tự, năng lượng bề mặt sẽ tỉ lệ với $A^{2/3}$. Năng lượng Coulomb tỉ lệ với Z^2/R, và như vậy tỉ lệ với $Z^2 A^{-1/3}$.

Lưu ý rằng B_s xuất hiện do bề mặt hạt nhân, tại đó các nucleon tương tác, theo giá trị trung bình, chỉ với một nửa số nucleon so với các nucleon bên trong tương tác, và có thể xem như một số hạng hiệu chính cho B_v.

B_a xuất hiện do hiệu ứng đối xứng đối với những hạt nhân với số khối lượng A, hạt nhân có $Z = A/2$ là bền nhất. Lệch khỏi điều kiện này dẫn đến sự không ổn định và năng lượng liên kết giảm.

Cuối cùng, nơtron và proton trong một hạt nhân có xu hướng tồn tại theo cặp. Như vậy, hạt nhân với số nơtron và proton chẵn - chẵn là bền nhất, lẻ - lẻ là kém bền nhất, chẵn - lẻ hay lẻ - chẵn là trung gian của sự bền vững. Hiệu ứng này được tính cho năng lượng ghép cặp $B_p = a_p \delta A^{-1/2}$, trong đó

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{đối với hạt nhân chẵn - chẵn,} \\ 0 & \text{đối với hạt nhân chẵn - lẻ hay lẻ - chẵn,} \\ -1 & \text{đối với hạt nhân lẻ - lẻ.} \end{cases}$$

Giá trị của các hệ số có thể xác định được bằng cách kết hợp các tính toán lý thuyết và điều chỉnh cho phù hợp với giá trị năng lượng liên kết thực nghiệm.

Các đại lượng được xác định là

$$a_v = 15,835 \text{ MeV}, \qquad a_s = 18.33 \text{ MeV}, \qquad a_e = 0,714 \text{ MeV},$$
$$a_a = 92,80 \text{ MeV}, \qquad a_p = 11,20 \text{ MeV}.$$

2025

Năng lượng liên kết hạt nhân có thể ước lượng bằng biểu thức kinh nghiệm

$$\text{B.E.} = a_1 A - a_2 A^{2/3} - a_3 Z^2 A^{-1/3} - a_4 (A - 2Z)^2 A^{-1}.$$

(a) Giải thích các số hạng trong biểu thức.

(b) Xem một tập hợp các hạt nhân đồng vị, hãy đưa ra mối quan hệ giữa A và Z cho các hạt nhân đang sẵn có một cách tự nhiên.

(c) Sử dụng mẫu khí Fermi để ước lượng độ lớn của a_4. Bạn có thể giả định $A \neq 2Z$ và bán kính hạt nhân là $R = R_0 A^{1/3}$.

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Các số hạng trong biểu thức biểu diễn các năng lượng thể tích, bề mặt, Coulomb và đối xứng như được giải thích ở **Bài tập 2024** (trong đó $a_a = 4a_4$).

(b) Đối với các hạt nhân đồng khối số cùng số A và khác Z, các hạt nhân ổn định phải thỏa mãn

$$\frac{\partial(B.E.)}{\partial Z} = -2A^{-1/3} a_3 Z + 4a_4 A^{-1}(A - 2Z) = 0,$$

cho ta

$$Z = \frac{A}{2 + \frac{a_3}{2a_4} A^{2/3}}.$$

Với $a_3 = 0,714$ MeV, $a_4 = 23,20$ MeV,

$$Z = \frac{A}{2 + 0,0154 A^{2/3}}.$$

(c) Một khí Fermi thể tích V ở nhiệt độ tuyệt đối $T = 0$ có năng lượng

$$E = \frac{2V}{h^3} \cdot \frac{4\pi}{5} \cdot \frac{p_0^5}{2m}$$

và số hạt

$$N = \frac{2V}{h^3} \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot p_0^3 ,$$

ở đây, ta đã giả định là mỗi ô (không gian) pha có thể chứa hai hạt (nơtron hay proton) có spin ngược nhau. Động lượng giới hạn khi đó là

$$p_0 = h\left(\frac{3}{8\pi} \cdot \frac{N}{V}\right)^{\frac{1}{3}}$$

và năng lượng tương ứng

$$E = \frac{3}{40}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{h^2}{m} V^{-\frac{2}{3}} N^{\frac{5}{3}} .$$

Đối với hạt nhân (A, Z) xem nơtron và proton như các khí độc lập trong thể tích hạt nhân V. Khi đó, năng lượng của trạng thái thấp nhất là

$$\begin{aligned} E &= \frac{3}{40}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2}{m} \frac{N^{5/3} + Z^{5/3}}{V^{2/3}} \\ &= \frac{3}{40}\left(\frac{9}{4\pi^2}\right)^{2/3} \cdot \frac{h^2}{mR_0^2} \frac{N^{5/3} + Z^{5/3}}{A^{2/3}} \\ &= C\frac{N^{5/3} + Z^{5/3}}{A^{2/3}} , \end{aligned}$$

trong đó $V = \frac{4\pi}{3} R_0^3 A$, $R_0 \approx 1,2\,\text{fm}$, $C = \frac{3}{40}\left(\frac{9}{4\pi^2}\right)^{2/3} \frac{1}{mc^2}\left(\frac{hc}{R_0}\right)^2 = \frac{3}{40}\left(\frac{9}{4\pi^2}\right)^{\frac{2}{3}} \times \frac{1}{940}\left(\frac{1238}{1,2}\right)^2 = 31,7\ \text{MeV}$.

Đối với hạt nhân bền, $N + Z = A$, $N \approx Z$. Đặt $N = \frac{1}{2}A(1 + \varepsilon/A)$, $Z = \frac{1}{2}A(1 - \varepsilon/A)$, trong đó $\frac{\varepsilon}{A} \ll 1$. Bởi vì

$$\left(1 + \frac{\varepsilon}{A}\right)^{5/3} = 1 + \frac{5\varepsilon}{3A} + \frac{5\varepsilon^2}{9A^2} + \dots ,$$

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{A}\right)^{5/3} = 1 - \frac{5\varepsilon}{3A} + \frac{5\varepsilon^2}{9A^2} - \dots ,$$

ta có

$$N^{\frac{5}{3}} + Z^{\frac{5}{3}} \approx 2\left(\frac{A}{2}\right)^{\frac{5}{3}}\left(1 + \frac{5\varepsilon^2}{9A^2}\right)$$

và

$$E \approx 2^{-2/3}CA\left[1+\frac{5\varepsilon^2}{9A^2}\right] = 2^{-2/3}CA + \frac{5}{9}\times 2^{-2/3}C\frac{(N-Z)^2}{A}\,.$$

Số hạng thứ hai có dạng $a_4\frac{(N-Z)^2}{A}$ với

$$a_4 = \frac{5}{9}\times 2^{-2/3}C \approx 11\ \text{MeV}\,.$$

Kết quả nhỏ hơn một hệ số là 2 so với kết quả cho bởi **Bài tập 2024**, trong đó $a_4 = a_a/4 = 23,20$ MeV. Điều này có thể do sự ước lượng thô của mẫu hạt nhân.

2026

Năng lượng liên kết cao nhất trên một nucleon xảy ra gần ^{56}Fe và nhỏ hơn nhiều ở ^{238}U. Hãy giải thích điều này bằng lý thuyết liên kết hạt nhân bán kinh nghiệm. Hãy phát biểu công thức năng lượng liên kết hạt nhân bán kinh nghiệm (bạn không cần định rõ giá trị của các hệ số).

(*Columbia*)

Lời giải:

Công thức bán kinh nghiệm đối với năng lượng liên kết của hạt nhân (A, Z) là

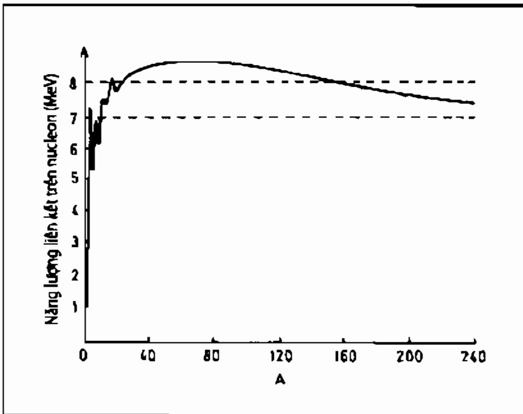
$$B(Z,A) = B_v + B_s + B_e + B_a + B_p = a_vA - a_sA^{2/3} - a_eZ^2A^{-1/3}$$
$$- a_a\left(\frac{A}{2}-Z\right)^2A^{-1} + a_p\delta A^{-1/2}\,.$$

Năng lượng liên kết trung bình cho mỗi nucleon khi đó là

$$\varepsilon = B/A = a_v - a_sA^{-1/3} - a_eZ^2A^{-4/3} - a_a\left(\frac{1}{2}-\frac{Z}{A}\right)^2 + a_p\delta A^{-3/2}\,.$$

Xem xét năm số hạng thành phần trong biểu thức ε. Sự tham gia của thành phần ghép cặp (thành phần cuối cùng) đối với cùng chỉ số A có thể khác nhau đối với tổ hợp khác nhau của Z, N mặc dù nói chung thành phần đó giảm khi A tăng. Sự tham gia của thành phần thể tích, tỉ lệ với A, là hằng số. Năng lượng bề mặt làm giảm ε do giá trị tuyệt đối của nó giảm khi A tăng. Năng lượng Coulomb đồng thời cũng làm giảm ε do giá trị tuyệt đối của nó giảm

theo A do Z và A tăng cùng với nhau. Năng lượng đối xứng cũng làm giảm ϵ, giá trị tuyệt đối của nó tăng theo A bởi vì Z/A giảm khi A tăng. Tổng hợp lại tất cả thành phần này ta thấy rằng năng lượng liên kết trung bình tăng với A trong khoảng đầu và đạt cực đại tại $A \sim 50$ và từ đó giảm dần như được chỉ ra ở hình 2.5.



Hình 2.5

2027

Vẽ một đường cong chỉ ra năng lượng liên kết trên một nucleon như là hàm số của khối lượng hạt nhân. Cho các giá trị theo MeV, với độ chính xác tốt nhất có thể. Cực đại của đường cong tại điểm nào? Từ dạng đường cong này hãy giải thích hiện tượng phân hạch và ước lượng năng lượng giải phóng trên mỗi sự phân hạch của ^{235}U. Lực nào chịu trách nhiệm chính cho dạng của đường cong ở miền trên của khối lượng hạt nhân?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Hình 2.5 chỉ giá trị trung bình của năng lượng liên kết cho mỗi nucleon như là hàm số của khối lượng hạt nhân A. Giá trị cực đại xảy ra tại $A \sim 50$. Khi A tăng từ 0, đường cong tăng nhanh khi $A < 30$, nhưng có sự thăng giáng đáng kể. Ở đây, sự tương tác qua lại giữa các nucleon chưa đạt tới sự bão hòa và số nucleon trong hạt nhân chưa nhiều, do đó, năng lượng liên kết trung bình tăng nhanh với số khối lượng. Nhưng cũng vì có ít nucleon, sự ảnh hưởng của ghép cặp và tính đối xứng ảnh hưởng đáng kể lên năng lượng liên

kết trung bình và gây ra sự thăng giáng.

Khi $A > 30$, năng lượng liên kết trung bình vượt quá 8 MeV. Khi A tăng tiếp tục, đường cong giảm dần. Ở đây, với số nucleon đủ lớn, lực tương tác giữa các nucleon trở nên bão hòa và như vậy năng lượng liên kết trung bình cũng bão hòa. Khi số nucleon tăng tiếp, năng lượng liên kết trung bình giảm chậm do ảnh hưởng của lực đẩy Coulomb.

Trong phản ứng phân hạch một hạt nhân nặng tách ra thành hai hạt nhân trung bình. Từ đường cong, ta thấy rằng các phần phân rã có năng lượng liên kết trung bình cao hơn. Năng lượng dư được giải phóng. Giả sử sự phân hạch của ^{235}U tạo ra hai hạt nhân có $A \sim 117$. Năng lượng giải phóng là $235 \times (8,5 - 7,6) = 210$ MeV.

2028

Năng lượng liên kết của hạt nhân tỉ lệ nhiều hơn với $A(= N + Z)$ hay A^2? Các giá trị bằng số của các hệ số liên quan (đơn vị trạng thái) là gì? Làm sao biết được sự phụ thuộc vào đại lượng A? Điều này ngụ ý một tính chất quan trọng của lực tương tác nơtron-nơtron? Nó được gọi là gì? Vì sao một nơtron liên kết với một hạt nhân bền chống lại sự phân rã trong khi một hạt lamđa Λ trong một siêu hạt nhân lại không?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Năng lương liên kết hạt nhân tỉ lệ với A nhiều hơn với hệ số tỉ lệ là 15,6 MeV. Bởi vì tính chất bão hòa của lực hạt nhân. Một nucleon có thể chỉ tương tác với những nucleon ngay bên cạnh và do đó chỉ với một số giới hạn của nucleon khác. Do nguyên nhân đó năng lượng liên kết tỉ lệ với A hơn là với A^2, điều này có thể xảy ra nếu nucleon tương tác với toàn bộ các nucleon trong hạt nhân. Lực tương tác hạt nhân do đó là lực tầm ngắn.

Vấn đề gây ra sự phân rã nói chung là sự chuyển dịch trạng thái của một hệ sang trạng thái mới bền vững hơn. Một nơtron tự do phân rã tuân theo

$$n \to p + e + \bar{\nu}$$

và giải phóng năng lượng

$$Q = m_n - m_p - m_e = 939,53 - 938,23 - 0,51 = 0,79 \text{ MeV}.$$

Sự phân rã của nơtron liên kết trong hạt nhân ^AX_N sẽ tạo thành một hạt nhân có dạng $^AX_{N-1}$. Nếu năng lượng liên kết của $^AX_{N-1}$ thấp hơn của ^AX_N và

hiệu số lớn hơn 0,79 MeV, sự phân rã làm tăng năng lượng của hệ và do đó không xảy ra. Do đó, nơtrron ở trạng thái không bức xạ β là nơtron bền. Mặt khác sự phân rã của hạt Λ^0, $37,75$ MeV, cao hơn hiệu của các năng lượng liên kết hạt nhân giữa trạng thái cuối và trạng thái ban đầu và do đó hạt Λ trong một siêu hạt nhân sẽ phân rã.

2029

Hình 2.5 đưa ra đồ thị của năng lượng trung bình của một nucleon E biến đổi theo số khối lượng A. Ở sự phân hạch của một hạt nhân có số khối lượng A_0 (khối lượng M_0) thành hai hạt nhân A_1 và A_2 (khối lượng M_1 và M_2), năng lượng giải phóng là

$$Q = M_0c^2 - M_1c^2 - M_2c^2 .$$

Hãy biểu diễn Q theo các thành phần của $\varepsilon(A)$ và A. Hãy ước lượng Q đối với sự phân hạch đối xứng của một hạt nhân có $A_0 = 240$.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Khối lượng của một hạt nhân có số khối A là

$$M = Zm_p + (A - Z)m_n - B/c^2 ,$$

trong đó Z là điện tích của nó, m_p và m_n tương ứng là khối lượng của nơtron và proton, B là năng lượng liên kết. Do $Z_0 = Z_1 + Z_2$, $A_0 = A_1 + A_2$, và như vậy $M_0 = M_1 + M_2 + (B_1 + B_2)/c^2 - B_0/c^2$, ta có

$$Q = M_0c^2 - M_1c^2 - M_2c^2 = B_1 + B_2 - B_0 .$$

Năng lượng liên kết của một hạt nhân là tích của năng lượng liên kết trung bình và số khối

$$B = \varepsilon(A) \times A .$$

Do đó

$$Q = B_1 + B_2 - B_0 = A_1\varepsilon(A_1) + A_2\varepsilon(A_2) - A_0\varepsilon(A_0) .$$

Với $A_0 = 240$, $A_1 = A_2 = 120$ trong một phân hạch đối xứng, từ hình 2.5 ta có

$$\varepsilon(120) \approx 8,5 \text{ MeV}, \qquad \varepsilon(240) \approx 7,6 \text{ MeV} .$$

Nên năng lượng giải phóng trong phản ứng phân hạch là

$$Q = 120\varepsilon(120) + 120\varepsilon(120) - 240\varepsilon(240) \approx 216 \text{ (MeV)}.$$

2030

(a) Vẽ đồ thị năng lượng theo mối quan hệ năng lượng - khoảng phân ly để giải thích phản ứng phân hạch. Mô tả định tính mối liên hệ giữa đặc điểm của đồ thị này với mô hình giọt chất lỏng.

(b) Nêu nguồn gốc của năng lượng giải phóng trong phản ứng phân hạch hạt nhân nặng.

(c) Điều gì khiến cho các hạt nhân thông thường có khối lượng nặng hơn sắt và nhẹ hơn chì không thể có phản ứng phân hạch tự phát?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Phản ứng phân hạch hạt nhân có thể giải thích bằng cách sử dụng đường cong năng lượng liên kết ε riêng theo số khối A (hình 2.5). Khi A tăng từ 0, thì năng lượng liên kết trên một nucleon E, sau khi đạt tới một cực đại, sẽ giảm dần. Trong một vùng rộng của A, ta có $\varepsilon \approx 8$ MeV/nucleon. Ta có năng lượng liên kết phụ thuộc gần tuyến tính vào A, điều này thể hiện sự bão hòa của lực hạt nhân (**Bài tập 2028**), nó phù hợp với mô hình giọt chất lỏng.

(b) Khi một hạt nhân nặng tách thành hai hạt nhân trung bình trong phản ứng phân hạch, năng lượng liên kết riêng tăng. Năng lượng hạt nhân sinh ra là sự chênh lệch năng lượng liên kết trước và sau phản ứng

$$Q = A_1\varepsilon(A_1) + A_2\varepsilon(A_2) - A\varepsilon(A),$$

trong đó A, A_1 và A_2 lần lượt là số khối của các hạt nhân trước và sau phản ứng, $\varepsilon(A_i)$ là năng lượng liên kết riêng của hạt nhân A_i.

(c) Mặc dù nếu chỉ xét về năng lượng liên kết riêng thì các nguyên tố nặng hơn sắt nhưng nhẹ hơn chì có thể giải phóng năng lượng trong phản ứng phân hạch, tuy nhiên hàng rào Coulomb ngăn không cho sự phân hạch tự phát xảy. Nguyên nhân do hàng rào phân hạch của các hạt nhân này quá lớn đến nỗi

xác suất xuyên qua là rất nhỏ.

2031

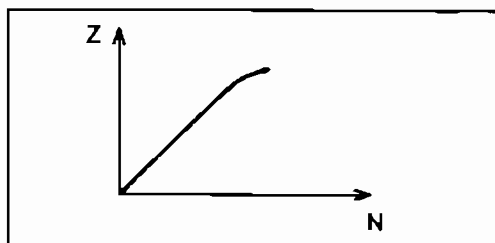
Các hạt nhân bền có N và Z nằm gần đường cong trong hình 2.6.

(a) Nêu một cách định tính, đặc điểm nào xác định hình dạng của đường cong.

(b) Trong hạt nhân nặng, số proton nhỏ hơn đáng kể so với số nơtron. Hãy giải thích.

(c) $^{14}O(Z = 8, N = 6)$ có thời gian sống là 71 giây. Các hạt nhân trong trạng thái cuối sau phân rã là gì?

(*Wisconsin*)



Hình 2.6

Lời giải:

(a) Một cách định tính, nguyên lý loại trừ Pauli cho phép 4 nucleon, 2 proton với spin ngược chiều và 2 nơtron với spin ngược chiều, có thể cùng nằm trên một mức năng lượng, tạo nên một hệ liên kết chặt. Nếu một nucleon được thêm vào, nó sẽ phải nằm trong mức kế tiếp và sẽ liên kết yếu hơn. Do vậy, các hạt nhân bền nhất là các hạt nhân có $N = Z$.

Từ việc xem xét năng lượng liên kết (**Bài tập 2025**), A và Z của một hạt nhân bền thỏa mãn

$$Z = \frac{A}{2 + 0,0154A^{2/3}},$$

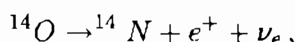
hay, do $A = N + Z$, ta có

$$N = Z(1 + 0,0154A^{2/3}).$$

Điều này cho thấy đối với các hạt nhân nhẹ, $N \approx Z$, trong khi đó đối với các hạt nhân nặng, $N > Z$, như thể hiện trong hình 2.6.

(b) Đối với hạt nhân nặng, nhiều proton trong hạt nhân sẽ tạo ra lực đẩy Coulomb mạnh. Để tạo nên một hạt nhân bền, cần có thêm các nơtron để chống lại lực đẩy Coulomb. Điều này làm mất đi hiệu ứng đối xứng proton - nơtron và làm cho tỉ lệ nơtron - proton trong hạt nhân bền tăng theo A. Do vậy, số proton trong hạt nhân nặng lớn hơn nhiều so với số nơtron.

(c) Do số proton trong ^{14}O lớn hơn số nơtron, và thời gian sống của nó là 71 s, nên phân rã của nó là phân rã β^+



$$^{14}O \to ^{14}N + e^+ + \nu_e\,,$$

phân rã sinh ra ^{14}N, e^+, và nơtrino - electron. Một quá trình phân rã có thể khác là nhận thêm một electron. Tuy nhiên, do năng lượng phân rã của ^{14}O là rất lớn, ($E_{\max} > 4$ MeV), nên tỉ số phân nhánh của phản ứng nhận electron là rất nhỏ.

2032

Số lượng proton và nơtron xấp xỉ bằng nhau trong hạt nhân nhẹ; tuy nhiên, trong hạt nhân nặng bền thì số nơtron lớn hơn đáng kể số lượng proton. Đối với hạt nhân nhẹ, năng lượng cần thiết để tách một proton hoặc một nơtron ra khỏi hạt nhân là gần như nhau; trong khi đối với hạt nhân nặng, năng lượng tách một proton lớn hơn năng lượng cần để tách một nơtron. Hãy giải thích điều đó, giả thiết rằng lực hạt nhân giữa các cặp nucleon là bằng nhau.

(*Columbia*)

Lời giải:

Năng lượng cần để tách một proton hoặc một nơtron ra khỏi hạt nhân bền (Z, A) lần lượt là

$$S_p = B(Z, A) - B(Z-1, A-1)\,,$$

hay

$$S_n = B(Z, A) - B(Z, A-1)\,.$$

trong đó B là năng lượng liên kết trên một nucleon của hạt nhân. Trong mô hình giọt chất lỏng (**Bài tập 2024**), ta có

$$B(Z, A) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c Z^2 A^{-1/3} - a_a \left(\frac{A}{2} - Z\right)^2 A^{-1} + a_p \delta A^{-1/2}\,.$$

Do vậy

$$S_p - S_n \doteq -a_c(2Z-1)(A-1)^{-\frac{1}{3}} + a_a(A-2Z)(A-1)^{-1}\,,$$

trong đó $a_c = 0,714$ MeV, $a_a = 92,8$ MeV. Đối với hạt nhân bền (**Bài tập 2025**), ta có

$$Z = \frac{A}{2 + \frac{2a_c}{a_a}A^{2/3}} \approx \frac{A}{2}\left(1 - \frac{a_c}{a_a}A^{2/3}\right),$$

và do vậy

$$S_p - S_n \approx \frac{a_c}{A-1}\left[A^{5/3} - (A-1)^{5/3} + \frac{a_c}{a_a}A^{5/3}(A-1)^{2/3}\right].$$

Đối với các hạt nhân nặng, $A \gg 1$ và $S_p - S_n \approx 5,5 \times 10^{-3}\ A^{4/3}$. Do vậy $S_p - S_n$ tăng theo A, có nghĩa là để tách một proton ra khỏi một hạt nhân nặng cần nhiều năng lượng hơn khi tách một nơtron.

2033

Tất cả các hạt nhân phóng xạ tự nhiên nặng nhất về cơ bản là không bền bởi vì lực đẩy hạt nhân của các proton. Cơ chế để hạt nhân giảm khối lượng là phân rã anpha. Tại sao lại là phân rã anpha mà không phải là các kiểu phân rã khác (như phát ra proton, đơteron, hay triton, hoặc là phân hạch)? Hãy trình bày ngắn gọn dựa trên

(a) năng lượng giải phóng, và

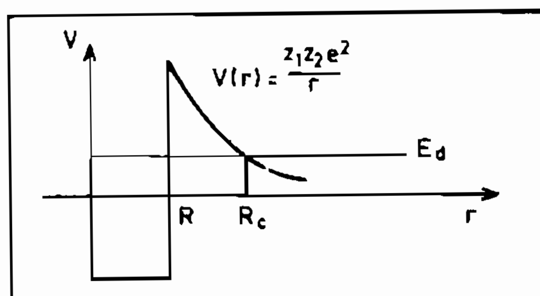
(b) hàng rào Coulomb phải xuyên qua.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Điều kiện cơ bản để một hạt nhân phân rã là năng lượng phân rã phải lớn hơn không. Tuy nhiên, đối với các hạt nhân nặng thì năng lượng phân rã của việc phát ra proton, đơteron, hay triton lại thường nhỏ hơn không. Lấy đồng vị và isoton (các hạt nhân có cùng số nơtron) của $^{238}_{95}$Am làm ví dụ. Xét 10 đồng vị của Am. Năng lượng phân rã proton nằm trong khoảng $-3,9$ MeV và $-5,6$ MeV, năng lượng phân rã đơteron trong khoảng $-7,7$ MeV và $-9,1$ MeV, năng lượng phân rã triton là khoảng $-7,6$ MeV và $-8,7$ MeV, trong khi đó năng lượng phân rã α nằm trong khoảng $5,2$ MeV và $6,1$ MeV. Đối với ba isoton của $^{238}_{95}Am$, năng lượng phân rã proton, đơteron và triton nhỏ hơn không, trong khi năng lượng phân rã α lớn hơn không. Ngoài ra, xác suất phân hạch của hạt nhân nặng nhỏ hơn năng lượng của phân rã α do xác suất xuyên qua hàng rào Coulomb của nó thấp hơn nhiều. Do vậy, phản ứng phân rã của các hạt nhân nặng chủ yếu thông qua phân rã α.

(b) Hình 2.7 thể hiện thế năng Coulomb của một hạt nhân điện tích $Z_1 e$ và một phân mảnh điện tích $Z_2 e$.



Hình 2.7

Giả sử một hạt nhân võ thành hai mảnh điện tích $Z_1 e$ và $Z_2 e$. Xác suất xuyên qua hàng rào Coulomb của một mảnh năng lượng E_d là

$$\exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_R^{R_c}\left[2\mu\left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}-E_d\right)\right]^{1/2}dr\right)=\exp(-G)\,,$$

trong đó μ là khối lượng rút gọn của hệ, ta có

$$R_c=\frac{Z_1 Z_2 e^2}{E_d}\,,$$

và

$$G=\frac{2\sqrt{2\mu E_d}}{\hbar}\int_R^{R_c}\left(\frac{R_c}{r}-1\right)^{1/2}dr\,.$$

Lấy tích phân ta có

$$\begin{aligned}\int_R^{R_c}\sqrt{\frac{R_c}{r}-1}\,dr&=R_c\int_1^{R_c/R}\frac{1}{p^2}\sqrt{p-1}\,dp\\&=R_c\left[-\frac{1}{p}\sqrt{p-1}+\mathrm{tg}^{-1}\sqrt{p-1}\right]_1^{R_c/R}\\&\approx R_c\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{R}{R_c}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\end{aligned}$$

trong đó ta lấy $\frac{R_c}{R}\gg 1$, và do vậy

$$G\approx\frac{2R_c\sqrt{2\mu E_d}}{\hbar}\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{R}{R_c}\right)^{1/2}\right]\approx\frac{2Z_1 Z_2 e^2\sqrt{2\mu}}{\hbar\sqrt{E_d}}\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{R}{R_c}\right)^{1/2}\right].$$

Đối với phản ứng phân hạch, mặc dù năng lượng được giải phóng bằng cỡ 50 lần năng lượng trong phân rã α nhưng khối lượng rút gọn bằng 20 lần Z_1Z_2 là bằng 5 lần. Do vậy, giá trị của G lớn hơn 4 lần và do vậy xác suất xuyên qua nhỏ hơn rất nhiều so với phân rã α.

2034

Tính không bền vững ("tính phóng xạ") của hạt nhân nguyên tử trong phát xạ hạt α là một hiện tượng giống nhau giữa các hạt nhân nặng nhưng tính phóng xạ proton thì gần như không có. Với những thông số định lượng thích hợp có thể có, hãy giải thích sự khác biệt lớn này.

(*Columbia*)

Lời giải:

Có thể giải thích điều này dựa trên năng lượng phân tách. Trong phân rã α của một hạt nhân nặng (A, Z) năng lượng giải phóng được cho bởi mô hình giọt chất lỏng (**Bài tập 2024**) là

$$\begin{aligned}E_d &= M(A,Z) - M(A-4, Z-2) - M(4,2)\\ &= -B(A,Z) + B(A-4,Z-2) + B(4,2)\\ &= -a_s[A^{2/3} - (A-4)^{2/3}] - a_c[Z^2A^{-\frac{1}{3}} - (Z-2)^2(A-4)^{-\frac{1}{3}}]\\ &\quad - a_a\left[\left(\frac{A}{2} - Z\right)^2 A^{-1} - \left(\frac{A-4}{2} - Z + 2\right)^2 (A-4)^{-1}\right]\\ &\quad + B(4,2) - 4a_v\,.\end{aligned}$$

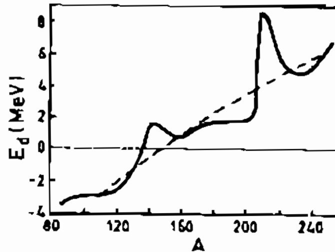
Đối với hạt nhân nặng, $\frac{2}{Z} \ll 1$, $\frac{4}{A} \ll 1$, công thức trên trở thành

$$\begin{aligned}E_d &\approx \frac{8}{3}a_sA^{-1/3} + 4a_cZA^{-\frac{1}{3}}\left(1 - \frac{Z}{3A}\right) - a_a\left(1 - \frac{2Z}{A}\right)^2 + 28,3 - 4a_v\\ &= 48,88A^{-1/3} + 2,856ZA^{-1/3}\left(1 - \frac{Z}{3A}\right)\\ &\quad - 92,80\left(1 - \frac{2Z}{A}\right)^2 - 35,04 \text{ MeV}.\end{aligned}$$

Đối với hạt nhân bền ta có (**Bài tập 2025**)

$$Z = \frac{A}{2 + 0,0154A^{2/3}} \,.$$

E_d được tính và biểu diễn bằng đường nét đứt trong hình 2.8.



Hình 2.8

Khi xảy ra phân rã α, ta cần $E_d > 0$. Ta thấy rằng E_d nhìn chung là tăng theo A và dương khi $A \geq 150$. Do vậy, chỉ có các hạt nhân nặng mới có phân rã α. Giá trị thực của E_d đối với các hạt nhân tự nhiên được biểu diễn bằng đường nét đậm trong hình vẽ. Đồ thị này giao với đường $E_d = 0$ tại $A \approx 140$, trong đó vùng có đồng vị phóng xạ α của ${}^{147}_{62}Sm$, ${}^{144}_{60}Nd$ thực sự được quan sát. Dối với phân rã photon của hạt nhân nặng ta có

$$\begin{aligned} & M(A,Z) - M(A-1,Z-1) - M(0,1) \\ & \quad = -B(A,Z) + B(A-1,Z-1) + B(0,1) \\ & \quad \approx -B(A,Z) + B(A-1,Z-1) = -\varepsilon < 0 \,, \end{aligned}$$

trong đó ε là năng lượng liên kết riêng và bằng cỡ 7 MeV đối với hạt nhân nặng. Do năng lượng phân rã là âm, phân rã proton không thể xảy ra. Tuy nhiên, các nhận xét đó là đối với hạt nhân nặng bền. Đối với các hạt nhân nặng nằm xa đường cong bền, tỉ số nơtron - proton có thể nhỏ hơn và do đó năng lượng liên kết của proton ngoài cùng có thể âm và phát xạ proton có thể xảy ra. Tương đối khác với việc phát xạ nơtron, phát xạ proton không phải là một quá trình tức thời mà là tương tự như phân rã α; nó có thời gian sống hữu hạn phụ thuộc vào hàng rào Coucomb. Do khối lượng proton nhỏ hơn khối lượng hạt α và hàng rào Coulomb mà nó phải đi qua chỉ bằng một nửa của phân rã α nên bán thời gian sống chống lại phân rã p sẽ nhỏ hơn nhiều so với phân rã α. Tất cả hạt nhân phát ra proton cũng có tính phóng xạ β^+ và bắt giữ electron quỹ đạo, và bán thời gian sống của nó liên quan tới xác suất của các

quá trình cạnh tranh đó. Ví dụ của tính phóng xạ proton trong một số trạng thái đồng phân có thể lấy từ thực nghiệm.

2035

(a) Hãy đưa ra luận điểm tại sao các hạt nhân nặng lại có tính phóng xạ α nhưng bền vững đối với phát xạ nơtron.

(b) Dùng phương pháp và luận điểm nào để xác định bán kính hạt nhân?

(c) Tính chất nào xác định một hệ nucleon ở trạng thái năng lượng thấp nhất của nó? Trình bày các tính chất không cổ điển.

(d) Tiết diện hiệu dụng của phản ứng phân hạch của các đồng vị urani ($Z = 92$) sau đây đối với nơtron nhiệt được cho trong bảng dưới.

Đồng vị	σ (bac)
^{230}U	20
^{231}U	300
^{232}U	76
^{233}U	530
^{234}U	0
^{235}U	580
^{236}U	0

Tiết diện hiệu dụng của phân hạch nơtron nhanh của cùng các đồng vị trên đều vào cỡ vài bac, và tính tuần hoàn chẵn lẻ rất ít được đề cập tới. Hãy giải thích các điều trên.

(*Columbia*)

Lời giải:

(a) Lý do các hạt nhân nặng chỉ có tính phóng xạ α được thảo luận ở **Bài tập 2003** và **2034**. Đối với các hạt nhân thông thường nằm gần đường cong bền β năng lượng liên kết của nơtron ngoài cùng là dương do vậy không có phóng xạ nơtron tự nhiên. Tuy nhiên, đối với các đồng vị giàu nơtron ở xa đường cong bền β năng lượng liên kết có thể âm đối với nơtron ngoài cùng, và do vậy phát xạ nơtron có thể tự phát. Do không có hàng rào Coulomb đối với nơtron nên phát xạ là một quá trình tức thời. Ngoài ra, các trạng thái kích thích nhất định xuất phát từ phân rã β cũng có thể phát ra nơtron và được gọi là các nơtron trễ. Bán thời gian sống chống lại phát xạ nơtron trễ là bằng với phân rã β liên quan.

(b) Có hai loại phương pháp đo bán kính hạt nhân. Thứ nhất là lợi dụng vùng tương tác mạnh của lực hạt nhân bằng cách nghiên cứu tán xạ bởi hạt nhân của nơtron, proton hay hạt α, cụ thể là bằng cách đo tiết diện hiệu dụng toàn phần của nơtron năng lượng trung bình. Phương pháp này cho bán kính hạt nhân bằng

$$R = R_0 A^{1/3}, \qquad R_0 \approx (1,4 \sim 1,5) \text{ fm}.$$

Phương pháp khác là sử dụng tương tác Coulomb giữa các hạt mang điện và hạt nhân nguyên tử hoặc giữa các hạt bên trong một hạt nhân để xác định bán kính điện từ hạt nhân. Bằng cách nghiên cứu tán xạ giữa các electron năng lượng cao và hạt nhân nguyên tử, ta có thể thu được thừa số cấu trúc của hạt nhân từ đó tìm được bán kính điện từ hạt nhân. Giả thiết rằng các hạt nhân ảnh có cùng cấu trúc, khối lượng của chúng khác nhau do sự khác nhau về năng lượng Coulomb và sự khác nhau về khối lượng giữa nơtron và proton. Ta có (**Bài tập 2010**)

$$\Delta E = \frac{3}{5}\frac{e^2}{R}(2Z-1) - (m_n - m_p)c^2$$

đối với hiệu năng lượng giữa trạng thái cơ bản của hạt nhân ảnh, từ đó cho ta bán kính điện từ hạt nhân R. Một phương pháp chính xác hơn là nghiên cứu sai lệch của nguyên tử meson μ so với mô hình Bohr của nguyên tử hydro (**Bài tập 1062**). Do bán kính Bohr của hạt nhân meson nhỏ hơn rất nhiều bán kính nguyên tử hyđro, nên nó sẽ nhạy hơn với giá trị của bán kính điện từ hạt nhân, bằng phương pháp này ta có

$$R = R_0 A^{1/3}, \qquad R_0 \approx 1,1 \text{ fm}.$$

Thí nghiệm tán xạ electron năng lượng cao cho thấy phân bố điện tích trong hạt nhân là không đều.

(c) Trạng thái cơ bản của một hệ nucleon được xác định bởi spin của nó, tính chẵn lẻ và số lượng tử spin đồng vị.

Spin và tính chẵn lẻ được xác định bởi nucleon cuối hoặc hai nucleon không tạo cặp. Đối với trạng thái cơ bản của hạt nhân chẵn - chẵn, $J^p = 0^+$. Đối với một hạt nhân chẵn – lẻ, spin hạt nhân và tính chẵn lẻ được xác định bởi nucleon ngoài cùng, và đối với hạt nhân lẻ - lẻ, nó xác định bằng việc kết hợp quỹ đạo spin của hai nucleon ngoài cùng. Spin đồng vị của trạng thái cơ bản hạt nhân là $I = \frac{1}{2}|N - Z|$.

(d) Có một hàng rào phân hạch khoảng 6 MeV đối với urani do vậy phản ứng phân hạch tự phát khó có thể xảy ra mà cần phải có một tác động bên

ngoài. Đồng thời các nơtron trong hạt nhân có xu hướng tạo cặp do vậy đồng vị với số chẵn nơtron, N, sẽ có năng lượng liên kết cao hơn. Khi một đồng vị urani với số lẻ các nơtron nhận thêm một nơtron và trở thành một đồng vị N chẵn, năng lượng kích thích của hạt nhân tổng hợp lớn, đủ để vượt qua hàng rào phân hạch, và phản ứng xảy ra. Mặt khác, khi một đồng vị urani N chẵn nhận một nơtron để trở thành một đồng vị với N lẻ, năng lượng kích thích của hạt nhân tổng hợp nhỏ, không đủ để vượt qua hàng rào phân hạch, và phản ứng không xảy ra. Ví dụ, trong phản ứng $^{235}U + n \rightarrow ^{236} U^*$ năng lượng kích thích của hạt nhân tổng hợp $^{236}U^*$ là 6,4 MeV, lớn hơn hàng rào phân hạch ^{236}U của 5,9 MeV, do vậy, xác suất phản ứng này trở thành phản ứng phân hạch là lớn. Trong phản ứng $^{238}U + n \rightarrow ^{239} U^*$, năng lượng kích thích chỉ bằng 4,8 MeV, nó nhỏ hơn hàng rào phân hạch 6,2 MeV của ^{239}U, và do vậy xác suất của phản ứng phân hạch sẽ thấp. Các hạt nhân đó cần nơtron với năng lượng cao hơn để thu được phản ứng phân hạch. Khi năng lượng nơtron lớn hơn một ngưỡng nào đó, tiết diện hiệu dụng của phản ứng phân hạch trở nên lớn hơn và phản ứng phân hạch có thể xảy ra.

Các nơtron nhiệt có thể gây ra phản ứng phân hạch khi bị thu bởi một đồng vị urani N lẻ có bước sóng dài và do vậy có tiết diện bắt giữ hiệu dụng lớn. Do vậy, tiết diện hiệu dụng của phản ứng phân hạch gây ra bởi nơtron nhiệt lớn cỡ hàng trăm bac, đối với đồng vị urani N lẻ. Và nó nhỏ đối với đồng vị N chẵn.

Nếu nơtron nhanh bị hấp thu bởi một đồng vị urani thì năng lượng kích thích của hạt nhân tổng hợp sẽ lớn hơn hàng rào phân hạch và phản ứng phân hạch xảy ra dù cho đồng vị có số nơtron lẻ hay chẵn. Trong khi nơtron nhanh có xác suất hấp thụ nhỏ hơn thì tiết diện hiệu dụng của nó, vào cỡ vài bac, lại không thay đổi theo tính chẵn lẻ nơtron của đồng vị urani.

2036

Công thức khối lượng bán thực nghiệm của hạt nhân lệch dạng cho ta năng lượng liên kết của hạt nhân $^A_Z X$

$$B = \alpha A - \beta A^{2/3}\left(1 + \frac{2}{5}\varepsilon^2\right) - \gamma Z^2 A^{-\frac{1}{3}}\left(1 - \frac{1}{5}\varepsilon^2\right),$$

trong đó α, β, γ = 14; 13; 0,6 MeV và ε là độ lệch tâm.

(a) Giải thích ngắn gọn phương trình trên và tìm điều kiện giới hạn liên quan tới Z và A để một hạt nhân có thể thực hiện một phản ứng phân hạch tự phát tức thời (không bị ngăn cản). Xét $^{240}_{94}Pu$ như một ví dụ.

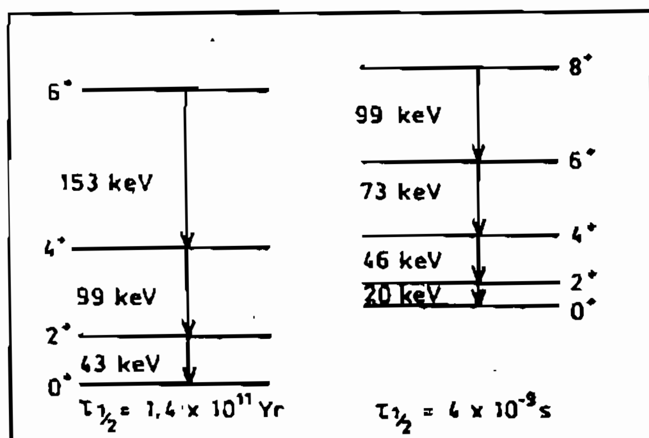
(b) Phát hiện về đồng phân hình dạng phân hạch và sự phát hiện của phản ứng phân hạch tự phát của đồng vị nặng từ trạng thái cơ bản của nó gợi ra một hàm thế năng hạt nhân $V(\varepsilon)$ phức tạp hơn. Sự kích thích hạt nhân đơn giản nào có thể giải thích cho hai tập hợp trạng thái $^{240}_{94}Pu$ được cho dưới đây (hình 2.9). Trình bày sự giống và khác nhau giữa hai tập đó. Chúng gợi ý điều gì về $V(\varepsilon)$? Vẽ phác đồ thị của $V(\varepsilon)$.

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Trong công thức khối lượng, số hạng đầu tiên thể hiện năng lượng khối, số hạng thứ hai là năng lượng mặt, trong đó $\frac{2}{5}\varepsilon^2$ là bổ chính cho sự biến dạng từ hình dạng cầu của hạt nhân, số hạng thứ ba là năng lượng Coulomb, với số bổ chính $\frac{1}{5}\varepsilon^2$ cho sự biến dạng của hạt nhân. Hệ quả của sự biến dạng của hạt nhân là năng lượng liên kết trở thành hàm của độ lệch tâm ε. Điều kiện giới hạn cho sự bền vững là $\frac{dB}{d\varepsilon} = 0$. Ta có

$$\frac{dB}{d\varepsilon} = -\frac{4\beta}{5}A^{2/3}\varepsilon + \gamma\frac{Z^2}{A^{1/3}} \cdot \frac{2}{5}\varepsilon = \frac{2}{5}\varepsilon A^{2/3}\left(\frac{\gamma Z^2}{A} - 2\beta\right) .$$



Hình 2.9

Nếu $\frac{dB}{d\varepsilon} > 0$, năng lượng liên kết hạt nhân tăng theo ε vì vậy sự biến dạng sẽ tiếp tục tăng và hạt nhân trở nên không bền. Nếu $\frac{dB}{d\varepsilon} < 0$, năng lượng liên kết giảm khi ε tăng do vậy hình dạng hạt nhân sẽ có xu hướng sao cho ε nhỏ hơn và hạt nhân bền vững. Do vậy, điều kiện giới hạn để hạt nhân tham gia phân

hạch tự phát tức thời là $\frac{d\beta}{d\varepsilon} > 0$, hay

$$\frac{Z^2}{A} \geq \frac{2\beta}{\gamma} = 43,3\,.$$

Đối với ^{240}Pu, $\frac{Z^2}{A} = 36,8 < 43,3$ và do vậy nó không thể có phân hạch tự phát tức thời; nó có thời gian sống hữu hạn chống lại phân hạch tự phát.

(b) Hai tập hợp mức năng lượng của ^{240}Pu (xem hình 2.9) có thể giải thích dựa vào kích thích quay tập thể của hạt nhân biến dạng, do mỗi tập hợp thỏa mãn mối quan hệ phổ quay đối với vùng quay $K = 0$

$$E_I = \frac{\hbar^2}{2M}[I(I+1)]\,.$$

Cả hai tập hợp trạng thái đều thể hiện đặc trưng của phổ quay của hạt nhân chẵn-chẵn; chúng khác nhau ở chỗ hai vùng quay tương ứng với momen quán tính quay M khác nhau. Dữ liệu đã cho tương ứng với $\frac{\hbar^2}{2J} \approx 7$ MeV đối với tập hợp đầu tiên, và $\frac{\hbar^2}{2J} \approx 3,3$ MeV đối với tập hợp thứ hai. Các momen quán tính khác nhau cho thấy sự biến dạng khác nhau. Sử dụng mô hình lớp vỏ giọt chất lỏng cho ta $V(\varepsilon)$ dưới dạng một hàng rào hai đỉnh, như trong hình 2.10. Tập hợp các trạng thái với thời gian sống dài hơn ứng với vùng quay trạng thái cơ bản ở cực tiểu thứ nhất của hàng rào thế hai đỉnh. Trạng thái này có hàng rào phân hạch rộng hơn và do vậy thời gian sống lâu hơn ($T_{1/2} = 1,4 \times 10^{11}$ năm đối với ^{240}Pu). Tập hợp vùng quay với thời gian sống ngắn hơn xuất hiện ở cực tiểu thứ hai của hàng rào thế. Trong trạng thái này hàng rào phân hạch hẹp hơn, do vậy thời gian sống ngắn hơn ($T_{1/2} = 4 \times 10^{-9}$s đối với ^{240}Pu). Sự khác nhau giữa hai vùng quay là do sự biến dạng khác nhau; do vậy hiện tượng đó được coi như là hiện tượng đồng phân hình dạng hạt nhân.

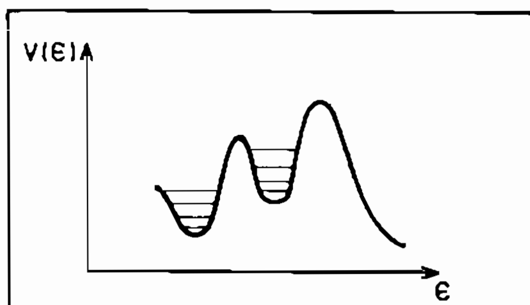
2037

Giả thiết một hạt nhân urani tự phát phân thành hai phần xấp xỉ bằng nhau. Tính độ giảm năng lượng tĩnh điện của hạt nhân. Mối liên hệ của nó với sự thay đổi năng lượng toàn phần là gì? (Giả thiết phân bố điện tích đều; bán kính hạt nhân $= 1,2 \times 10^{-13}\ A^{1/3}$ cm)

(*Columbia*)

Lời giải:

Hạt nhân urani có $Z_0 = 92$, $A_0 = 236$, và bán kính $R_0 = 1,2 \times$



Hình 2.10

$10^{-13}A_0^{1/3}$ cm. Khi nó tách ra thành hai phần gần bằng nhau, mỗi phần sẽ có

$$Z = \frac{1}{2}Z_0,\ A = \frac{1}{2}A_0,\ R = 1,2 \times 10^{-13}A^{1/3}\ \text{cm}.$$

Năng lượng tĩnh điện của một hình cầu có điện tích Q phân bố đều là $\frac{3}{5}Q^2/R$, trong đó R là bán kính. Khi đó đối với phân hạch urani, độ giảm năng lượng tĩnh điện là

$$\begin{aligned}\Delta E &= \frac{3}{5}\left[\frac{(Z_0e)^2}{R_0} - 2 \times \frac{(Ze)^2}{R}\right] \\ &= \frac{3 \times Z_0^2e^2}{5}\frac{1}{R_0}\left[1 - \frac{1}{2^{2/3}}\right] = 0,222 \times \frac{Z_0^2}{R_0}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)\hbar c \\ &= \frac{0,222 \times 92^2}{1,2 \times 10^{-13} \times 236^{\frac{1}{3}}} \times \frac{1}{137} \times 1,97 \times 10^{-11} \\ &= 364\ \text{MeV}.\end{aligned}$$

Sự giảm năng lượng này là nguồn gốc của năng lượng sinh ra trong phản ứng phân hạch urani. Tuy nhiên, để tính năng lượng thực tế được giải phóng, một số tham số khác cần phải xem xét tới như sự tăng của năng lượng bề mặt của phản ứng phân hạch.

2038

Hãy ước lượng (bậc độ lớn) tỉ số của năng lượng được giải phóng khi 1 g urani phân hạch so với năng lượng được giải phóng khi cho nổ 1 g TNT.

(*Columbia*)

Lời giải:

Phản ứng phân hạch liên quan tới lực hạt nhân mà năng lượng tương tác của chúng cỡ 1 MeV/nucleon. Phản ứng nổ TNT liên quan tới lực điện từ mà năng lượng tương tác vào cỡ 1 eV/phân tử. Do số nucleon trong 1 g urani là cùng bậc với số phân tử trong 1 g TNT, nên tỉ số năng lượng giải phóng là khoảng 10^6.

Ta sẽ tính toán chính xác hơn như sau. Năng lượng giải phóng khi 1 g TNT nổ là khoảng $2,6 \times 10^{22}$ eV. Năng lượng giải phóng trong phản ứng phân hạch của một hạt nhân urani là khoảng 210 MeV. Do vậy, phản ứng phân hạch của 1 g urani giải phóng một năng lượng bằng $\frac{6,023\times 10^{23}}{238} \times 210 = 5,3 \times 10^{23}$ MeV. Do vậy, tỉ số đó là cỡ 2×10^7.

2039

Mật độ nơtron $\rho(\mathbf{x}, t)$ trong một khối U^{235} tuân theo phương trình vi phân

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = A\nabla^2 \rho(\mathbf{x}, t) + B\rho(\mathbf{x}, t)\,,$$

trong đó A và B là các hằng số dương. Xét một khối U^{235} hình lập phương cạnh L. Giả thiết rằng các nơtron đó bay tới mặt của hình lập phương và rời đi ngay lập tức sao cho mật độ bề mặt của U^{235} luôn bằng không.

(a) Hãy mô tả ngắn gọn quá trình vật lý làm xuất hiện các số hạng $A\nabla^2\rho$ và $B\rho$. Giải thích cụ thể tại sao A và B đều dương.

(b) Có một độ dài tới hạn L_0 của cạnh hình lập phương U^{235}. Đối với $L > L_0$, mật độ nơtron trong hình lập phương là không bền và tăng theo hàm e mũ với thời gian – một vụ nổ sẽ xảy ra. Đối với $L < L_0$, mật độ nơtron giảm theo thời gian – sẽ không có vụ nổ. Tìm độ dài tới hạn L_0 theo A và B.

(*Columbia*)

Lời giải:

(a) Số hạng $B\rho(\mathbf{x}, t)$, tỉ lệ với mật độ nơtron, thể hiện sự tăng mật độ nơtron trong quá trình phân hạch. $B\rho(\mathbf{x}, t)$ thể hiện tốc độ tăng số lượng nơtron, trong một đơn vị thể tích tại vị trí $\mathbf{x}$ và tại thời điểm t, gây ra bởi

phản ứng phân hạch hạt nhân. Nó tỉ lệ với mật độ hạt nơtron gây ra phân hạch. Do phản ứng phân hạch U^{235} làm tăng số nơtron nên B dương. Số hạng $A\nabla^2\rho(\mathbf{x}, t)$ thể hiện chuyển động vĩ mô của nơtron gây ra bởi sự phân bố không đều của nơtron. Do các nơtron nói chung là chuyển động từ vị trí có mật độ cao tới nơi có mật độ thấp nên A cũng là một số dương.

(b) Lấy đỉnh của hình lập phương là gốc tọa độ, và ba cạnh của nó là các trục x, y và z. Đặt $\rho(\mathbf{x}, t) = f(x, y, z)e^{-\alpha t}$. Khi đó, phương trình vi phân trở thành

$$A\nabla^2 f(x, y, z) + (\alpha + B)f(x, y, z) = 0$$

với điều kiện biên

$$f(x, y, z)|_{i=0,L} = 0\,, \qquad i = x, y, z\,.$$

Tìm nghiệm dạng $f = X(x)Y(y)Z(z)$. Thay vào phương trình, ta có

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} + k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0\,,$$

trong đó, ta đã viết lại $\frac{\alpha+B}{A} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$. Điều kiện biên trở thành

$$X(x) = 0 \text{ tại } x = 0, L;\ Y(y) = 0 \text{ tại } y = 0, L;\ Z(z) = 0 \text{ tại } z = 0, L\,.$$

Khi đó, phương trình vi phân có thể tách thành 3 phương trình

$$\frac{d^2X}{dx^2} + k_x^2 X = 0\,, \quad \text{v.v.}$$

Nghiệm của các phương trình này là

$$X = C_{xi}\sin\left(\frac{n_{xi}\pi}{L}x\right)\,,$$

$$Y = C_{yj}\sin\left(\frac{n_{yj}\pi}{L}y\right)\,,$$

$$Z = C_{zk}\sin\left(\frac{n_{zk}\pi}{L}x\right)\,,$$

với $n_{xi}, n_{yj}, n_{zk} = \pm1, \pm2, \pm3\ldots$ và C_{xi}, C_{yj}, C_{zk} là các hằng số bất kì. Do vậy

$$f(x, y, z) = \sum_{ijk} C_{ijk}\sin\left(\frac{n_{xi}\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{n_{yj}\pi}{L}y\right)\sin\left(\frac{n_{zk}\pi}{L}z\right)\,,$$

với

$$\frac{\alpha + B}{A} = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 (n_{xi}^2 + n_{yj}^2 + n_{zk}^2) , \qquad C_{ijk} = C_{xi} C_{yi} C_{zk} .$$

Nếu $\alpha < 0$, mật độ nơtron sẽ tăng theo hàm mũ của thời gian, điều này dẫn tới sự không bền vững và có thể gây nổ. Do vậy, độ dài tới hạn L_0 được cho bởi

$$\alpha = \frac{A\pi^2}{L_0^2}(n_{xi}^2 + n_{yj}^2 + n_{zk}^2) - B = 0 ,$$

hay

$$L_0 = \pi\sqrt{\frac{A}{B}(n_{xi}^2 + n_{yj}^2 + n_{zk}^2)} .$$

Nói riêng, đối với $n_{xi} = n_{yj} = n_{zk} = 1$,

$$L_0 = \pi\sqrt{\frac{3A}{B}} .$$

2040

Thời gian sống của U^{235} là $10^3, 10^6, 10^9, 10^{12}$ năm.

(*Columbia*)

Lời giải:

10^9 năm. (Thời gian sống của U^{235} là 7×10^8 năm)

2041

Số phân hạch trong thời gian một giây của một lò phản ứng 100 MW là 10^6, 10^{12}, 10^{18}, 10^{24}, 10^{30}.

(*Columbia*)

Lời giải:

Mỗi sự phân hạch của hạt nhân urani khoảng 200 MeV $= 320 \times 10^{-13}$ J. Do đó, số phân hạch trong một giây của lò phản ứng 100 MW là

$$N = \frac{100 \times 10^6}{320 \times 10^{-13}} = 3 \times 10^{18} .$$

Như vậy, câu trả lời là 10^{18}.

2042

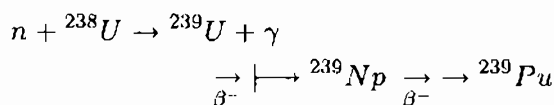
Hãy giải thích một cách ngắn gọn hoạt động của lò phản ứng "tái sinh". Hằng số vật lý nào của quá trình phân hạch là điều kiện tiên quyết của sự "tái sinh"? Điều kiện quan trọng nào được đề xuất cho việc lựa chọn vật liệu trong lò phản ứng? Nói riêng, nước có thể sử dụng như chất làm chậm được không?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Một lò phản ứng "tái sinh" chứa một chất có thể phân hạch và một chất không phân hạch có thể làm cho phân hạch nhưng được bằng cách hấp thụ một nơtron. Ví dụ, ^{235}U và ^{238}U. Giả sử có 3 nơtron cho một phân hạch. Một nơtron cần để kích hoạt một phân hạch của một nguyên tử nhiên liệu và giữ cho phản ứng dây chuyền tiếp diễn. Nếu hai nơtron kia có thể sử dụng để biến đổi hai nguyên tử không phân hạch được thành nguyên tử phân hạch được khi đó hai nguyên tử nhiên liệu được tạo thành khi một nguyên tử được tiêu tốn và lò phản ứng được gọi là lò tái sinh.

Trong thí dụ trên, các nơtron từ ^{235}U phân hạch có thể sử dụng để biến đổi ^{238}U thành ^{239}Pu



$$n + {}^{238}U \to {}^{239}U + \gamma$$
$$\underset{\beta^-}{\to} \longmapsto {}^{239}Np \underset{\beta^-}{\to} \to {}^{239}Pu$$

Điều kiện tiên quyết cho sự tái sinh là η, số nơtron sinh ra trên số nơtron hấp thụ trong nhiên liệu, phải lớn hơn 2. Trong thí dụ, điều này có thể đạt được bằng cách sử dụng nơtron nhanh và không cần có chất làm chậm nào.

2043

(a) Mô tả một cách ngắn gọn loại phản ứng nào theo đó một lò phân hạch hạt nhân hoạt động phải tuân theo.

(b) Vì sao năng lượng được giải phóng, và sơ bộ là bao nhiêu trên một phản ứng?

(c) Vì sao sản phẩm của phản ứng có tính phóng xạ?

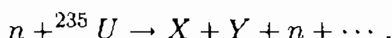
(d) Vì sao "chất làm chậm" lại cần thiết? Nguyên tố nặng hay nhẹ thích

hợp cho chất làm chậm, vì sao?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Trong phân hạch hạt nhân một hạt nhân nặng tách ra thành hai hạt nhân trung bình. Trong lò phản ứng, quá trình phân hạch được kích thích. Điều đó xảy ra khi một hạt nhân nặng bắt một nơtron. Ví dụ



$$n + ^{235}U \to X + Y + n + \cdots .$$

(b) Năng lượng liên kết riêng của một hạt nhân nặng khoảng 7,6 MeV trên một nucleon, trong khi đó đối với hạt nhân nhẹ khoảng 8,5 MeV cho một nucleon. Do vậy, khi một phân hạch xảy ra một phần năng lượng liên kết sẽ được giải phóng. Năng lượng giải phóng ra trên một phân hạch là 210 MeV.

(c) Sự phân hạch giải phóng ra một lượng lớn năng lượng, một phần dưới dạng năng lượng kích thích của các mảnh. Do vậy, các mảnh phân hạch nói chung bị kích thích mạnh và phân rã qua phát xạ γ. Thêm vào đó, tỉ số nơtron - proton của các mảnh, tương tự như của hạt nhân nặng ban đầu, cao hơn tỉ số của các hạt nhân bền vững cùng khối lượng. Do đó, các mảnh hầu như là những đồng vị không ổn định giàu nơtron, đó là chất phóng xạ β^- mạnh.

(d) Đối với lò phản ứng sử dụng ^{235}U, sự phân hạch chủ yếu gây ra bởi các nơtron nhiệt. Tuy nhiên, phản ứng phân hạch lại phát xạ nơtron nhanh; do đó cần có một chất làm chậm nào đó để giảm vận tốc của các nơtron. Các chất làm chậm thích hợp hơn cả là các hạt nhân nhẹ do nơtron mất mát năng lượng do va chạm giữa nơtron và hạt nhân nhẹ thì nhiều hơn.

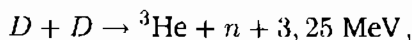
2044

Cho ba loại phản ứng hạt nhân hiện tại đang được xem là phản ứng nhiệt hạch điều khiển được. Loại phản ứng nào có tiết diện thẳng lớn nhất? Cho năng lượng gần đúng giải phóng ra trong các phản ứng. Các nơtron sinh ra sẽ được sử dụng như thế nào?

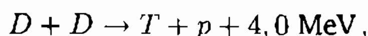
(*Wisconsin*)

Lời giải:

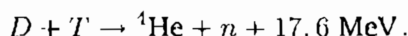
Các phản ứng được xem như là phản ứng nhiệt hạch điều khiển được là



$$D + D \to {}^3\text{He} + n + 3,25 \text{ MeV},$$



$$D + D \to T + p + 4,0 \text{ MeV},$$



$$D + T \to {}^4\text{He} + n + 17,6 \text{ MeV}.$$

Tiết diện thẳng của phản ứng cuối cùng là lớn nhất.

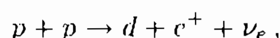
Các nơtron tạo thành từ các phản ứng có thể sử dụng để kích hoạt sự phân hạch trong một phản ứng phân hạch - nhiệt hạch, hay tham gia trong các phản ứng như ${}^6\text{Li} + n \to {}^4\text{He} + T$ để giải phóng thêm năng lượng.

2045

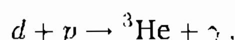
Thảo luận về các phản ứng nhiệt hạt nhân. Hãy cho thí dụ về các phản ứng quan trọng trong lòng mặt trời, trong bom hạt nhân H và các cố gắng thử phản ứng nhiệt hạch có điều khiển. Hãy ước lượng sơ bộ theo electron-von năng lượng giải phóng ra trên một phản ứng và cho biết đặc trưng của các lực hạt nhân quan trọng nhất trong những phản ứng này. (*Wisconsin*)

Lời giải:

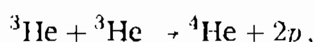
Các phản ứng quan trọng nhất trong lòng mặt trời là chuỗi phản ứng proton - proton



$$p + p \to d + e^+ + \nu_e,$$

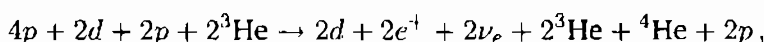


$$d + p \to {}^3\text{He} + \gamma,$$



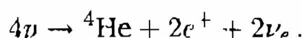
$${}^3\text{He} + {}^3\text{He} \to {}^4\text{He} + 2p,$$

kết quả phản ứng là



$$4p + 2d + 2p + 2{}^3\text{He} \to 2d + 2e^+ + 2\nu_e + 2{}^3\text{He} + {}^4\text{He} + 2p,$$

hay



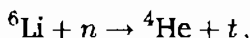
$$4p \to {}^4\text{He} + 2e^+ + 2\nu_e.$$

Năng lượng giải phóng ra trong các phản ứng này sơ bộ là

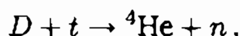
$$Q = [4M({}^1\text{H}) - M({}^4\text{He})]c^2 = 4 \times 1,008142 - 4,003860$$
$$= 0,02871 \text{ amu} = 26,9 \text{ MeV}.$$

Chất nổ trong bom hạt nhân H là hỗn hợp của đơteri, triti và lithi dưới dạng đậm đặc. Bom hạt nhân là một phản ứng nhiệt hạch không điều khiển

được giải phóng ra một lượng rất lớn năng lượng tại thời điểm của vụ nổ. Chuỗi phản ứng là

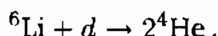


$$^6\text{Li} + n \to {}^4\text{He} + t\,,$$



$$D + t \to {}^4\text{He} + n\,,$$

với phản ứng tạo thành là

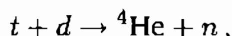


$$^6\text{Li} + d \to 2\,{}^4\text{He}\,.$$

Năng lượng sinh ra trên một phản ứng là

$$\begin{aligned} Q &= [M(^6\text{Li}) + M(^2\text{H}) - 2M(^4\text{He})]c^2 \\ &= 6,01690 + 2,01471 - 2 \times 4,00388 \\ &= 0,02385 \text{ đvklnt } = 22,4 \text{ MeV}\,. \end{aligned}$$

Một ví dụ của phản ứng tổng hợp có thể điều khiển được là



$$t + d \to {}^4\text{He} + n\,,$$

trong đó năng lượng tỏa ra là

$$\begin{aligned} Q &= [M(^3\text{H}) + M(^2\text{H}) - M(^4\text{He}) - M(n)]c^2 \\ &= 3,01695 + 2,01471 - 4,00388 - 1,00896 \\ &= 0,01882 \text{ đvklnt } = 17,65 \text{ MeV}\,. \end{aligned}$$

Đặc trưng quan trọng nhất của lực hạt nhân trong trường hợp này là sự bão hòa, nghĩa là một nucleon chỉ tương tác với các nucleon ở gần nhất. Do đó, khi các tương tác hạt nhân của các nucleon ở tâm hạt nhân đã bão hòa, các tương tác của các nucleon trên bề mặt vẫn chưa đạt bão hòa. Vì vậy, do tỉ lệ số hạt nucleon ở bề mặt trên số hạt nucleon ở bên trong ở các hạt nhân nhẹ lớn hơn so với các hạt nhân nặng, năng lượng liên kết trung bình tính trên một nucleon ở hạt nhân nhẹ là nhỏ hơn so với hạt nhân nặng. Nói cách khác, các nucleon ở hạt nhân nhẹ liên kết lỏng lẻo hơn. Tuy nhiên, do ảnh hưởng của lực Coulomb bởi các proton gây ra, năng lượng liên kết trung bình tính trên một nucleon ở hạt nhân nặng nhỏ hơn so với hạt nhân trung bình.

2046

Trong những năm gần đây, R. Davis và các cộng sự đã và đang nghiên cứu các hạt nơtrino của mặt trời, trong đó thí nghiệm sử dụng detectơ là các thùng

chứa C_2Cl_4 đặt dưới mặt đất tại vùng mỏ Homestake. Ý tưởng ở đây là tìm kiếm các nguyên tử agon (A^{37}) được sinh ra trong phản ứng phân rã β biến đổi trong $Cl^{37}(\nu, e^-)Ar^{37}$. Phản ứng này là phản ứng có ngưỡng nhạy cảm với các nơtrino năng lượng thấp, là thành phần chính trong các nơtrino từ mặt trời phát ra. Người ta cho rằng, còn một phần nhỏ là các nơtrino năng lượng cao hơn cũng được phát ra từ mặt trời. Hằng số mặt trời (thông lượng năng lượng bức xạ trên trái đất) là $\sim 1\ kW/m^2$.

a) Mô tả sơ lược các phản ứng hạt nhân chính được giả thiết là nguyên nhân của sự sinh ra năng lượng trên mặt trời. Phản ứng nào là liên kết chậm trong dây chuyền? Xác định năng lượng trung bình của nơtrino được sinh ra trong dây chuyền. Thông lượng thành phần chính của nơtrino mặt trời trên trái đất là bao nhiêu?

(b) Mô tả sơ lược các phản ứng hạt nhân phụ được giả thiết là sinh ra thành phần năng lượng cao trong phổ nơtrino, thành phần được tìm kiếm trong thí nghiệm nói trên. Thảo luận một cách ngắn gọn về bản thân thí nghiệm, và những phát hiện cập nhật.

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Các phản ứng hạt nhân chính được cho là sinh ra năng lượng của mặt trời là

(1) $p + p \to d + e^+ + \nu_e$, $E_\nu = 0 - 0,42$ MeV ,

(2) $d + p \to {}^3\text{He} + \gamma$,

(3) ${}^3\text{He} + {}^3\text{He} \to {}^4\text{He} + 2p$,

Kết quả phản ứng là $4p \to {}^4\text{He} + 2e^+ + 2\nu_e + 26,7$ MeV.

Phản ứng (1) là liên kết chậm. Năng lượng chuyển thành nhiệt năng trong phản ứng là khoảng 25 MeV, phần còn lại là năng lượng các nơtrino. Do đó, năng lượng trung bình của một nơtrino là

$$E_\nu \approx (26,7 - 25)/2 \approx 0,85 \text{ MeV} .$$

Như vậy, mỗi 25 MeV năng lượng mặt trời tới trái đất kèm theo 2 nơtrino, do đó, thông lượng nơtrino mặt trời trên trái đất là

$$I = 2\left(\frac{1 \times 10^3}{25 \times 1,6 \times 10^{-13}}\right) = 5 \times 10^{14}\ m^{-2}s^{-1} .$$

(b) Các phản ứng phụ là

(1) ${}^3\text{He} + {}^4\text{He} \to {}^7Be + \gamma$,

(2) $^7Be + e^- \rightarrow {}^7\text{Li} + \nu_e$, $E_\nu = 0,478$ MeV(12%) và 0,861 MeV (88%),

(3) $^7\text{Li} + p \rightarrow 2^4\text{He}$,

(4) $^7Be + p \rightarrow {}^8B + \gamma$,

(5) $^8B \rightarrow 2^4\text{He} + e^+ + \nu_e$, $E_\nu \approx 0 \sim 17$ MeV.

Các nơtrino năng lượng cao được sinh ra trong phân rã của ^8B là những nơtrino được đo trong thí nghiệm trên.

Trong thí nghiệm của Davis và các cộng sự, một thùng chứa 390000 lít chất C_2Cl_4 được đặt tại một vị trí trong mỏ dưới độ sâu dưới mặt đất, để giảm phông bức xạ vũ trụ. Năng lượng ngưỡng của phản ứng giữa nơtrino mặt trời và Cl, $\nu_e + {}^{37}Cl \rightarrow e^- + {}^{37}Ar$, là 0,814 MeV. Khí Ar sinh ra sau đó phân rã theo cơ chế bắt electron, $e^- + {}^{37}Ar \rightarrow \nu_e + {}^{37}Cl$, năng lượng của electron Auger phát ra trong quá trình này là 2,8 keV. Chu kì bán rã của Ar là 35 ngày. Khí Ar được sinh ra, tích lũy trong thùng trong vài tháng, sau đó lấy ra và độ phóng xạ của nó được đo bằng ống đếm tỉ lệ, kết quả thu được chỉ bằng 1/3 so với tính toán lý thuyết. Đó là trường hợp nối tiếp về các "nơtrino mặt trời thiếu". Rất nhiều giả thuyết đã được đưa ra như: sai số thực nghiệm, lý thuyết sai, hay "sự dao động số nơtrino"....

2047

Một cách ước lượng thô sơ nhưng không phải không có lý, một sao nơtron là hình cầu chứa hầu như là các nơtron dạng khí Fermi suy biến không tương đối. Áp suất của khí Fermi cân bằng với lực hút hấp dẫn.

(a) Xác định bán kính của ngôi sao có khối lượng vào cỡ là 10^{33} g. (Do chỉ cần xác định con số thô, bạn chỉ phải đưa ra một giả thiết đơn giản như mật độ chuẩn, và xác định tích phân mà bạn không dễ dàng đánh giá.... Nên biết rằng dữ kiện để trả lời là không đầy đủ, bạn phải suy ra nó).

(b) Trong phòng thí nghiệm, các nơtron là không bền, phân rã theo phương trình $n \rightarrow p + e + \nu + 1$ MeV với thời gian sống là 1000 s.

Mô tả tóm tắt và định tính nhưng chính xác, tại sao chúng ta có thể coi sao nơtron được tạo nên gần như toàn bộ từ các nơtron, mà không phải là các

nơtron, proton và electron. (*Columbia*)

Lời giải:

(a) Gọi R là bán kính của sao nơtron. Thế năng hấp dẫn là

$$V_g = -\int_0^R \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \left(\frac{G}{r}\right) 4\pi r^2 \rho dr = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R},$$

trong đó $\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}$ là mật độ của khí, M là tổng khối lượng, G là hằng số hấp dẫn. Khi R tăng một lượng ΔR, ứng với áp suất P của khí có sự biến đổi năng lượng $\Delta W = P\Delta V = 4\pi PR^2\Delta R$. Vì $\Delta W = -\Delta V_g$, nên ta có

$$P = \frac{3GM^2}{20\pi R^4}.$$

Áp suất của khí Fermi suy biến hoàn toàn là

$$P = \frac{2}{5}NE_f,$$

trong đó $N = \frac{\rho}{M_n}$ là mật độ số nơtron, M_n là khối lượng nơtron,

$$E_f = \frac{\hbar^2}{2M_n}\left(\frac{9\pi}{4}\frac{M}{M_n R^3}\right)^{2/3}$$

là năng lượng giới hạn. Biểu thức của P trở thành

$$R = \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{GM_n^3}\left(\frac{M_n}{M}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \times \frac{(1,05\times 10^{-34})^2}{6,67\times 10^{-11}\times(1,67\times 10^{-27})^3} \times \left(\frac{1,67\times 10^{-27}}{10^{30}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 1,6\times 10^4\ m.$$

(b) Gọi d là khoảng cách giữa các nơtron lân cận nhau. Do $\frac{M}{M_n} \approx \left(\frac{2R}{d}\right)^3$, $d \approx 2R\left(\frac{M_n}{M}\right)^{\frac{1}{3}} = 4\times 10^{-15}$ m. Nếu electron tồn tại trong sao, độ lớn của quãng đường tự do trung bình của chúng phải cỡ d, và do đó độ lớn của động năng electron phải là $E \approx cp \sim c\hbar/d \sim 50$ MeV. Do mỗi nơtron khi phân rã chỉ giải phóng năng lượng là 1 MeV, và động năng của nơtron nhỏ hơn giá trị $E_f \approx 21$ MeV, không thể có electron trong sao nơtron do phân rã của nơtron,

nếu định luật bảo toàn năng lượng không bị vi phạm. Hơn nữa, do các nơtron rất gần nhau, electron và proton được sinh ra từ phân rã ngay lập tức lại kết hợp với nhau. Do đó, cũng không thể có các proton trong sao nơtron.

3. ĐƠTERON VÀ CÁC LỰC HẠT NHÂN (2048–2058)

2048

Nếu lực hạt nhân độc lập với điện tích và một nơtron cộng một proton tạo nên một liên kết, thì tại sao không có liên kết giữa hai nơtron? Thông tin được cung cấp ở đây cho ta biết gì về lực hạt nhân?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Một hệ gồm một nơtron và một proton có thể tạo ra trạng thái spin hoặc đơn bội hoặc bội ba. Trạng thái liên kết là trạng thái bội ba do mức năng lượng của trạng thái đơn bội là cao hơn. Một hệ gồm 2 nơtron có cùng mức năng lượng như vậy chỉ có thể tạo nên trạng thái spin đơn bội, và do đó không thể có liên kết. Điều này chỉ ra rằng lực hạt nhân phụ thuộc vào spin.

2049

Một đơteron khối lượng M có năng lượng liên kết $B(B \ll Mc^2)$ phân rã thành 1 nơtron và 1 proton khi hấp thụ tia gama có năng lượng E_γ. Tìm giá trị B/Mc^2 nhỏ nhất để phản ứng có thể xảy ra, ứng với tỉ số $(E_\gamma - B)$ thấp nhất.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Trong phân rã của đơteron, $E_\gamma - B$ nhỏ nhất khi E_γ bằng giá trị ngưỡng, tại giá trị đó các hạt sau phản ứng không chuyển động trong hệ quy chiếu khối tâm. Trong trường hợp này, năng lượng của photon tới trong hệ quy chiếu khối tâm của đơteron là $E^* = (m_n + m_p)c^2$.

Gọi M là khối lượng của hạt đơteron. Do $E^2 - p^2c^2$ là bất biến Lorentz và $B = (m_n + m_p - M)c^2$, ta có

$$(E_\gamma + Mc^2) - E_\gamma^2 = (m_n + m_p)^2c^4 \,,$$

nghĩa là,

$$2E_\gamma Mc^2 = [(m_n + m_p)^2 - M^2]c^4 = (B + 2Mc^2)B\,,$$

hay

$$E_\gamma - B = \frac{B^2}{2Mc^2}\,,$$

đó là giá trị $E_\gamma - B$ nhỏ nhất để phản ứng có thể xảy ra.

2050

Theo một bức tranh đơn giản, nơtron và proton trong đơteron tương tác với nhau thông qua giếng thế vuông có bề rộng $b = 1,9 \times 10^{-15}$ m và độ sâu $V_0 = 40$ MeV ở trạng thái $l = 0$.

(a) Tính xác suất để proton chuyển động trong vùng tác dụng của nơtron. Sử dụng ước lượng $m_n = m_p = M$, $kb = \frac{\pi}{2}$, trong đó $k = \sqrt{\frac{M(V_0-\varepsilon)}{\hbar^2}}$ và ε là năng lượng liên kết của đơteron.

(b) Tìm bán kính quân phương trung bình của đơteron.

(*SUNY, Buffalo*)

Lời giải:

Tương tác có thể được coi là xảy ra giữa hai hạt có khối lượng M, do đó khối lượng rút gọn $\mu = \frac{1}{2}M$. Thế năng là

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & r < b, \\ 0, & r > b, \end{cases}$$

trong đó r khoảng cách giữa nơtron và proton. Năng lượng của hệ là $E = -\varepsilon$.

Với trạng thái $l = 0$, hàm sóng là $\Psi = u(r)/r$. Phương trình Schrödinger là

$$u'' + \frac{2\mu}{\hbar^2}(E - V)u = 0$$

có thể viết thành

$$u'' + k^2 u = 0\,, \qquad r \le b\,,$$

$$u'' - k_1^2 u = 0\,, \qquad r > b\,,$$

trong đó

$$k = \sqrt{\frac{M(V_0 - \varepsilon)}{\hbar^2}}.$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{M\varepsilon}{\hbar^2}}.$$

Với điều kiện biên $\psi = 0$ tại $r = 0$ và $\psi =$ giá trị xác định tại $r = \infty$, chúng ta có $u(r) = A\sin(kr)$, $r \leq b$; $Be^{-k_1(r-b)}$, $r > b$.

Từ điều kiện liên tục của $\psi(r)$ và $\psi'(r)$ tại $r = b$, ta có

$$A\sin(kb) = B\,,$$

$$kA\cos(kb) = -k_1 B\,,$$

từ đó

$$\text{cotg }(kb) = -\frac{k_1}{k} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{V_0 - \varepsilon}}.$$

Nếu chúng ta lấy xấp xỉ $kb = \frac{\pi}{2}$, ta có $A \approx B$ và cotg $(kb) \approx 0$. Điều này tương đương với giả thiết $V_0 \gg \varepsilon$, hay là chỉ có một trạng thái được tìm thấy.

Để chuẩn hóa, coi

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^\infty |\psi(r)|^2 4\pi r^2 dr \\ &= 4\pi A^2 \int_0^b \sin^2(kr)dr + 4\pi B^2 \int_b^\infty e^{-2k_1(r-b)}d\gamma \\ &\approx 2\pi A^2 b\left(1 + \frac{1}{bk_1}\right). \end{aligned}$$

Như vậy

$$A \approx B \approx \left[2\pi b\left(1 + \frac{1}{bk_1}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

(a) Xác suất của proton chuyển động trong vùng của lực tác dụng của nơtron là

$$P = 4\pi A^2 \int_0^b \sin^2(kr)dr = \left(1 + \frac{1}{k_1 b}\right)^{-1}.$$

Do

$$k = \frac{\sqrt{M(V_0 - \varepsilon)}}{\hbar} \approx \frac{\pi}{2b}.$$

nghĩa là

$$\varepsilon \approx V_0 - \frac{1}{Mc^2}\left(\frac{\pi\hbar c}{2b}\right)^2$$

$$= 40 - \frac{1}{940}\left(\frac{\pi \times 1,97 \times 10^{-13}}{2 \times 1,9 \times 10^{-15}}\right)^2 = 11,8 \text{ MeV},$$

và

$$k_1 = \frac{\sqrt{Mc^2\varepsilon}}{\hbar c} = \frac{\sqrt{940 \times 11,8}}{1,97 \times 10^{-13}} = 5,3 \times 10^{14}\ m^{-1},$$

ta có

$$P = \left(1 + \frac{1}{5,3 \times 10^{14} \times 1,9 \times 10^{-15}}\right)^{-1} = 0,50.$$

(b) Bán kính quân phương của đơteron là

$$\overline{r^2} = \langle\Psi|r^2|\Psi\rangle_{r<b} + \langle\Psi|r^2|\Psi\rangle_{r>b}$$

$$= 4\pi A^2\left[\int_0^b \sin^2(kr)r^2dr + \int_b^\infty e^{-2k_1(r-b)}r^2dr\right]$$

$$= \frac{b^2}{1+\frac{1}{k_1 b}}\left[\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\right) + \frac{1}{k_1 b} + \frac{1}{(k_1 b)^2} + \frac{1}{2(k_1 b)^3}\right]$$

$$\approx \frac{b^2}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}+2,5\right) = 5,8 \times 10^{-30} m^2.$$

Như vậy

$$(\overline{r^2})^{\frac{1}{2}} = 2,4 \times 10^{-15}\ m.$$

2051

(a) Một nơtron và một proton có thể tham gia phản ứng bắt giữ ở trạng thái nghỉ: $p + n \to d + \gamma$. Tìm năng lượng của photon phát ra trong phản ứng bắt giữ này. Sự giật lùi của đơteron có quan trọng?

(b) Xác định năng lượng mà nơtron va chạm với proton ở trạng thái nghỉ phải có nếu phản ứng bắt giữ có bức xạ xảy ra với nơtron ở trạng thái p ($l = 1$) với xác suất hợp lý. Bán kính của đơteron $\sim 4 \times 10^{-13}$ cm.

$m_p = 1,00783$ đvklnt, $m_n = 1,00867$ đvklnt, $m_d = 2,01410$ đvklnt, 1 đvklnt $= 1,66 \times 10^{-24}$ g $= 931$ MeV, 1 MeV $= 1,6 \times 10^{-13}$ jun $= 1,6 \times 10^{-6}$ ec, $\hbar = 1,05 \times 10^{-25}$ ec.s.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Năng lượng được giải phóng trong phản ứng bắt giữ có bức xạ là

$$Q = [m_p + m_n - m_d]c^2 = 1,00783 + 1,00867 - 2,01410 \text{ đvklnt } = 2,234 \text{ MeV}.$$

Năng lượng được giải phóng dưới dạng động năng của photon và của đơteron giật lùi. Xung lượng tương ứng của chúng là $\boldsymbol{p}$ và $-\boldsymbol{p}$. Như vậy

$$Q = pc + \frac{p^2}{2m_d},$$

hay

$$(pc)^2 + 2m_dc^2(pc) - 2m_dc^2Q = 0.$$

Giải phương trình với ẩn (pc) ta có

$$pc = m_dc^2\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2Q}{m_dc^2}}\right).$$

Vì $Q/m_dc^2 \ll 1$, chúng ta có thể lấy xấp xỉ

$$p \approx m_dc\left(-1 + 1 + \frac{Q}{m_dc^2}\right) \approx \frac{Q}{c}.$$

Như vậy, động năng của đơteron giật lùi là

$$E_{\text{gl}} = \frac{p^2}{2m_d} = \frac{Q^2}{2m_dc^2} = \frac{2,234^2}{2 \times 2,0141 \times 931} = 1,33 \times 10^{-3} \text{ MeV}.$$

Do

$$\frac{\Delta E_{\text{gl}}}{E_\gamma} = \frac{1,34. \times 10^{-3}}{2,234} = 6,0 \times 10^{-4},$$

năng lượng của đơteron giật lùi không đáng kể để có thể ảnh hưởng đến năng lượng của photon phát ra, ảnh hưởng của nó chỉ khoảng 10^{-4}.

(b) Gọi vectơ chỉ phương của nơtron và proton tương ứng là $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$. Chuyển động của hệ có thể coi như một hạt có khối lượng $\mu = \frac{m_pm_n}{m_p+m_n}$, vectơ chỉ

phương $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, xung lượng $\mathbf{p}' = \mu\dot{\mathbf{r}}$ và động năng $T' = \frac{p'^2}{2\mu}$ trong hệ quy chiếu khối tâm. Năng lượng của hệ phòng thí nghiệm là

$$T = T' + \frac{1}{2}(m_p + m_n)\dot{\mathbf{R}}^2\,,$$

trong đó $\dot{\mathbf{R}} = (m_n\dot{\mathbf{r}}_1 + m_p\dot{\mathbf{r}}_2)/(m_n + m_p)$.

Ta có thể lấy xấp xỉ $m_p \simeq m_n$. Ban đầu $\dot{\mathbf{r}}_2 = 0$, do đó $\dot{\mathbf{R}} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}_1$, $T = \frac{m_n}{2}\dot{\mathbf{r}}_1^2 = \frac{p^2}{2m_n}$, trong đó $\mathbf{p} = m_n\dot{\mathbf{r}}_1$ là xung lượng của nơtron trong hệ phòng thí nghiệm. Thế vào biểu thức năng lượng ta được

$$\frac{p^2}{2m_n} = \frac{p'^2}{m_n} + \frac{p^2}{4m_n}\,,$$

hay

$$p^2 = 4p'^2\,.$$

Nơtron bị bắt ở trạng thái p, có giá trị riêng của momen động lượng là $\sqrt{1(1+1)}\hbar$. Coi bán kính đơteron a như là bán kính quỹ đạo, chúng ta có $p'a \approx \sqrt{2}\hbar$ và do đó động năng của nơtron trong hệ phòng thí nghiệm là

$$T = \frac{p^2}{2m_n} = \frac{2p'^2}{m_n} = \frac{4}{m_nc^2}\left(\frac{\hbar c}{a}\right)^2 = \frac{4}{940}\left(\frac{1,97\times 10^{-11}}{4\times 10^{-13}}\right)^2 = 10,32\ \text{MeV}\,.$$

2052

Xét phản ứng bắt nơtron - proton sinh ra đơteron và photon, $n + p \to d + \gamma$. Giả sử rằng các nucleon ban đầu không phân cực và động năng khối tâm T là nhỏ (chuyển động nhiệt). Nghiên cứu thực nghiệm của quá trình này cho thông tin về tán xạ proton – nơtron sóng - s, đặc biệt độ dài tán xạ đơn bội a_s. Hãy nhớ lại định nghĩa của độ dài tán xạ theo độ lệch pha: $k\text{cotg}\,\delta \to -1/a_s$, khi $k \to 0$. Coi đơteron ở trạng thái s.

(a) Mô tả tính đa cực chính của phản ứng (lưỡng cực điện? lưỡng cực từ? v.v.). Nêu lý do của bạn.

(b) Hãy chỉ ra rằng phản ứng bắt khi xảy ra ở năng lượng thấp sẽ dễ xảy ra hơn đối với spin đơn bội so với spin bội ba ở trạng thái ban đầu.

(c) Gọi B là năng lượng liên kết của đơteron và coi khối lượng nucleon là $m = m_p = m_n$ Hàm sóng không gian của đơteron thay đổi theo độ phân ly nơtron - proton r như thế nào trong trường hợp r là lớn?

(d) Trong trường hợp xấp xỉ, khi lực tương tác proton – nơtron chỉ có tác dụng trong khoảng cách ngắn, tiết diện phản ứng σ phụ thuộc vào T, B, a_s, m và các thông số phổ biến dưới dạng $\sigma = \sigma_0(T, B, m) f(a_s, B, m)$, trong đó f là đơn vị khi $a_s = 0$. Tính hệ số f khi $a_s \neq 0$.

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Do động năng trong hệ quy chiếu khối tâm của hệ $n - p$ là rất nhỏ, khả năng xảy ra ở trạng thái sóng s chỉ có khi $l = 0$. Xác suất của các trạng thái ban đầu khả dĩ là $^1S_0$: $\mathbf{s}_p + \mathbf{s}_n = 0$. Do $P(^1S_0) = 1$; ta có $J^p = 0^+$; với trạng thái $^3S_1$: $\mathbf{s}_p + \mathbf{s}_n = 1$. Do $P(^3S_1) = 1$, ta có $J^p = 1^+$. Trạng thái cuối cùng là đơteron, với $J^p = 1^+$, và do đó $S = 1$, $l = 0, 2$ (**Bài tập 2058(b)**). Trạng thái ban đầu có $l = 0$. Do đó, có hai khả năng chuyển mức ứng với $\Delta l = 0, 2$ và không có thay đổi nào về tính chẵn lẻ. Do đó, các phản ứng thuộc loại $M1$, $E2$.

(b) Đề cập đến hai kiểu chuyển như trên: $^1S_0 \to {}^3S_1$, và $^3S_1 \to {}^3S_1$. Do cả hai trạng thái ban đầu và cuối cùng của mỗi trường hợp có $l = 0$, chỉ những tương tác có bao gồm cả spin trong Haminton mới có thể gây chuyển dời. Với những toán tử này, để các nguyên tố ma trận chuyển dời không triệt tiêu, spin của một trong các nucleon phải thay đổi trong phản ứng. Từ đó

$$\text{với} \quad {}^3S_1 \to {}^3S_1, \quad \Delta l = 0, \quad \Delta S = 0,$$

$$\text{với} \quad {}^1S_0 \to {}^3S_1, \quad \Delta l = 0, \quad \Delta S \neq 0,$$

trạng thái ban đầu thỏa mãn điều kiện chuyển dời là trạng thái spin đơn lẻ $^1S_0$ bội của hệ $n - p$.

(c) Gọi khoảng cách tác dụng của lực nơtron – proton là a. Phương trình Schrödinger đối với sóng s là

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}(T - V)u = 0,$$

trong đó $u = rR(r)$, $R(r)$ là hàm sóng không gian của $\mu = \frac{m}{2}$, và V có thể lấy xấp xỉ là giếng thế vuông có chiều sâu B và độ rộng a:

$$V = \begin{cases} -B & \text{với} \quad 0 \leq r \leq a, \\ 0 & \text{với} \quad a < r. \end{cases}$$

Giải phương trình với r lớn, cho hàm sóng của đơteron trong không gian là

$$R(r) = \frac{A}{r}\sin(kr + \delta)$$

trong đó $k = \frac{\sqrt{mT}}{\hbar}$, A và δ là hằng số.

(d) Giải phương trình Schrödinger đối với sóng s

$$u = \begin{cases} A\sin(kr+\delta), & \text{với} \quad k = \dfrac{\sqrt{mT}}{\hbar}, \quad \text{khi } r \geq a, \\ A'\sin Kr, & \text{với} \quad K = \dfrac{\sqrt{m(T+B)}}{\hbar}, \quad \text{khi } r \leq a. \end{cases}$$

Sự liên tục của hàm sóng và đạo hàm bậc nhất của nó tại $r = a$ cho giá trị

$$\text{tg}\,(ka+\delta) = \frac{k}{K}\text{tg}\,Ka, \tag{1}$$

và như vậy

$$\delta = \text{arctg}\left(\frac{k}{K}\text{tg}\,Ka\right) - ka. \tag{2}$$

Tiết diện tán xạ là

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sin^2\delta.$$

Trong trường hợp $k \to 0$. Ta có $\delta \to \delta_0$, $K \to K_0 = \frac{\sqrt{mB}}{\hbar}$, và theo định nghĩa $a_s = -\frac{\text{tg}\,\delta_0}{k}$.

Với $k \to 0$, biểu thức (1) cho ta

$$ka + \text{tg}\,\delta_0 \approx \frac{k}{K_0}\text{tg}\,K_0a(1 - ka\text{tg}\,\delta_0) \approx \frac{k}{K_0}\text{tg}\,K_0a,$$

hay

$$ka - ka_s \approx \frac{k}{K_0}\text{tg}\,K_0a,$$

nghĩa là,

$$a_s \approx -a\left(\frac{\text{tg}\,K_0a}{K_0a} - 1\right).$$

Nếu $a_s = -\frac{\text{tg}\,\delta_0}{k} \to 0$, và $\delta_0 \to 0$ (k nhỏ nhưng xác định). Tiết diện tán xạ tương ứng là

$$\sigma_0 = \frac{4\pi}{k^2}\sin^2\delta_0 \approx \frac{4\pi}{k^2}\delta_0^2 = \frac{4\pi}{k^2}k^2a_s^2 = 4\pi a^2\left(\frac{\text{tg}\,K_0a}{K_0a} - 1\right)^2.$$

Như vậy

$$f(a_s, B, m) = \frac{\sigma}{\sigma_0} \approx \frac{\sin^2[\text{arctg}(\frac{k}{K}\text{tg } Ka) - ka]}{k^2a^2(\frac{\text{tg } K_0a}{K_0a} - 1)^2}$$

$$\approx \frac{\sin^2[\text{arctg}(\frac{k}{K}\text{tg } Ka) - ka]}{k^2a_s^2}.$$

2053

Cấu hình của liên kết duy nhất giữa hai nucleon xảy ra trong tự nhiên là hạt đơteron với momen động lượng toàn phần $J = 1$ và năng lượng liên kết là $-2,22$ MeV.

(a) Từ thông tin trên, hãy chỉ ra rằng lực liên kết $n - p$ phải phụ thuộc vào spin.

(b) Viết các trạng thái có thể có của momen động lượng của hạt đơteron trong sơ đồ liên kết LS. Những kết hợp chung nào của những trạng thái này có thể xảy ra? Hãy mô tả những kết hợp đó.

(c) Những trạng thái nào trong câu (b) bị loại do sự tồn tại của momen tứ cực của đơteron? Giải thích. Ngoài ra, những trạng thái nào bị loại bỏ nếu đơteron có trạng thái spin đồng vị thuần nhất $T = 0$?

(d) Tính momen từ của đơteron trong mỗi trạng thái hợp lệ trong câu (c), và so sánh với momen từ $\mu_d = 0,875\mu_N$, với μ_N là manheton hạt nhân.

(Chú ý: $\mu_p = 2,793\mu_N$ và $\mu_n = -1,913\mu_N$)

Các hệ số Clebsch – Gordan sau có thể sử dụng:

[Kí hiệu; $\langle J_1 J_2 M_1 M_2 | J_{\text{TOT}} M_{\text{TOT}}\rangle$]

$$\langle 2,1;2,-1|1,1\rangle = (3/5)^{1/2},$$

$$\langle 2,1;1,0|1,1\rangle = -(3/10)^{1/2},$$

$$\langle 2,1;0,1|1,1\rangle = (1/10)^{1/2}.$$

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Spin của đơteron tồn tại trong tự nhiên là $J = 1$. Do $\mathbf{J} = \mathbf{s}_n + \mathbf{s}_p + \mathbf{l}_p$, chúng ta có

với $|\mathbf{s}_n + \mathbf{s}_p| = 1$, $l = 0, 1, 2$, các trạng thái có thể ${}^3S_1 \cdot {}^3P_1, {}^3D_1$,

với $|\mathbf{s}_n + \mathbf{s}_p| = 0$, $l = 1$, các trạng thái có thể ${}^1P_1$.

Tuy nhiên, do không có trạng thái spin đơn bội bền vững $^1S_0$ được tìm thấy, ứng với n, p có spin đối song và $l = 0$, điều này nghĩa là khi n, p tương tác để tạo ra các trạng thái $S = 1$ và $S = 0$, một trạng thái là bền và một không bền, chứng tỏ sự phụ thuộc spin của lực hạt nhân.

(b) Như đã chỉ ra ở trên, trong liên kết LS, cấu hình có thể có là $^3S_1$, $^3D_1$ với trạng thái chẵn và $^3P_1$, $^1P_1$ với trạng thái lẻ.

Khi đơteron có trạng thái chẵn lẻ xác định, chỉ những trạng thái có cùng số chẵn lẻ mới có thể kết hợp. Như vậy

$$\Psi(n,p) = a^3S_1 + b^3D_1 \text{ hay } c^3P_1 + d^1P_1 \,,$$

trong đó a, b, c, d là các hằng số, là những kết hợp có thể tồn tại.

(c) $l = 1$ trong trạng thái P tương ứng với sự tịnh tiến khối tâm của hệ, và không sinh ra momen tứ cực điện. Do đó, sự tồn tại của momen tứ cực điện của đơteron loại bỏ sự kết hợp của các trạng thái P. Cũng vậy, theo nguyên lý Pauli, hàm sóng toàn phần của hệ $n - p$ phải phản đối xứng. Như vậy

$$\Psi(n,p) = \Psi_l(n,p)\Psi_s(n,p)\Psi_T(n,p) \,,$$

trong đó l, s, T chỉ các hàm sóng không gian, spin và spin đồng vị, khi $T = 0$ và do đó hàm sóng spin đồng vị là trao đổi phản đối xứng, sự kết hợp hàm sóng không gian và spin phải là trao đổi đối xứng. Điều này dẫn đến, nếu $l = 1$, thì $S = 0$; nếu $l = 0, 2$ thì $S = 1$. Quy tắc này loại bỏ trạng thái $^3P_1$. Như vậy, khi có sự tồn tại của momen tứ cực điện và spin đồng vị, đơteron chỉ có thể có trạng thái hỗn hợp $^3S_1$ và $^3D_1$.

(d) Với trạng thái $^3S_1$, $l = 0$, và phần quỹ đạo của hàm sóng không ảnh hưởng tới momen từ, chỉ phần spin là có ảnh hưởng. Khi $S = 1$, n và p có spin song song, và do đó

$$\mu(^3S_1) = \mu_p + \mu_n = (2,793 - 1,913)\mu_N = 0,88\mu_N \,.$$

Với trạng thái $^3D_1$, khi $m = 1$, hình chiếu của vectơ momen từ trên trục z cho ta giá trị của momen từ. Khai triển momen toàn phần $|1,1\rangle$ theo các trạng thái D, ta có

$$|1,1\rangle = \sqrt{\frac{3}{5}}|2,2,1,-1\rangle - \sqrt{\frac{3}{10}}|2,1,1,0\rangle + \sqrt{\frac{1}{10}}|2,0,1,1\rangle \,.$$

Đóng góp của momen từ ở trạng thái D như sau

$$\mu(^3D_1) = \left[\frac{3}{5}(g_l m_{l1} + g_s m_{s1}) + \frac{3}{10}(g_l m_{l2} + g_s m_{s2}) + \frac{1}{10}(g_l m_{l3} + g_s m_{s3})\right]\mu_N$$

$$= \left[\left(\frac{3}{5}m_{l1} + \frac{3}{10}m_{l2} + \frac{1}{10}m_{l3}\right) \times \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{5}m_{s1} + \frac{3}{10}m_{s2} + \frac{1}{10}m_{s3}\right) \times 0,88\right]\mu_N$$

$$= 0,31\mu_N\,.$$

Chú ý rằng $g_l = 1$ với proton và 0 với nơtron, $g_s = 5{,}5855$ với proton và $-3,8256$ với nơtron, và vì vậy với hệ hai hạt $g_l = \frac{1}{2}$ và $g_s = 0{,}88$ (**Bài tập 2056**).

Trong thực nghiệm $\mu_d = 0,857\mu_N$, đơteron phải ở trạng thái hỗn hợp của S và D. Gọi phần trạng thái D là x thì phần trạng thái S là $1 - x$. Biểu thức

$$0,88(1 - x) + 0,31x = 0,857\,,$$

cho ta giá trị $x \approx 0,04$, điều này có nghĩa là trạng thái của đơteron bao gồm 4% trạng thái $^3D_1$ và 96% trạng thái $^3S_1$.

2054

Xét hệ gồm hai nucleon không tương đối tính. Giả sử tương tác giữa hai hạt không phụ thuôc điện tích và số chẵn lẻ được bảo toàn.

(a) Bằng những giả thiết trên và nguyên lý Pauli, chỉ ra rằng S^2, bình phương của spin hệ hai nucleon, là một số lượng tử tốt.

(b) Spin đồng vị của hạt đơteron bằng bao nhiêu? Biện minh cho câu trả lời của bạn!

(c) Liệt kê tất cả các trạng thái của hệ hai nơtron với momen tổng cộng $J \leq 2$. Sử dụng kí hiệu $^{2S+1}X_J$ trong đó X là momen động lượng.

(*SUNY Buffalo*)

Lời giải:

(a) Xét toán tử trao đổi toàn phần của hệ $P = P'P_{12}$, ttrong đó P' là toán

tử phản xạ không gian hay số chẵn lẻ, P_{12} là toán tử trao đổi spin

$$P_{12} = \frac{1}{2}(1 + \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) = \mathbf{S}^2 - 1\,,$$

trong đó $\boldsymbol{\sigma}_i = 2\mathbf{s}_i (i = 1, 2)$, $\mathbf{S} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$, sử dụng các đơn vị trong đó $\hbar = 1$. Nguyên lý Pauli cho $[P, H] = 0$, và sự bảo toàn số chẵn lẻ cho $[P', H] = 0$. Do

$$\begin{aligned} 0 = [P, H] &= [P'P_{12}, H] = P'[P_{12}, H] + [P', H]P_{12} \\ &= P'[P_{12}, H] = P'[\mathbf{S}^2 - 1, H] = P'[\mathbf{S}^2, H]\,, \end{aligned}$$

ta có $[\mathbf{S}^2, H] = 0$, và do đó $\mathbf{S}^2$ là một số lượng tử tốt.

(b) Spin đồng vị của trạng thái cơ bản của hạt nhân luôn lấy giá trị nhỏ nhất có thể được. Với đơteron,

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_p + \mathbf{T}_n, \qquad T_z = T_{pz} + T_{nz} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0\,.$$

Với trạng thái cơ bản $T = 0$.

(c) Do $\mathbf{S} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$ và $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}$ số lượng tử S có thể là 1 và 0. Các trạng thái có thể với $J \leq 2$ là

$$S = 0\,, \qquad l = 0: \quad {}^1S_0\,,$$

$$S = 0\,, \qquad l = 1: \quad {}^1P_1\,,$$

$$S = 0\,, \qquad l = 2: \quad {}^1D_2\,,$$

$$S = 1\,, \qquad l = 0: \quad {}^3S_1\,,$$

$$S = 1\,, \qquad l = 1: \quad {}^3P_2, {}^3P_1, {}^3P_0\,,$$

$$S = 1\,, \qquad l = 2: \quad {}^3D_2, {}^3D_1\,,$$

$$S = 1\,, \qquad l = 3: \quad {}^3F_2\,,$$

Tuy nhiên, hệ hai nơtron đòi hỏi là phản đối xứng đối với sự trao đổi hạt. Như vậy, giá trị $(-1)^{l+S+1} = -1$, hay $l + S =$ là chẵn. Do đó, các trạng thái có thể là ${}^1S_0, {}^1D_2, {}^3P_2, {}^3P_1, {}^3P_0, {}^3F_2$.

2055

Xét thế năng giữa hai hạt nucleon. Bỏ qua các thành phần phụ thuộc vận tốc, hãy đưa ra dạng tổng quát nhất của thế năng tuân theo những định luật

bảo toàn bao hàm cả spin đồng vị. Hãy liệt kê mỗi định luật bảo toàn và chỉ ra những hệ quả của nó với thế năng.

(*Chicago*)

Lời giải:

(a) Bảo toàn động lượng – bất biến đối với sự tịnh tiến không gian.

Định luật này nghĩa là hàm thế chỉ phụ thuộc vào vị trí tương đối giữa hai nucleon $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$.

(b) Bảo toàn momen động lượng – bất biến đối với phép quay không gian liên tục: $\boldsymbol{x}' = \hat{R}\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{J}^{(i)\prime} = \hat{R}\boldsymbol{J}^{(i)}$, $i = 1, 2$, trong đó $\hat{R}$ là toán tử quay.

Những bất biến trong phép quay là 1, $\boldsymbol{x}^2$ $\boldsymbol{J}^{(i)} \cdot \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{J}^{(1)} \cdot \boldsymbol{J}^{(2)}$ và $[\boldsymbol{J}^{(1)} \times \boldsymbol{J}^{(2)}] \cdot \boldsymbol{x}$. Các số hạng cao hơn bậc một trong $\boldsymbol{J}^{(1)}$ hay trong $\boldsymbol{J}^{(2)}$ có thể giản ước thành $\boldsymbol{J}_i\boldsymbol{J}_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{J}_k$. Cũng như vậy với $(\boldsymbol{J}^{(1)} \times \boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{J}^{(2)} \times \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{J}^{(1)} \times \boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{J}^{(2)} \cdot \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{J}^{(1)} \cdot \boldsymbol{J}^{(2)})\boldsymbol{x}^2 - (\boldsymbol{J}^{(1)} \cdot \boldsymbol{x})(\boldsymbol{J}^{(2)} \cdot \boldsymbol{x})$.

(c) Bảo toàn tính chẵn lẻ – bất biến đối với phản xạ không gian $\boldsymbol{x}' = -\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{J}^{(i)\prime} = \boldsymbol{J}^{(i)}$, $i = 1, 2$.

Do x là vectơ có cực duy nhất, hàm thế chỉ có lũy thừa chẵn của x. Những bất biến khác là 1, $\boldsymbol{x}^2$, $\boldsymbol{J}^{(1)} \cdot \boldsymbol{J}^{(2)}$, $(\boldsymbol{J}^{(1)} \cdot \boldsymbol{x})(\boldsymbol{J}^{(2)} \cdot \boldsymbol{x})$.

(d) Bảo toàn spin đồng vị - bất biến quay trong không gian spin đồng vị

$$\boldsymbol{I}^{(i)\prime} = R_J\boldsymbol{I}^{(i)}, \qquad i = 1, 2\,.$$

Các bất biến là 1 và $\boldsymbol{I}^{(1)} \cdot \boldsymbol{I}^{(2)}$.

(e) Bảo toàn xác suất - Hamintonian là toán tử Hermite: $V^+ = V$.

Điều này ngụ ý giá trị thực của hệ số hàm thế, nghĩa là, $V_{sk}(r)$, trong đó $r = |\boldsymbol{x}|$ là thực. Như vậy

$$V(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{J}^{(1)}, \boldsymbol{J}^{(2)}, \boldsymbol{I}^{(1)}, \boldsymbol{I}^{(2)}) = V_a + \boldsymbol{J}^{(1)} \cdot \boldsymbol{J}^{(2)} V_b\,,$$

trong đó V_a và V_b có dạng

$$V_0(r) + V_1(r)\boldsymbol{J}^{(1)} \cdot \boldsymbol{J}^{(2)} + V_2(r)\frac{(\boldsymbol{J}^{(1)} \cdot \boldsymbol{x})(\boldsymbol{J}^{(2)} \cdot \boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}^2}\,,$$

khi các thành phần $V_{sk}(r)$ ($s = a, b$; $k = 0, 1, 2$) là các hàm thực.

(f) Bất biến đảo thời gian (đảo chuyển động)

$$V = U^{-1}V^*U, \qquad U^{-1}\boldsymbol{J}^*U = -\boldsymbol{J}\,.$$

Điều này không gây nên hạn chế mới nào với V.

Chú ý rằng V là đối xứng khi thay đổi $1 \leftrightarrow 2$ giữa hai nucleon.

2056

Dơteron ở trạng thái liên kết của một nơtron và một proton với momen động lượng toàn phần $J = 1$. Nó được biết là trạng thái hỗn hợp giữa trạng thái chủ yếu là S ($l = 0$) và một phần nhỏ trạng thái D ($l = 2$).

(a) Giải thích tại sao không có đóng góp của trạng thái P.

(b) Giải thích tại sao không có đóng góp của trạng thái G.

(c) Tính momen từ của hệ $n - p$ ở trạng thái D thuần nhất với $J = 1$. Giả sử spin của n và p lliên kết để tạo nên spin toàn phần **S** để sau đó liên kết với momen động lượng **L** để tạo nên momen động lượng toàn phần. Trình bày kết quả dưới dạng manheton hạt nhân. Momen từ của nơtron và proton tương ứng là 2, 79 và −1, 91 manheton hạt nhân.

(*CUSPEA*)

Lời giải:

(a) Trạng thái P có số chẵn lẻ ngược với các trạng thái S và D. Do số chẵn lẻ được bảo toàn trong các tương tác mạnh, các trạng thái có số chẵn lẻ đối nghịch nhau không thể kết hợp được. Do đó, trạng thái P không thể có đóng góp cùng với trạng thái S và D.

(b) Số lượng tử momen quỹ đạo của trạng thái G là $l = 4$. Nó không thể liên kết với hai spin $1/2$ để tạo nên $J = 1$. Vì vậy, trạng thái G không thể có đóng góp trong trạng thái có $J = 1$.

(c) Chúng ta có $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$,

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{[(g_L \mathbf{L} + g_s \mathbf{S}) \cdot \mathbf{J}]}{J(J+1)} \mathbf{J} \mu_0 ,$$

trong đó μ_0 là manheton hạt nhân. Theo định nghĩa

$$\mathbf{S} = \mathbf{s}_p + \mathbf{s}_n ,$$

$$\boldsymbol{\mu}_s = \frac{[(g_p \mathbf{s}_p + g_n \mathbf{s}_n) \cdot \mathbf{S}]}{S(S+1)} \mathbf{S} \mu_0 \equiv g_s \mathbf{S} \mu_0 ,$$

hay

$$g_s = \frac{g_p \mathbf{s}_p \cdot \mathbf{S} + g_n \mathbf{s}_n \cdot \mathbf{S}}{S(S+1)} .$$

Coi $\mathbf{s}_n = \mathbf{S} - \mathbf{s}_p$. Do $\mathbf{s}_n^2 = \mathbf{S}^2 + \mathbf{s}_p^2 - 2\mathbf{S}\cdot\mathbf{s}_p$, nên

$$\mathbf{S}\cdot\mathbf{s}_p = \frac{S(S+1) + s_p(s_p+1) - s_n(s_n+1)}{2} = 1\,,$$

vì $s_p = s_n = \frac{1}{2}$, $S = 1$ (với $J = 1$, $l = 2$). Tương tự ta có $\mathbf{S}\cdot\mathbf{s}_n = 1$. Vì vậy

$$g_s = \frac{1}{2}(g_p + g_n)\,.$$

Do nơtron không có điện tích, không có đóng góp vào momen từ quỹ đạo, hạt proton sinh ra toàn bộ momen từ nhưng chỉ đóng góp một nửa momen động lượng. Do đó $g_L = \frac{1}{2}$.

Thế g_s và g_L vào biểu thức của μ nhận được

$$\frac{\boldsymbol{\mu}}{\mu_0} = \frac{\frac{1}{2}(\mathbf{L}\cdot\mathbf{J}) + \frac{1}{2}(g_p + g_n)(\mathbf{S}\cdot\mathbf{J})}{J(J+1)}\mathbf{J}\,.$$

Do

$$\mathbf{L}\cdot\mathbf{J} = \frac{1}{2}[J(J+1) + L(L+1) - S(S+1)]$$
$$= \frac{1}{2}(1\times 2 + 2\times 3 - 1\times 2) = 3\,,$$
$$\mathbf{S}\cdot\mathbf{J} = \frac{1}{2}[J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)]$$
$$= \frac{1}{2}(1\times 2 + 1\times 2 - 2\times 3) = -1\,,$$
$$\frac{\boldsymbol{\mu}}{\mu_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{g_p + g_n}{2}\right)\mathbf{J}\,.$$

với $\mu_p = g_p s_p \mu_0 = \frac{1}{2} g_p \mu_0$, $\mu_n = g_n s_n \mu_0 = \frac{1}{2} g_n \mu_0$, ta có

$$\mu = \left(\frac{3}{4} - \frac{\mu_p + \mu_n}{2}\right)\mu_0 = \left(\frac{3}{4} - \frac{2,79 - 1,91}{2}\right)\mu_0 = 0,31\mu_0\,.$$

2057

(a) Hạt đơteron ($^2_1$H) có $J = 1\hbar$ và momen từ ($\mu = 0,857\mu_N$) xấp xỉ bằng tổng của momen từ proton và nơtron ($\mu_p = 2,793\mu_N$, và $\mu_n = -1,913\mu_N$). Từ

những dữ liệu trên có thể kết luận gì về chuyển động quỹ đạo và sự sắp xếp spin của nơtron và proton trong đơteron?

(b) Có thể giải thích gì về sự không bằng nhau giữa μ và $\mu_n + \mu_p$?

(c) Tại sao nơtron có thể có momen từ không bằng không?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Do $\mu \approx \mu_n + \mu_p$, chuyển động quỹ đạo của nơtron và proton không có đóng góp vào momen từ của đơteron. Điều này nghĩa là số lượng tử quỹ đạo $l = 0$. Do $J = 1$, spin của đơteron là 1 và nó nằm ở trạng thái $^3S_1$ được tạo bởi proton và nơtron có sắp xếp spin song song.

(b) Sự khác biệt giữa μ và $\mu_n + \mu_p$ không phải là do sai số thực nghiệm. Điều này được giải thích là nơtron và proton không nằm ở trạng thái $^3S_1$ thuần nhất, mà là trạng thái pha trộn giữa $^3S_1$ và $^3D_1$. Các giá trị thực nghiệm đúng với tỉ lệ trạng thái $^3D_1$ là khoảng 4

(c) Do nơtron có điện tích bằng 0, nó có cấu trúc bên trong. Theo cách nhìn hiện tại, hạt nơtron bao gồm 3 hạt quac có điện tích lẻ. Phân bố điện tích trong hạt nơtron không đối xứng và kết quả là momen từ của hạt không bằng không.

2058

Hạt đơteron được tạo thành từ một hạt nơtron và một hạt proton. Hamintonian trong hệ quy chiếu khối tâm có dạng

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + V_1(r) + \boldsymbol{\sigma}_p \cdot \boldsymbol{\sigma}_n V_2(r) + \left[\left(\boldsymbol{\sigma}_p \cdot \frac{\boldsymbol{x}}{r}\right)\left(\boldsymbol{\sigma}_n \cdot \frac{\boldsymbol{x}}{r}\right) - \frac{1}{3}(\boldsymbol{\sigma}_p \cdot \boldsymbol{\sigma}_n)\right] V_3(r),$$

trong đó $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_p$, $r = |\boldsymbol{x}|$, $\boldsymbol{\sigma}_p$ và $\boldsymbol{\sigma}_n$ là các ma trận Pauli đối với spin của proton và nơtron, μ là khối lượng rút gọn, và p là liên hợp với x.

(a) Momen động lượng toàn phần ($\mathbf{J}^2 = J(J+1)$) và số chẵn lẻ là những số lượng tử tốt. Hãy chỉ ra rằng nếu $V_3 = 0$, momen động lượng ($\mathbf{L}^2 = L(L+1)$) và spin toàn phần ($\mathbf{S}^2 = S(S+1)$)cũng là những số lượng tử tốt, với $\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}_p + \boldsymbol{\sigma}_n)$. Hãy chỉ ra nếu $V_3 \neq 0$, S vẫn là số lượng tử tốt.

(b) Hạt đơteron có $J = 1$ và số chẵn lẻ dương. Giá trị của L có thể là bao nhiêu? S bằng bao nhiêu?

(c) Giả sử V_3 như một nhiễu loạn nhỏ. Hãy chỉ ra rằng, ở giá trị bậc không ($V_3 = 0$) hàm sóng của trạng thái với $J_z = +1$ có dạng $\Psi_0(r)|\alpha, \alpha\rangle$, trong đó

$|\alpha,\alpha\rangle$ là trạng thái spin với $s_{pz} = s_{nz} = 1/2$. Tìm phương trình vi phân thỏa mãn hàm $\Psi_0(r)$?

(d) Thay đổi bậc nhất của năng lượng dưới dạng V_3 là bao nhiêu? Giả sử bậc nhất của hàm sóng có dạng

$$\Psi_0(r)|\alpha,\alpha\rangle + \Psi_1(\mathbf{x})|\alpha,\alpha\rangle + \Psi_2(\mathbf{x})(|\alpha,\beta\rangle + |\beta,\alpha\rangle) + \Psi_3(\mathbf{x})|\beta,\beta\rangle,$$

trong đó $|\beta\rangle$ là trạng thái có $s_z = -\frac{1}{2}$ và Ψ_0 là hàm sóng được xác định như trong câu (c). Bằng cách chọn ra phần phương trình Schrödinger có chứa phần bậc nhất của V_3 và tỉ lệ với $|\alpha,\alpha\rangle$, tìm phương trình vi phân thỏa mãn $\Psi_1(\mathbf{x})$. Tách riêng phần phụ thuộc góc của $\Psi_1(\mathbf{x})$ và viết ra phương trình vi phân phụ thuộc vào r của nó.

(MIT)

Lời giải:

(a) Chúng ta có $[\mathbf{L}^2, \boldsymbol{\sigma}_p \cdot \boldsymbol{\sigma}_n] = 0$, $[\mathbf{L}^2, V_i(r)] = 0$, $[\mathbf{S}^2, V_i(r)] = 0$, $[\mathbf{S}^2, \mathbf{p}^2] = 0$; $[\mathbf{S}^2, \boldsymbol{\sigma}_p \cdot \boldsymbol{\sigma}_n] = [\mathbf{S}^2, 2\mathbf{S}^2 - 3] = 0$ khi $\mathbf{S}^2 = \mathbf{s}_p^2 + \mathbf{s}_n^2 + 2\mathbf{s}_p \cdot \mathbf{s}_n = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_p \cdot \boldsymbol{\sigma}_n$;

$$\begin{aligned}
&\left[\mathbf{S}^2, 3\left(\boldsymbol{\sigma}_p \cdot \frac{\boldsymbol{x}}{r}\right)\left(\boldsymbol{\sigma}_n \cdot \frac{\boldsymbol{x}}{r}\right) - \boldsymbol{\sigma}_p \cdot \boldsymbol{\sigma}_n\right] \\
&= \left[\mathbf{S}^2, \frac{12(\mathbf{s}\cdot\mathbf{x})^2}{r^2} - 2\mathbf{S}^2 + 3\right] = \left[\mathbf{S}^2, \frac{12(\mathbf{s}\cdot\mathbf{x})^2}{r^2}\right] \\
&= \frac{12(\mathbf{s}\cdot\mathbf{x})}{r^2}[\mathbf{S}^2, \mathbf{s}\cdot\mathbf{x}] + [\mathbf{S}^2, \mathbf{s}\cdot\mathbf{x}]\frac{12(\mathbf{s}\cdot\mathbf{x})}{r^2} = 0
\end{aligned}$$

Do

$$\frac{(\boldsymbol{\sigma}_p \cdot \mathbf{x})}{r}\frac{(\boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{x})}{r} = \frac{4}{r^2}(\mathbf{s}_p \cdot \mathbf{x})(\mathbf{s}_n \cdot \mathbf{x}) = \frac{4}{r^2}(\mathbf{s}\cdot\mathbf{x})^2;$$

$[\mathbf{L}^2, \mathbf{p}^2] = \mathbf{L}[\mathbf{L}, \mathbf{p}^2] + [\mathbf{L}, \mathbf{p}^2]\mathbf{L} = 0$ khi $[l_\alpha, \mathbf{p}^2] = 0$.

Trong trường hợp nếu $V_3 = 0$, $[\mathbf{L}^2, H] = 0$, $[\mathbf{S}^2, H] = 0$, và momen động lượng và spin toàn phần đều là các số lượng tử tốt. Nếu $V_3 \neq 0$, do $[\mathbf{S}^2, H] = 0$, S vẫn là số lượng tử tốt.

(b) Với trường hợp số chẵn lẻ là dương, giá trị có thể của L là 0, 2 và do đó giá trị của S là 1.

(c) Nếu $V_3 = 0$, Hamintonian là đối xứng xuyên tâm. Thế tương tác đối xứng này của proton và nơtron dẫn đến trạng thái S ($L = 0$). Trạng thái S đơteron có lẫn trạng thái D nếu kể đến nhiễu loạn V_3.

Trong trường hợp $V_3 = 0$, $L = 0$, $S = 1$ và $S_z = 1$, do đó $J_z = +1$ và hàm sóng có dạng $\Psi_0(r)|\alpha,\alpha\rangle$. Xét

$$\begin{aligned} H\Psi_0(r)|\alpha,\alpha\rangle &= \left[-\frac{\nabla^2}{2\mu} + V_1(r) + (2\mathbf{S}^2 - 3)V_2(r)\right]\Psi_0(r)|\alpha,\alpha\rangle \\ &= \left[-\frac{\nabla^2}{2\mu} + V_1(r) + V_2(r)\right]\Psi_0(r)|\alpha,\alpha\rangle \\ &= E_c\Psi_0(r)|\alpha,\alpha\rangle \end{aligned}$$

chú ý rằng $2S^2 - 3 = 2.1.2 - 3 = 1$. Như vậy hàm $\Psi_0(r)$ thỏa mãn

$$\left[-\frac{\nabla^2}{2\mu} + V_1(r) + V_2(r) - E_c\right]\Psi_0(r) = 0\,,$$

hay

$$-\frac{1}{2\mu}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}[r^2\Psi_0'(r)] + [V_1(r) + V_2(r) - E_c]\Psi_0(r) = 0\,,$$

nghĩa là,

$$-\frac{1}{2\mu}\Psi_0''(r) - \frac{1}{\mu r}\Psi_0'(r) + [V_1(r) + V_2(r) - E_c]\Psi_0(r) = 0\,.$$

(d) Gọi S_{12} là hệ số của $V_3(r)$,

$$\begin{aligned} H &= -\frac{\nabla^2}{2\mu} + V_1(r) + (2\mathbf{S}^2 - 3)V_2(r) + S_{12}V_3(r) \\ &= -\frac{\nabla^2}{2\mu} + V_1(r) + V_2(r) + S_{12}V_3(r)\,, \end{aligned}$$

do đó

$$\begin{aligned} H\Psi = &\left(-\frac{\nabla^2}{2\mu} + V_1 + V_2\right)\Psi_0(r)|\alpha,\alpha\rangle + \left(-\frac{\nabla^2}{2\mu} + V_1 + V_2\right)[\Psi_1|\alpha,\alpha\rangle \\ &+ \Psi_2(|\alpha,\beta\rangle + |\beta,\alpha\rangle) + \Psi_3|\beta,\beta\rangle] + S_{12}V_3\Psi_0|\alpha,\alpha\rangle \\ = &\,E_c\Psi_0(r)|\alpha,\alpha\rangle + E_c[\Psi_1|\alpha,\alpha\rangle + \Psi_2(|\alpha,\beta\rangle \\ &+ |\beta,\alpha\rangle) + \Psi_3|\beta,\beta\rangle] + \Delta E\Psi_0(r)|\alpha,\alpha\rangle\,, \end{aligned}$$

trong đó

$$S_{12}V_3\Psi_0(r)|\alpha,\alpha\rangle = [(\sigma_{pz}\cos\theta\cdot\sigma_{nz}\cos\theta)|\alpha,\alpha\rangle - \frac{1}{3}|\alpha,\alpha\rangle]V_3\Psi_0(r) + \cdots$$
$$= \left(\cos^2\theta - \frac{1}{3}\right)V_3\Psi_0(r)|\alpha,\alpha\rangle + \cdots ,$$

phần không tỉ lệ với $|\alpha,\alpha\rangle$ đã bỏ qua.

Chọn ra phần phương trình Schrodinger có chứa phần bậc nhất theo V_3 và tỉ lệ với $|\alpha,\alpha\rangle$, ta có

$$\left(-\frac{\nabla^2}{2\mu} + V_1 + V_2\right)\Psi_1(\mathbf{x}) + \left(\cos^2\theta - \frac{1}{3}\right)V_3\Psi_0(r) = E_c\Psi_1(\mathbf{x}) + \Delta E\Psi_0(r) .$$

Như vậy, phần phụ thuộc góc của hàm $\Psi_1(\mathbf{x})$ là

$$Y_{20} = 3\left(\frac{5}{16\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\cos^2\theta - \frac{1}{3}\right) ,$$

vì ứng với trạng thái $|\alpha,\alpha\rangle$, $S_z = 1$ và do đó $L_z = 0$, nghĩa là phần phụ thuộc góc của hàm sóng là Y_{20}. Như vậy, ta có

$$-\frac{1}{2\mu}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Psi_1(r)}{dr}\right) + V_1(r)\Psi_1(r) + V_2(r)\Psi_2(r)$$
$$+ \frac{l(l+1)}{r^2}\Psi_1(r) + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{16\pi}{5}}V_3\Psi_0(r)$$
$$= E_c\Psi_1(r) + \Delta E\Psi_0(r)$$

với $\Psi_1(\mathbf{x}) = \Psi_1(r)Y_{20}$, $l = 2$, hay

$$-\frac{1}{2\mu}\Psi_1''(r) - \frac{1}{\mu r}\Psi_1'(r) + \left[V_1(r) + V_2(r) + \frac{6}{r^2} - E_c\right]\Psi_1(r)$$
$$+ \left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{16\pi}{5}}V_3 - \Delta E\right)\Psi_0(r) = 0$$

với

$$\Delta E = \left(\cos^2\theta - \frac{1}{3}\right)V_3 .$$

4. CÁC MẪU HẠT NHÂN (2059–2075)

2059

Những đặc trưng chính của các mẫu giọt chất lỏng, mẫu vỏ, mẫu tập thể của hạt nhân? Chỉ ra những tính chất nào của hạt nhân được dự đoán đúng bởi mỗi mẫu, và cách ứng dụng các mẫu ấy như thế nào.

(*Columbia*)

Lời giải:

Một kinh nghiệm thực tế cho thấy, năng lượng liên kết trên một nucleon của hạt nhân (B) và mật độ vật chất hạt nhân gần như độc lập với số khối A. Điều này tương tự với giọt chất lỏng có nhiệt hóa hơi và mật độ không phụ thuộc vào kích thước giọt. Cộng thêm những bổ chính của năng lượng bề mặt, năng lượng đẩy Coulomb, năng lượng ghép cặp, năng lượng đối xứng, chúng ta thu được mẫu giọt chất lỏng. Mẫu này cho ta mối quan hệ giữa A và Z của các hạt nhân bền, nghĩa là đường cong bền với phân rã β phù hợp thực nghiệm. Hơn nữa, mẫu này đã mô tả được tại sao các nguyên tố ^{43}Te, ^{61}Pm lại không có đồng vị khối số bền với phân rã β. Nếu ta coi bán kính hạt nhân là một tham số thay đổi được trong các hệ số công thức – khối lượng $a_{\text{bề mặt}}$ và $a_{\text{thể tích}}$ và làm khớp khối lượng với giá trị thực nghiệm, chúng ta sẽ thấy rằng bán kính hạt nhân ngoại suy là rất phù hợp với những giá trị thu được bằng các phương pháp khác. Do đó, đường cong năng lượng liên kết riêng được mô tả rất tốt bởi mẫu giọt.

Sự tồn tại của các số thần kì chỉ ra rằng các hạt nhân có cấu trúc bên trong. Điều này dẫn tới mẫu vỏ hạt nhân tương tự với mẫu nguyên tử, là mẫu giải thích rất tốt sự bền vững đặc biệt của các hạt nhân có số magic. Mẫu vỏ đòi hỏi:

(1) sự tồn tại của trường trung bình, với hạt nhân hình cầu là một trường đối xứng tâm.

(2) mỗi nucleon trong hạt nhân chuyển động độc lập nhau.

(3) số nucleon trên một mức năng lượng bị giới hạn theo nguyên lý Pauli.

(4) sự liên kết spin – quỹ đạo xác định các mức năng lượng.

Spin và số chẵn lẻ của trạng thái cơ bản có thể được dự đoán bằng mẫu vỏ.

Với các hạt nhân chẵn – chẵn, spin và số chẵn lẻ của trạng thái cơ bản được dự đoán là 0^+, đã được kiểm chứng bằng thực nghiệm trong tất cả các trường hợp. Sự dự đoán dựa trên thực tế là thông thường spin và số chẵn lẻ bằng 0^+ khi các nơtron và proton tạo cặp riêng biệt. Những dự đoán về spin và số chẵn lẻ của trạng thái cơ bản của các hạt nhân A lẻ hầu hết đều phù hợp với thực nghiệm. Một số tính chất xác định của hạt nhân lẻ - lẻ cũng có thể dự đoán được. Đặc biệt, sự tồn tại của các số thần kì phân bố ứng với các lớp vỏ đầy.

Tuy nhiên mẫu vỏ không thể giải quyết được tất cả các vấn đề hạt nhân. Nó khá thành công trong việc giải thích sự tạo thành của các hạt nhân bằng cách thêm vào một hay vài nucleon vào lớp vỏ đầy (các hạt nhân cầu), bởi hạt nhân ở trạng thái này vẫn gần như là cầu. Nhưng với các hạt nhân nằm giữa hai hạt nhân có các lớp vỏ đầy, nó không còn là cầu và chuyển động tập thể của một số nucleon trở nên quan trọng hơn. Ví dụ, các giá trị thực nghiệm của momen tứ cực hạt nhân lớn hơn rất nhiều lần so với giá trị tính toán được từ một hạt đơn lẻ chuyển động trong một trường đối xứng tâm của hạt nhân có lớp vỏ đầy. Điều này dẫn đến mẫu tập thể, là mẫu bằng việc quan tâm đến chuyển động tập thể của các nucleon, cho ra được các mức năng lượng dao động và quay ứng với các hạt nhân trong vùng $60 < A < 150$ và $190 < A < 220$, $150 < A < 190$ và $A > 220$ tương ứng.

2060

Trình bày sơ lược về những luận cứ thực nghiệm chính dẫn tới lớp vỏ để mô tả các trạng thái hạt nhân. Cho một vài ví dụ về các hạt nhân có các lớp vỏ đầy và chỉ ra những lớp vỏ nào đầy.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Những chứng cứ thực nghiệm chính ủng hộ cho mẫu vỏ hạt nhân là sự tồn tại của các số thần kì. Khi số nơtron hoặc proton trong hạt nhân là 2, 8, 20, 50, 82, 126 (với riêng nơtron), thì hạt nhân rất bền vững. Trong tự nhiên, độ phổ biến của các hạt nhân có số thần kì lớn hơn rất nhiều lần so với các số lân cận. Trong tất cả các hạt nhân bền, những hạt nhân có số nơtron là 20, 28, 50 và 82 có nhiều isoton hơn các hạt nhân lân cận, các hạt nhân có số proton là 8, 20, 28, 50 và 82 cũng có nhiều đồng vị bền hơn các hạt nhân lân cận. Khi số nơtron hoặc số proton trong hạt nhân bằng số thần kì, năng lượng liên kết đo được bằng thực nghiệm khác hơn rất nhiều so với giá trị thu được từ mẫu giọt. Sự tồn tại của các số magic ngụ ý rằng có sự tồn tại của cấu trúc vỏ bên

trong hạt nhân, tương tự như các mức năng lượng của electron trong nguyên tử.

^4He là hạt nhân hai lần thần kì; số proton và nơtron của nó đều lấp đầy lớp vỏ chính đầu tiên. ^{16}O cũng là hạt nhân hai lần thần kì, số proton và nơtron của nó đều lấp đầy lớp vỏ chính đầu tiên và thứ hai. ^{208}Pb là hạt nhân hai lần thần kì, số proton của nó lấp đầy tới hết lớp vỏ thứ 6, số nơtron lấp đầy tới hết lớp vỏ thứ 7. Như vậy, những hạt nhân này đều có các lớp vỏ đầy.

2061

(a) Trình bày mẫu vỏ hạt nhân chuẩn. Nói riêng, mô tả những lớp vỏ liên tiếp theo những số hạng hạt riêng lẻ mô tả vỏ, nghĩa là, số lượng tử chính n, số lượng tử momen quỹ đạo l, và số lượng tử momen quỹ đạo toàn phần j (những kí hiệu phổ được dùng ở đây, ví dụ: $2s_{1/2}, 1p_{3/2}$, v.v.). Trình bày sơ lược về những luận chứng ủng hộ mẫu vỏ.

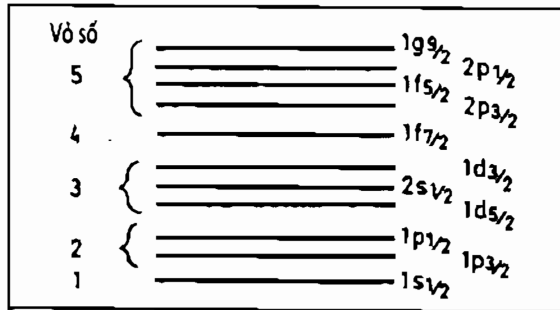
(b) Xét một mức hạt nhân có lớp vỏ đầy được thêm vào một proton trong trạng thái có số lượng tử quỹ đạo l và j. Tất nhiên là $j = l \pm 1/2$. Gọi g_p là tỉ số từ hồi chuyển của proton tự do. Tính tỉ số hồi chuyển với mức trên ứng với cả hai trường hợp $j = l + 1/2$ và $j = l - 1/2$.

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Những ý tưởng cơ bản của việc xây dựng mẫu vỏ như sau. Thứ nhất, chúng ta giả sử mỗi nucleon chuyển động trong một trường trung bình là tổng của của tất cả các tương tác do các nucleon khác tác dụng lên nó. Với những hạt nhân có dạng gần như cầu, trường trung bình có thể được coi là trường xuyên tâm. Thứ hai, chúng ta giả sử những mức năng lượng thấp trong hạt nhân được các nucleon điền đầy theo nguyên lý Pauli. Do va chạm giữa các nucleon không gây ra sự chuyển dịch hay thay đổi trạng thái của chúng, tất cả các nucleon có thể duy trì

trạng thái chuyển động của chúng, nghĩa là chúng chuyển động độc lập với nhau trong hạt nhân. Ta có thể lấy một trường thế xuyên tâm trung bình là giếng thế Woods – Saxon tương thích với những đặc trưng của tương tác giữa các nucleon, và nhận được các mức năng lượng bằng lý thuyết cơ lượng tử. Xem xét các tương tác spin – quỹ đạo, ta nhận được các mức năng lượng của hạt đơn lẻ, những mức mà được điền đầy dần bằng từng nucleon một (hình 2.11). Chú ý rằng mỗi mức có độ suy biến là $2j + 1$. Như vậy, với 5 lớp vỏ đầu tiên, tổng số proton hay nơtron là 2, 8, 20, 28 và 50.



Hình 2.11

Những luận cứ thực nghiệm chính của việc xây dựng lớp vỏ là sự tồn tại của các số thần kì. Giống như các electron trên lớp vỏ nguyên tử, nếu số nơtron hoặc proton trong nguyên tử bằng "số thần kì" nào đó (2, 8, 20, 28, 50, hay 82), hạt nhân sẽ bền vững hơn rất nhiều, năng lượng liên kết và độ phổ biến lớn hơn rất, và có nhiều đồng vị hơn.

(b) Theo mẫu vỏ, momen toàn phần của các nucleon trong các lớp vỏ đầy bằng 0, do đó momen từ bằng 0. Điều này nghĩa là momen từ và momen động lượng của hạt nhân được xác định bởi các proton riêng lẻ ở lớp vỏ ngoài cùng.

Do

$$\boldsymbol{\mu}_j = \boldsymbol{\mu}_l + \boldsymbol{\mu}_s .$$

nghĩa là,

$$g_j \mathbf{j} = g_l \mathbf{l} + g_s \mathbf{s} ,$$

ta có

$$g_j \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = g_l \mathbf{l} \cdot \mathbf{j} + g_s \mathbf{s} \cdot \mathbf{j} .$$

Với

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{j} = \frac{1}{2}(\mathbf{j}^2 + \mathbf{l}^2 - \mathbf{s}^2) = \frac{1}{2}[j(j+1) + l(l+1) - s(s+1)] ,$$

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{j} = \frac{1}{2}(\mathbf{j}^2 + \mathbf{s}^2 - \mathbf{l}^2) = \frac{1}{2}[j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)] ,$$

ta có

$$g_j = g_l \frac{j(j+1) + l(l+1) - s(s+1)}{2j(j+1)} + g_s \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)} .$$

Đối với proton, $g_l = 1$, $g_s = g_p$, tỉ số từ hồi chuyển đối với proton tự do $(l = 0, j = s)$, $s = \frac{1}{2}$. Do đó ta có

$$g_j = \begin{cases} \dfrac{2j-1}{2j} + \dfrac{g_p}{2j} & \text{với } j = l + 1/2\,, \\ \dfrac{1}{j+1}\left(j + \dfrac{3}{2} - \dfrac{g_p}{2}\right) & \text{với } j = l - 1/2\,. \end{cases}$$

2062

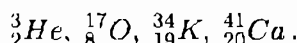
Các mức năng lượng của một dao tử điều hòa đẳng hướng 3 chiều được cho như sau

$$E = (2n + l + 3/2)\hbar\omega = \left(N + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega\,.$$

Để áp dụng cho mẫu hạt nhân của một hạt riêng lẻ $\hbar\omega$ được tính bằng $44A^{-\frac{1}{3}}$ MeV.

(a) Bằng cách đưa các bổ chính cho các mức năng lượng của dao động tử, hãy liên hệ các mức có $N \leq 3$ với sơ đồ mức mẫu vỏ của hạt riêng lẻ. Vẽ sơ đồ mức năng lượng liên hệ các mức năng lượng trong mẫu vỏ với các mức của dao động tử không nhiễu loạn.

(b) Sử dụng mẫu vỏ, hãy dự đoán spin và số chẵn lẻ của trạng thái cơ bản của những hạt nhân sau:



$${}^{3}_{2}He,\ {}^{17}_{8}O,\ {}^{34}_{19}K,\ {}^{41}_{20}Ca\,.$$

(c) Các sự chuyển dời lưỡng cực điện mạnh nói chung không xảy ra khi hạt nhân nằm ở trạng thái kích thích đầu tiên có năng lượng 5 MeV cao hơn mức cơ bản. Sử dụng mẫu hạt đơn lẻ, hãy giải thích hiện tượng này và dự đoán năng lượng kích thích của cộng hưởng hạt nhân lưỡng cực khổng lồ. (*Princeton*)

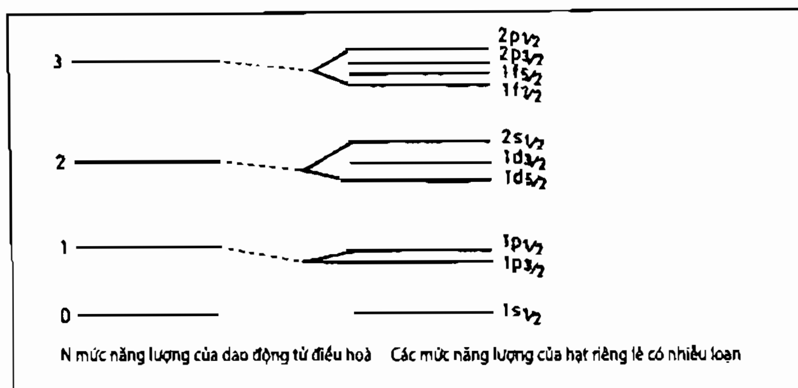
Lời giải:

(a) Sử dụng liên kết LS, chúng ta có sự tách các mức năng lượng của một dao động tử điều hòa như trên hình 2.12.

(b) Theo hình 2.12 ta có

${}^{3}_{2}$He: Hạt nucleon cuối cùng không cặp đôi là nơtron ở trạng thái $1s_{\frac{1}{2}}$, do đó $J^\pi = (1/2)^+$.

${}^{17}_{8}$O: Hạt nucleon cuối cùng không cặp đôi là nơtron ở trạng thái $1d_{5/2}$, do đó



Hình 2.12

$J^\pi = (5/2)^+$.

$^{34}_{19}$K: Hai hạt nucleon cuối cùng không cặp đôi là proton ở trạng thái $2s_{\frac{1}{2}}$ và nơtron ở trạng thái $1d_{3/2}$, do đó $J^\pi = 1^+$.

$^{41}_{20}$Ca: Hạt nucleon cuối cùng không cặp đôi là nơtron ở trạng thái $1f_{7/2}$, do đó $J^\pi = (7/2)^-$.

(c) Các quy tắc lựa chọn cho chuyển dời lưỡng cực điện là

$$\Delta J = J_f - J_i = 0, 1, \qquad \Delta\pi = -1,$$

trong đó J là spin hạt nhân, π là số chẵn lẻ của hạt nhân. Do $\hbar\omega = 44A^{-\frac{1}{3}}$ MeV, $\hbar\omega > 5$ MeV đối với hạt nhân. Khi N tăng thêm 1, mức năng lượng tăng $\Delta E = \hbar\omega > 5$ MeV. Điều này nghĩa là những trạng thái kích thích lớn hơn mức cơ bản chưa tới 5 MeV có cùng số N và số chẵn lẻ như của trạng thái sau. Vì chuyển dời lưỡng cực điện đòi hỏi $\Delta\pi = -1$, những trạng thái này không thể liên hệ với trạng thái cơ bản thông qua chuyển dời lưỡng cực điện. Tuy nhiên, trong liên kết LS, sự chênh lệch năng lượng giữa các mức có N khác nhau có thể nhỏ hơn 5 MeV, đặc biệt đối với hạt nặng, do đó chuyển dời lưỡng cực điện vẫn có thể xảy ra.

Cộng hưởng hạt nhân lưỡng cực khổng lồ có thể coi là hiện tượng trong đó photon tới tách rời các proton và nơtron trong hạt nhân, tăng thế năng và làm cho hạt nhân dao động. Hấp thụ cộng hưởng xảy ra khi tần số của photon

bằng tần số cộng hưởng của hạt nhân.

2063

Trong một số trường hợp gần đúng, một hạt nhân khối lượng trung bình có thể được coi là có thế năng đáy phẳng với biên cố định. Để đơn giản bức tranh ở mức cao hơn, ta mô hình hóa một hạt nhân như một khối hộp ba chiều có cạnh bằng đường kính hạt nhân. Coi hạt nhân sắt-56 có 28 proton và 28 notron. Xác định động năng của nucleon có năng lượng cao nhất. Cho đường kính hạt nhân là 10^{-12} cm.

(*Columbia*)

Lời giải:

Thế năng của nucleon có thể được viết như sau

$$V(x,y,z) = \begin{cases} \infty, & |x|, |y|, |z| > \frac{a}{2}, \\ 0, & |x|, |y|, |z| < \frac{a}{2}, \end{cases}$$

trong đó a là đường kính hạt nhân. Giả sử phương trình Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(x,y,z) + V(x,y,z)\Psi(x,y,z) = E\Psi(x,y,z)$$

có thể tách biến bằng cách đặt $\Psi(x,y,z) = \Psi(x)\Psi(y)\Psi(z)$. Thế vào phương trình, thu được

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx_i^2}\Psi(x_i) + V(x_i)\Psi(x_i) = E_i\Psi(x_i),$$

với

$$V(x_i) = \begin{cases} \infty, & |x_i| > \frac{a}{2}, \\ 0, & |x_i| < \frac{a}{2}, \end{cases}$$

$i = 1, 2, 3$; $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $E = E_1 + E_2 + E_3$.

Giải phương trình ta được

$$\Psi(x_i) = A_i \sin(k_i x_i) + B_i \cos(k_i x_i)$$

với $k_i = \frac{\sqrt{2mE_i}}{\hbar}$. Từ điều kiện biên $\Psi(x_i)|_{x_i=\pm\frac{a}{2}} = 0$ cho ta

$$\Psi(x_i) = \begin{cases} A_i \sin\left(\frac{n\pi}{a}x_i\right), & \text{với } n \text{ chẵn}, \\ B_i \cos\left(\frac{n\pi}{a}x_i\right), & \text{với } n \text{ lẻ}, \end{cases}$$

và do đó

$$E_{xi} = \frac{k_{xi}^2\hbar^2}{2m} = \frac{\pi^2 n_{xi}^2 \hbar^2}{2ma^2}, \quad n_x = 1, 2, 3, \ldots . \tag{2.1}$$

$$E = E_0(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) . \tag{2.2}$$

trong đó

$$E_0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} = \frac{\pi^2(c\hbar)^2}{2mc^2 \cdot a^2} = \frac{\pi^2(1,97 \times 10^{-11})^2}{2 \times 939 \times 10^{-24}} = 2,04 \text{ MeV} .$$

Theo nguyên lý Pauli, mỗi trạng thái có thể chứa một cặp proton và một cặp nơtron, như ở bảng dưới đây.

(n_x, n_y, n_z)	Số các trạng thái	Số các nucleon	E
(111)	1	4	$3E_0$
(211) (121) (112)	3	12	$6E_0$
(221) (122) (212)	3	12	$9E_0$
(311) (131) (113)	3	12	$11E_0$
(222)	1	4	$12E_0$
(123) (132) (231) (213) (312) (321)	6	24	$14E_0$

Với ^{56}Fe, $E_{\max} = 14E_0 = 2,04 \times 14 = 28,6$ MeV.

2064

Các hạt nhân nhẹ trong mẫu vỏ.

(a) Sử dụng mẫu vỏ của dao động tử điều hòa, mô tả cấu hình của trạng thái cơ bản trong các hạt nhân nhẹ bền có $A \leq 4$, cùng với những số lượng tử toàn phần L, S, J, T và số chẵn lẻ.

(b) Với ^{4}He, có thể tìm thấy một lượng tử dao động điều hòa của mức năng lượng kích thích ở những trạng thái nào?

(c) Kiểu phân rã phóng xạ nào là có thể đối với những trạng thái ấy?

(d) Có thể tìm thấy ^{1}H ở trạng thái nào trong những trạng thái trên? ^{4}Be ở trạng thái nào?

(e) ^{4}He có thể bị kích thích lên trạng thái nào trong tán xạ hạt α không đàn hồi? Và trạng thái nào trong tán xạ proton không đàn hồi?

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Theo hình 2.11 chúng ta có

$A = 1$: Hạt nhân bền ^{1}H có cấu hình $p(1s_{1/2})^1$,

$$L = 0, \ S = 1/2, \ J^p = 1/2^+, \ T = 1/2 .$$

$A = 2$: Hạt nhân bền ^{2}H có cấu hình $p(1s_{1/2})^1, n(1s_{1/2})^1$,

$$L = 0, \ S = 1, \ J^p = 1^+, \ T = 0 .$$

$A = 3$: Hạt nhân bền ^{3}He có cấu hình $p(1s_{1/2})^2, n(1s_{1/2})^1$,

$$L = 0, \ S = 1/2, \ J^p = 1/2^+, \ T = 1/2 .$$

$A = 4$: Hạt nhân bền ^{4}He có cấu hình $p(1s_{1/2})^2, n(1s_{1/2})^2$,

$$L = 0, \ S = 0, \ J^p = 0^+, \ T = 0 .$$

(b) Gần trạng thái kích thích đầu tiên của dao động tử điều hòa, mức năng lượng bị tách thành hai mức $1p_{3/2}$ và $1p_{1/2}$ do liên kết LS của trạng thái p. Spin đồng vị của ^{4}He ở trạng thái cơ bản là $T_z = 0$, $T = 0$. Do đó, các mức

kích thích có thể có như sau: (i) Khi một hạt proton (hay nơtron) ở trạng thái $1p_{3/2}$, hạt khác ở trạng thái $1s_{1/2}$, trạng thái cặp đôi có thể có là $1^-, 2^-$ ($T = 0$ hoặc $T = 1$).

(ii) Khi một hạt proton (hay nơtron) ở trạng thái $1p_{1/2}$, hạt khác ở trạng thái $1s_{1/2}$, trạng thái cặp đôi có thể có là $0^-, 1^-$ ($T = 0$ hoặc 1).

(iii) Khi hai hạt proton (hay hai nơtron) ở trạng thái $1p_{1/2}$ (hoặc $1p_{3/2}$), trạng thái cặp đôi có thể có là 0^+ ($T = 0$).

(c) Những kiểu phân rã của những trạng thái có thể có của ^{4}He là

	J^p	T	Kiểu phân rã
Trạng thái cơ bản:	0^+	0	Bền
Trạng thái kích thích:	0^+	0	p
	0^-	0	p,n
	2^-	0	p,n
	2^-	1	p,n
	1^-	1	p,nγ
	0^-	1	p,n
	1^-	1	p,nγ
	1^-	0	p,n,d

(d) ^{4}H có spin đồng vị $T = 1$, do đó, nó có thể có tất cả các trạng thái ở trên với $T = 1$, đó là $2^-, 1^-, 0^-$.

Spin đồng vị của ^{4}Be là $T \geq 2$, và do đó không thể có bất kì trạng thái nào ở trên.

(e) Tán xạ $\alpha - \alpha$ là tán xạ giữa hai hạt nhân giống hệt nhau, do đó hàm sóng toàn phần của trạng thái cuối là trao đổi đối xứng và momen tổng cộng được bảo toàn

Trong trạng thái ban đầu, hai hạt α có $L = 0, 2, \ldots$

Trong trạng thái cuối, hai hạt α ở trạng thái 0^-, $L = 0, 2 \ldots$

Như vậy, một hạt α có thể kích thích ^{4}He tới trạng thái 0^- trong khi một proton có thể kích thích tới trạng thái 2^-, hoặc 0^-.

2065

Giải thích những luận điểm sau dựa trên cơ sở của các nguyên tắc vật lý:

(a) Chuyển động của các nucleon riêng lẻ bên trong một hạt nhân có thể

coi là độc lập với các hạt khác thậm chí cả khi chúng tương tác rất mạnh.

(b) Tất cả các hạt nhân chẵn – chẵn có trạng thái cơ bản 0^+.

(c) Các hạt nhân với các lớp vỏ ngoài được điền đầy một phần bởi số nucleon lẻ có khuynh hướng biến dạng vĩnh viễn.

(*SUNY, Buffalo*)

Lời giải:

(a) Những xử lý thông thường dựa trên giả thiết tương tác giữa các nucleon có thể được thay thế bằng tác dụng lên một nucleon riêng lẻ bởi trường trung bình sinh ra bởi các nucleon khác. Các nucleon được coi là chuyển động độc lập với nucleon còn lại. Mặc dù mật độ nucleon cao bên trong hạt nhân, người ta giả thiết rằng những tương tác riêng lẻ giữa hai nucleon không biểu hiện trong tương tác chung. Do nucleon là hạt fecmion, tất cả các mức năng lượng thấp của trạng thái cơ bản đều được điền đầy, và tương tác giữa các nucleon không thể kích thích nucleon lên mức năng lượng cao hơn. Chúng ta có thể chọn một mẫu tương tác yếu vừa phải để mô tả tương tác mạnh giữa các nucleon.

(b) Theo mẫu vỏ hạt nhân, các proton và nơtron trong hạt nhân chẵn – chẵn có xu hướng hình thành từng đôi riêng rẽ, nghĩa là, mỗi cặp proton hoặc nơtron nằm trên cùng quỹ đạo và có spin đối nhau, do đó, momen tổng cộng và spin toàn phần của mỗi cặp nucleon đều bằng 0. Điều này dẫn tới momen động lượng toàn phần của hạt nhân bằng 0. Số chẵn của mỗi cặp là $(-1)^{2l} = +1$, và vì vậy số chẵn là dương. Do đó, với các hạt nhân chẵn – chẵn, $J^p = 0^+$.

(c) Các nucleon trên lớp vỏ ngoài cùng được điền đầy một phần có thể được coi là chuyển động xung quanh một hệ hạt nhân có spin bằng 0. Với các nucleon có $l \neq 0$, quỹ đạo là hình elip. Do các nucleon lẻ này có spin và momen từ xác định, có thể phân cực hệ hạt nhân, hạt nhân có xu hướng biến dạng vĩnh viễn.

2066

Giải thích những vấn đề sau:

(a) Năng lượng liên kết của một nơtron được thêm vào hạt nhân ^{3}He (hoặc một proton thêm vào hạt nhân ^{3}H) để tạo thành ^{4}He lớn hơn 20 MeV. Tuy nhiên, không có nơtron hay proton nào có thể liên kết bền với ^{4}He.

(b) Những hạt nhân phóng xạ tự nhiên như ^{232}Th và ^{238}U phân rã α và β

theo chuỗi, để cuối cùng tạo thành đồng vị của Pb. Chu kì bán rã của ^{232}Th và ^{238}U lớn hơn 10^9 năm và đồng vị Pb cuối cùng là đồng vị bền; những hạt nhân phân rã α trung gian có chu kì bán rã ngắn hơn nhiều – một số ít hơn 1 giờ hay thậm chí 1 giây – các hạt nhân kế tiếp nhau trong chuỗi phân rã nói chung có chu kì bán rã giảm dần và năng lượng phân rã α tăng lên trong quá trình phân rã tới đồng vị Pb cuối cùng.

(*Columbia*)

Lời giải:

(a) ^{4}He là hạt nhân hai lần thần kì trong đó những lớp nơtron và proton đều được điền đầy. Do đó, nó rất bền vững và không thể hấp thụ thêm nơtron hay proton nữa. Cũng như vậy, khi hạt nhân ^{3}He bắt một nơtron, hoặc hạt nhân ^{3}H bắt một proton để tạo thành ^{4}He, năng lượng phát ra là rất lớn do năng lượng liên kết lớn.

(b) Nguyên nhân các hạt nhân trung gian kế tiếp nhau, trong chuỗi phân rã của ^{232}Th và ^{238}U có chu kì bán rã giảm dần và có năng lượng phân rã α tăng lên trong quá trình tiến tới đồng vị Pb cuối cùng, là do rào thế Coulomb giữa hạt α và các hạt nhân con trong phát xạ α cản trở sự phân rã. Khi năng lượng hạt α tăng lên, xác suất xuyên qua rào thế cũng tăng lên và dẫn đến chu kì bán rã của hạt nhân giảm xuống. Từ phương trình Geiger – Nuttall cho phân rã α

$$\log \lambda = A - BE_d^{-1/2} ,$$

trong đó A và B là các hằng số với A thay đổi ứng với những dãy phóng xạ khác nhau, λ là hằng số phân rã α và E_d là năng lượng phân rã, chúng ta thấy rằng chỉ một thay đổi nhỏ của năng lượng phân rã cũng tương ứng với sự thay đổi rất lớn chu kì bán rã.

Từ mẫu giọt chất lỏng, ta có thể suy ra rằng năng lượng E_d của phân rã α tăng lên theo số khối A. Tuy nhiên, thực nghiệm chỉ ra rằng đối với họ phóng xạ ^{232}Th và ^{238}U, E_d giảm khi số khối A tăng lên. Điều này chỉ ra rằng, mẫu giọt chất lỏng chỉ có thể mô tả khuynh hướng chung của sự thay đổi năng lượng liên kết theo A và Z, chứ không giải thích được sự thăng giáng của năng lượng liên kết. Hiện tượng đó chỉ có thể giải thích được bằng mẫu vỏ hạt nhân.

2067

(a) Đồng vị spin và spin - chẵn lẻ ứng với trạng thái cơ bản của các hạt

nhân $^{13}_{5}$B, $^{13}_{6}$C, và $^{13}_{7}$N bằng bao nhiêu theo tính toán sử dụng mẫu vỏ? (Chú ý rằng lớp vỏ $p_{3/2}$ nằm dưới lớp vỏ $p_{1/2}$.)

(b) Sắp đặt bộ ba đồng khối số trên theo khối lượng bắt đầu từ hạt nhân có khối lượng nhỏ nhất. Đánh giá sơ lược sắp xếp của bạn.

(c) Chỉ ra cách nào bạn ước lượng khá đúng hiệu số năng lượng giữa hai thành viên có khối lượng thấp nhất trong bộ ba trên.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Spin đồng vị của một hạt nhân ở trạng thái cơ bản là $I = |Z - N|/2$, trong đó N, Z tương ứng là số nơtron và số proton trong hạt nhân. Spin - chẵn lẻ của hạt nhân ở trạng thái cơ bản được xác định bởi spin - chẵn lẻ của nucleon không ghép đôi cuối cùng. Theo hình 2.11

$^{13}_{5}B : J^p = \left(\frac{3}{2}\right)^-$, do proton không ghép đôi ở $1p_{\frac{3}{2}}$ trạng thái,

$$I = \frac{3}{2};$$

$^{13}_{6}C : J^p = \left(\frac{1}{2}\right)^-$, do nơtron không ghép đôi ở $1p_{1/2}$ trạng thái,

$$I = \frac{1}{2};$$

$^{13}_{7}N : J^p = \left(\frac{1}{2}\right)^-$, do proton không ghép đôi ở $1p_{1/2}$trạng thái,

$$I = \frac{1}{2}.$$

(b) Thứ tự các hạt nhân từ hạt nhân có khối lượng nhỏ nhất là $^{13}_{6}$C, $^{13}_{7}$N, $^{13}_{5}$B.

$^{13}_{6}$C và $^{13}_{7}$N thuộc cùng trạng thái lưỡng bội spin đồng vị. Sự chênh lệch khối lượng của chúng là do sự chênh lệch về năng lượng Coulomb cộng với sự chênh lệch về khối lượng giữa hạt nơtron và proton, trong đó chênh lệch năng lượng Coulomb là nguyên nhân chủ yếu. $^{13}_{7}$N có nhiều proton hơn so với $^{13}_{6}$C, do đó có năng lượng Coulomb cao hơn dẫn đến khối lượng lớn hơn. Trong khi đó $^{13}_{5}$B lại có ít proton hơn, nhiều nơtron hơn và cách xa chuỗi các hạt nhân bền vững nên liêt kết kém chặt chẽ hơn. Vì vậy, khối lượng của nó cao nhất.

(c) Xét hai hạt nhân có khối lượng nhỏ nhất, $^{13}_{6}$C và $^{13}_{6}$N trong bộ ba ở trên.

Coi các hạt nhân có hình cầu, mỗi hạt có năng lượng tĩnh điện (Coulomb) là $W = 3Q^2/5R$, R là bán kính hạt nhân $R \approx 1,4A^{1/2}$ fm. Như vậy, độ chênh lệch khối lượng là

$$\begin{aligned}
[M({}^{13}_{7}N) - M({}^{13}_{6}C)]c^2 &= \frac{3}{5R}(Q_N^2 - Q_C^2) - [M_n - M({}^1H)]c^2 \\
&= \frac{3\hbar c}{5R}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)(7^2 - 6^2) - 0,78 \\
&= 0,6 \times \frac{197}{137} \times \frac{49 - 36}{1,4 \times 13^{1/3}} - 0,78 \\
&= 2,62 \text{ MeV}.
\end{aligned}$$

2068

Trong mẫu vỏ hạt nhân, các quỹ đạo được điền đầy theo thứ tự

$$1s_{1/2},\ 1p_{3/2},\ 1p_{1/2},\ 1d_{5/2},\ 2s_{1/2},\ 1d_{3/2},\ \text{v.v.}$$

(a) Cái gì gây nên sự phân chia của hai quỹ đạo $p_{3/2}$ và $p_{1/2}$?

(b) Theo mẫu vỏ, ^{16}O ($Z = 8$) là một hạt nhân có các lớp vỏ đầy với spin và số chẵn lẻ $J^\pi = 0^+$. Hãy dự đoán giá trị J^π của ^{15}O và ^{17}O?

(c) Với hạt nhân lẻ - lẻ, giá trị J^π nằm trong một vùng cho phép. Những giá trị được phép của ^{18}F ($Z = 9$) là bao nhiêu?

(d) Với hạt nhân chẵn - chẵn (ví dụ ^{18}O) giá trị J^π luôn là 0^+. Phải giải thích hiện tượng này như thế nào?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Sự phân tách giữa $p_{3/2}$ và $p_{1/2}$ là do liên kết spin – quỹ đạo của các nucleon gây ra.

(b) Mỗi quỹ đạo chứa $2j + 1$ proton và $2j + 1$ nơtron. Như vậy, cấu hình proton của ^{15}O là $(1s_{1/2})^2(1p_{3/2})^4(1p_{1/2})^2$, và cấu hình nơtron là $(1s_{1/2})^2(1p_{3/2})^4(1p_{1/2})^1$. Do tất cả các proton đều đã ghép đôi trong khi nơtron thì không, spin chẵn lẻ của ^{15}O được xác định bởi momen và số chẵn lẻ của nơtron chưa ghép đôi ở trạng thái $1p_{\frac{1}{2}}$. Vì vậy, ^{15}O có $J^p = 1/2^-$.

Cấu hình proton của ^{17}O cũng giống của ^{15}O, nhưng cấu hình nơtron lại là $(1s_{1/2})^2(1p_{3/2})^4(1p_{1/2})^2(1d_{5/2})^1$. Do đó, spin chẵn lẻ của ^{17}O là do trạng thái nơtron $1d_{5/2}$, $J^p = 5/2^+$.

(c) Cấu hình nơtron của ^{18}F là $(1s_{1/2})^2(1p_{3/2})^4(1p_{1/2})^2(1d_{5/2})^1$, cấu hình proton cũng là $(1s_{1/2})^2(1p_{3/2})^4(1p_{1/2})^2(1d_{5/2})^1$. Do có hai nucleon chưa ghép đôi, vùng giá trị J^p được phép được xác định bởi nơtron và proton ở trạng thái $1d_{5/2}$. Do $l_n = 2, l_p = 2$, số chẵn lẻ là $\pi = (-1)^{l_n+l_p} = +1$. Vì $j_n = 5/2, j_p = 5/2$, các giá trị spin có thể là $J = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Như vậy, những giá trị spin chẵn lẻ có thể của ^{18}F là $0^+, 1^+, 2^+, 3^+, 4^+, 5^+$. (Trong thực tế là 1^+.)

(d) Với hạt nhân chẵn – chẵn, do số chẵn các nucleon nằm trên những mức năng lượng thấp nhất, nên số nucleon trên mỗi mức năng lượng là chẵn. Do số chẵn các nucleon ở cùng mức năng lượng có giá trị tuyệt đối của momen như nhau, và momen động lượng của các nucleon đã ghép đôi được sắp đối song với nhau do lực liên kết cặp, momen động lượng toàn phần của các nucleon trên cùng một mức bằng 0. Do tất cả các lớp proton và nơtron đều có momen bằng 0, spin của hạt nhân chẵn – chẵn bằng 0. Do số nucleon trên mỗi mức năng lượng của hạt nhân chẵn – chẵn là số chẵn, số chẵn của hạt nhân là dương.

2069

Năng lượng của từng hạt nơtron và proton riêng lẻ của những hạt nhân ở lân cận $^{208}_{82}\text{Pb}_{126}$ được cho trên hình 2.13. Sử dụng các số liệu đã cho, ước lượng hay đánh giá những vấn đề sau.

(a) Spin và số chẵn lẻ của trạng thái cơ bản và hai trạng thái kích thích đầu tiên của ^{207}Pb.

(b) momen tứ cực trạng thái cơ bản của ^{207}Pb.

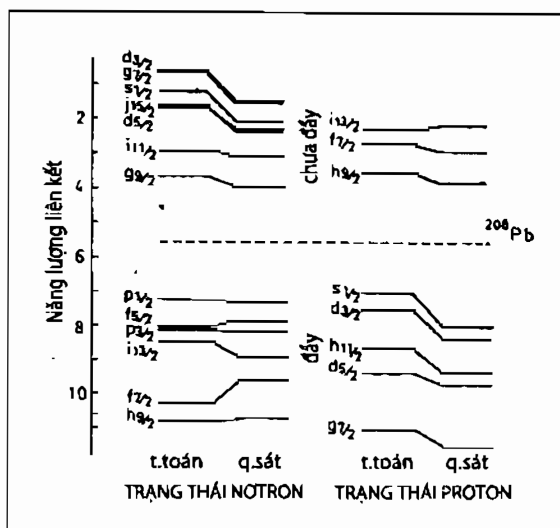
(c) momen từ của trạng thái cơ bản của ^{209}Pb.

(d) Spin và số chẵn lẻ của những trạng thái thấp nhất trong $^{208}_{83}$Bi (gần như suy biến). Năng lượng của trạng thái cơ bản của ^{208}Bi chênh lệch với ^{208}Pb là bao nhiêu?

(e) Trạng thái tương tự trong hạt nhân đồng khối ^{208}Bi ứng với trạng thái cơ bản trong hạt nhân ^{208}Pb được xác định như sau

$$T_+|^{208}\text{Pb (trạng thái cơ bản)}\rangle$$

với $T_+ = \sum_i t_+(i)$, trong đó t_+ chuyển nơtron thành proton. Số lượng tử nào



Hình 2.13

là của trạng thái tương tự đồng khối (spin, số chẵn lẻ, spin đồng vị, thành phần z của spin đồng vị)? Ước lượng năng lượng của hai trạng thái tương tự đồng khối số bên trên trạng thái cơ bản của ^{208}Pb do tương tác Coulomb.

(f) Giải thích tại sao hạt nhân nặng không phát xạ electron hay positron Fermi siêu được phép.

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) $^{207}_{82}$Pb bao gồm các lớp vỏ đầy và một nơtron trống ở mức $p_{1/2}$. Spin-chẵn lẻ của trạng thái cơ bản được xác định bằng nơtron chưa ghép đôi ở mức $p_{1/2}$ và vì vậy có giá trị $(1/2)^-$. Mức kích thích đầu tiên được tạo nên bởi chuyển dịch nơtron $f_{5/2}$ lên $p_{1/2}$. J^p của nó được xác định bởi chỗ trống nơtron ở mức $f_{5/2}$ và bằng $(5/2)^-$. Trạng thái kích thích thứ hai được tạo nên khi nơtron $p_{3/2}$ nhảy vào chiếm chỗ trống $f_{5/2}$ (điều này có thể coi như nơtron $p_{3/2}$ trực tiếp chuyển lên mức $p_{1/2}$). J^p của hạt nhân trong trạng thái kích thích thứ hai được xác định bằng nơtron $p_{3/2}$ và bằng $\left(\frac{3}{2}\right)^-$. Như vậy, trạng thái cơ bản và hai trạng thái kích thích đầu tiên của ^{207}Pb có $J^p = (\frac{1}{2})^-, (\frac{5}{2})^-, (\frac{3}{2})^-$.

(b) Những lớp vỏ của $^{207}_{82}$Pb đều đầy ngoại trừ một nơtron lẻ ở mức $p_{1/2}$. momen tứ cực điện có thể được sinh ra do sự phân cực tại tâm hạt nhân gây

bởi chuyển động của các nơtron. Nhưng do $J = 1/2$, momen tứ cực điện của ^{207}Pb bằng 0.

(c) $^{209}_{82}$Pb có một nơtron ở lớp vỏ $g_{9/2}$ bên ngoài các lớp vỏ đầy. Do chuyển động quỹ đạo của nơtron không đóng góp vào momen từ hạt nhân, momen từ tổng cộng bằng với momen từ của nơtron:

$\mu(^{209}Pb) = -1,91\mu_N, \mu_N$ là manneton hạt nhân.

(d) Với $^{208}_{83}$Bi, trạng thái cơ bản có một proton và một nơtron chưa ghép đôi, proton ở mức $h_{9/2}$, nơtron ở mức $p_{1/2}$. Do $J = 1/2 + 9/2 = 5$ (spin của cả hai nucleon đều phản song song với l), $l_p = 5$, $l_n = 1$ và vì vậy số chẵn lẻ là $(-1)^{l_p+l_n} = +$, các trạng thái có $J^p = 5^+$. Trạng thái kích thích đầu tiên được tạo nên do nơtron chuyển từ mức $f_{5/2}$ lên $p_{1/2}$ và spin - chẵn lẻ của nó được xác định bằng nơtron $f_{5/2}$ và proton $h_{9/2}$. Vì thế $J = 5/2 + 9/2 = 7$, số chẵn lẻ là $(-1)^{1+5} = +$, như vậy $J^p = 7^+$. Từ đó, hai trạng thái kích thích đầu tiên có spin-chẵn lẻ là 5^+ và 7^+.

Sự chênh lệch năng lượng giữa hai trạng thái cơ bản của ^{208}Bi và ^{208}Pb có thể thu được từ hình 2.13. Khi so sánh với ^{208}Pb, ^{208}Bi có nhiều hơn một proton ở mức $h_{9/2}$ và ít hơn một nơtron ở mức $p_{1/2}$, ta có

$$\Delta E = E(Bi) - E(Pb) \approx 7,2 - 3,5 + 2\Delta \approx 3,7 + 1,5 = 5,2 \text{ MeV},$$

trong đó $\Delta = m_n - m_p$, nghĩa là trạng thái cơ bản của ^{208}Bi là 5,2 MeV cao hơn của ^{208}Pb.

(e) Do T_+ chỉ thay đổi ba thành phần của spin đồng vị,

$$T_+|T, T_3\rangle = A|T, T_3 + 1\rangle .$$

Như vậy, trạng thái tương tự đồng khối số có cùng spin, số chẵn lẻ và spin đồng vị nhưng khác thành phần thứ ba của spin đồng vị so với hạt nhân ban đầu. Do ^{208}Pb có $J^p = 0^+$, $T = 22$, $T_3 = -22$, ^{208}Bi, trạng thái tương tự đồng khối số của ^{208}Pb, có cùng J^p và T nhưng có $T_3 = -21$.

Sự cách biệt về năng lượng giữa hai trạng thái tương tự đồng khối là

$$\Delta E \approx \frac{6}{5}\frac{Ze^2}{R} + (m_H - m_n)c^2 = \frac{6}{5}\frac{Z\hbar c}{R}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right) - 0,78$$

$$= \frac{6 \times 82 \times 197}{5 \times 1,2 \times 208^{1/3} \times 137} - 0,78 = 19,1 \text{ MeV}.$$

(f) Quy tắc lựa chọn cho chuyển dời Fermi siêu được phép là $\Delta J = 0$, $\Delta P = +$, $\Delta T = 0$, do đó hàm sóng của các hạt nhân con phải tương tự với

của bố mẹ. Do spin đồng vị là một số lượng tử tốt, các chuyển dời được phép thường xảy ra giữa các spin đồng vị đa bội. Tuy nhiên, ở hạt nhân nặng, sự chênh lệch năng lượng Coulomb giữa các trạng thái tương tự đồng khối số có thể là 10 MeV hoặc cao hơn, do đó trạng thái tương tự đồng khối số là trạng thái kích thích cao. Như vậy, chúng dễ phát xạ nucleon hơn phân rã β.

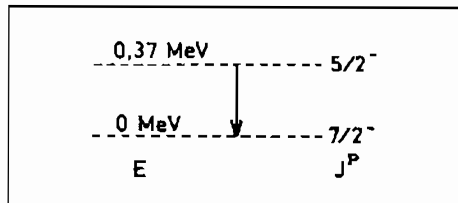
2070

Mô hình đơn giản nhất đối với các trạng thái nằm ở mức thấp của các hạt nhân có Z và N nằm trong khoảng từ 20 đến 28 chỉ gồm các nucleon $f_{7/2}$.

(a) Sử dụng mô hình này để tính momen lưỡng cực từ của ${}^{41}_{20}Ca_{21}$ và ${}^{41}_{21}Sc_{20}$. Xác định thô momen tứ cực điện của hai trường hợp trên.

(b) Những trạng thái nào của ${}^{42}_{20}Ca$ có thể theo mô hình này? Tính toán momen lưỡng cực từ và momen tứ cực điện cho những trạng thái này. Phác thảo dãy phân rã đầy đủ xác định bằng thực nghiệm ứng với trạng thái spin cao nhất

(c) Trạng thái kích thích đầu tiên của ${}^{43}_{21}Ca_{23}$ được cho trên hình 2.14 với phân rã xuống trạng thái cơ bản có chu kì bán rã là 34 ps. Xác định thời gian sống của trạng thái này dựa trên cơ sở của mô hình hạt đơn lẻ.



Hình 2.14

Các giá trị thực nghiệm là

$$\mu_n = -1,91\mu_N, \qquad \mu({}^{41}Ca) = -1,59\mu_N$$

$$\mu_p = 2,79\mu_N, \qquad \mu({}^{41}Sc) = 5,43\mu_N$$

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) ^{41}Ca có một nơtron và ^{41}Sc có một proton nằm ở trạng thái $1f_{7/2}$ bên ngoài các lớp vỏ đầy. Do các lớp đầy không đóng góp vào momen từ hạt nhân,

momen từ được xác định bằng các nucleon ở lớp vỏ ngoài. Momen từ hạt nhân được cho bởi công thức

$$\mu = gj\mu_N ,$$

trong đó j là momen động lượng toàn phần, μ_N là mahneton hạt nhân. Đối với một hạt nucleon riêng lẻ trong trường xuyên tâm, hệ số g là **(Bài tập 2061)**

$$g = \frac{(2j-1)g_l + g_s}{2j} \qquad \text{với } j = l + \frac{1}{2} ,$$

$$g = \frac{(2j+3)g_l - g_s}{2(j+1)} \qquad \text{với } j = l - \frac{1}{2} .$$

Với nơtron, $g_l = 0$, $g_s = g_n = -\frac{1,91}{\frac{1}{2}} = -3,82$. Do $l = 3$ và $j = \frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2}$, ta có ^{41}Ca

$$\mu(^{41}Ca) = -\frac{3,82}{2j} \times j\mu_N = -1,91\mu_N .$$

Với proton, $g_l = 1$, $g_s = g_p = \frac{2,79}{1/2} = 5,58$. Do $j = \frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2}$, ta có cho trùng hợp ^{41}Sc

$$\mu(^{41}Sc) = \frac{(7-1) + 5,58}{7} \times \frac{7}{2}\mu_N = 5,79\mu_N .$$

Chú ý rằng những giá trị này chỉ phù hợp thô với những giá trị thực nghiệm.

Momen tứ cực điện của ^{41}Sc, (có một proton lẻ ở lớp vỏ ngoài cùng) được cho bởi công thức

$$Q(^{41}Sc) = -e^2\langle r^2\rangle\frac{2j-1}{2(j+1)} = -\langle r^2\rangle\frac{2j-1}{2(j+1)} ,$$

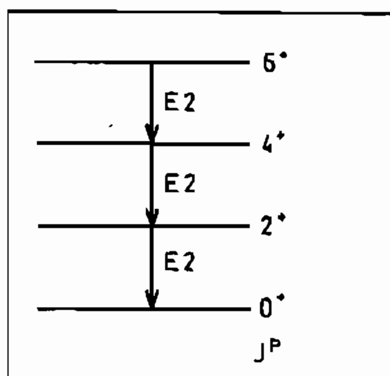
trong đó $\langle r^2\rangle$ là khoảng cách quân phương từ tâm và điện tích proton được xem là đơn vị. Với ước lượng độ lớn $\langle r^2\rangle = (1,2 \times A^{1/3})^2\ fm^2$. Ta có

$$Q(^{41}Sc) = -\frac{6}{9} \times (1,2 \times 41^{\frac{1}{3}})^2 = -1,14 \times 10^{-25}\ cm^2 .$$

^{41}Ca có một nơtron bên ngoài các lớp vỏ đầy. Momen tứ cực điện được sinh ra bởi sự phân cực của nơtron trong tâm hạt nhân và bằng

$$Q(^{41}Ca) \approx \frac{Z}{(A-1)^2}|Q(^{41}Sc)| = 1,43 \times 10^{-27}\ cm^2 .$$

(b) Như trên hình 2.15, trạng thái cơ bản của hạt nhân ^{42}Ca là 0^+. Hai nơtron cuối cùng ở mức $f_{7/2}$ có thể ghép đôi để tạo nên các mức có $J =$



Hình 2.15

7, 6, 5 ..., 0 và số chẵn lẻ dương. Kể đến sự phản đối xứng của các hạt đồng nhất, các mức có thể là các mức có $J = 6, 4, 2, 0$. (Do đòi hỏi $L + S =$ chẵn, xem **Bài tập 2054**. Do $S = 0$, $J =$ chẵn.)

Momen lưỡng cực từ μ của hệ hai nucleon được cho bởi

$$\boldsymbol{\mu} = g\mathbf{J}\mu_N = (g_1\mathbf{j}_1 + g_2\mathbf{j}_2)\mu_N$$

với $\mathbf{J} = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2$. Do

$$g\mathbf{J}^2 = g_1\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{J} + g_2\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{J}\,,$$

$$\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{2}(\mathbf{J}^2 + \mathbf{j}_1^2 - \mathbf{j}_2^2)\,,$$

$$\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{2}(\mathbf{J}^2 + \mathbf{j}_2^2 - \mathbf{j}_1^2)\,,$$

ta có

$$g\mathbf{J}^2 = \frac{1}{2}(g_1 + g_2)\mathbf{J}^2 + \frac{1}{2}(g_1 - g_2)(\mathbf{j}_1^2 - \mathbf{j}_2^2)\,.$$

hay

$$g = \frac{1}{2}(g_1 + g_2) + \frac{1}{2}(g_1 - g_2)\frac{j_1(j_1+1) - j_2(j_2+1)}{J(J+1)}\,.$$

Với ^{42}Ca, hai nucleon nằm ngoài các lớp vỏ đầy đều có $j = 7/2$. Do

$$g_1 = g_2 = \frac{-3,82}{j_1}\,, \qquad j_1 = \frac{7}{2}\,,$$

chúng ta có $\mu(^{42}Ca) = g_1 J\mu_N = -1,09J\mu_N$ với $J = 0, 2, 4, 6$.

Momen tứ cực trạng thái cơ bản của ^{42}Ca là $Q = 0$. Ta có thể thu được momen tứ cực trạng thái kích thích sử dụng mức chuyển dời rút gọn đối với chuyển dời γ.

$$B(E2, 2^+ \to 0^+) = \frac{e^2 Q_0^2}{16\pi}$$

trong đó Q_0 là momen tứ cực điện riêng. Trạng thái kích thích đầu tiên 2^+ của ^{42}Ca có năng lượng kích thích 1,524 MeV và

$$B(E2 : 2^+ \to 0^+) = 81,5e^2\ fm^4\,,$$

hay

$$Q_0 = \sqrt{16\pi \times 81,5} = 64\ fm^2\,.$$

Với những trạng thái khác, momen tứ cực được tính như sau

$$Q = \frac{K^2 - J(J+1)}{(J+1)(2J+3)} Q_0 = -\frac{J(J+1)Q_0}{(J+1)(2J+3)} = \frac{-J}{2J+3} Q_0$$

do $K = 0$. Như vậy $Q = 18,3\ fm^2$ với $J = 2$, $23,3\ fm^2$ với $J = 4$, và $25,6\ fm^2$ với $J = 6$.

(c) Quy tắc lựa chọn với chuyển dời γ, $(\frac{5}{2})^- \to (\frac{7}{2})^-$ là $(\frac{5}{2} - \frac{7}{2}) \leq L \leq \frac{5}{2} + \frac{7}{2}$, nghĩa là $L = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, với bậc thấp nhất có xác suất lớn nhất, trong đó tính chẵn lẻ được bảo toàn. Theo đó, xác suất lớn nhất là chuyển dời lưỡng cực từ M_1 có $\Delta P = -(-1)^{1+1} = +$, hay chuyển dời tứ cực điện $E2$ với $\Delta P = (-1)^2 = +$. Theo mô hình hạt đơn lẻ **(Bài tập 2093)**,

$$\begin{aligned}
\lambda_{M1} &= \frac{1,9(L+1)}{L[(2L+1)!!]^2} \left(\frac{3}{L+3}\right)^2 \left(\frac{E_\gamma}{197}\right)^{2L+1} \times (1,4 \times A^{1/3})^{2L-2} \times 10^{21} \\
&= \frac{1,9 \times 2}{3^2} \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{0,37}{197}\right)^3 (1,4 \times 43^{1/3})^0 \times 10^{21} \\
&= 1,57 \times 10^{12}\ s^{-1}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{E2} &= \frac{4,4(L+1)}{L[(2L+1)!!]^2} \left[\frac{3}{L+3}\right]^2 \left(\frac{E_\gamma}{197}\right)^{2L+1} \times (1,4 \times A^{1/3})^{2L} \times 10^{21} \\
&= \frac{4,4 \times 3}{2 \times (5 \times 3)^2} \left(\frac{3}{L+3}\right)^2 \left(\frac{0,37}{197}\right)^5 (1,4 \times 43^{1/3})^4 \times 10^{21} \\
&= 1,4 \times 10^8\ s^{-1}\,.
\end{aligned}$$

Do $\lambda_{E2} \ll \lambda_{M1}$, $E2$ có thể rất nhỏ và vì vậy

$$T_{1/2} \approx \frac{\ln 2}{\lambda_{M1}} = \frac{\ln 2}{1,57 \times 10^{12}} = 4,4 \times 10^{-13}\ s\,.$$

Kết quả này từ mô hình hạt riêng lẻ nhỏ hơn khoảng 20 lần so với giá trị thực nghiệm. Sự trái ngược này có thể là do chuyển dời γ được sinh ra từ sự thay đổi chuyển động tập thể của các nucleon.

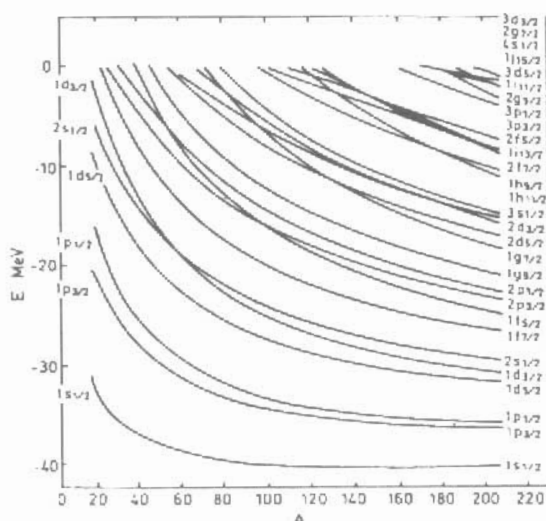
2071

Sự thay đổi của năng lượng liên kết đối với hạt nơtron riêng lẻ trong mô hình rào thế "thực" của tương tác nơtron – hạt nhân được cho trên hình 2.16.

(a) Năng lượng để tách một nơtron đối với $^{40}_{20}$Ca và $^{208}_{82}$Pb là bao nhiêu?

(b) Số thần kì nơtron tốt nhất trong các hạt nhân giữa ^{40}Ca và ^{208}Pb là bao nhiêu?

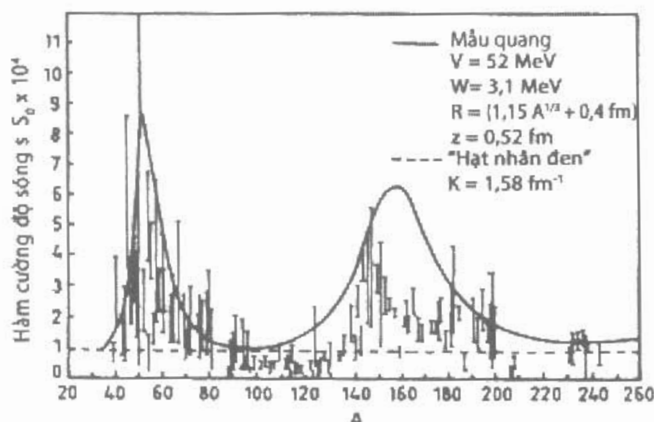
(c) Vẽ phổ bao gồm cả spin, số chẵn lẻ và các mức năng lượng tương đối xấp xỉ của 5 trạng thái thấp nhất trong ^{210}Pb và giải thích.



Hình 2.16

(d) Hàm cường độ nơtron sóng s S_0 được xác định là tỉ số giữa độ rộng nơtron trung bình $\langle \Gamma_n \rangle$ trên khoảng cách năng lượng cục bộ trung bình $\langle D \rangle$

$$S_0 = \langle \Gamma_n \rangle / \langle D \rangle\,.$$



Hình 2.17

Hình 2.17 chỉ sự thay đổi của hàm cường độ nơtron nhiệt S_0 theo số khối A. Giải thích sự có mặt của đỉnh đơn quanh $A \approx 50$, và đỉnh bị chẻ (tách) quanh $A \approx 160$. Tại sao đỉnh thứ hai lại bị chẻ (tách)?

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Nơtron ngoài cùng của ^{40}Ca là nơtron thứ 20. Hình 2.16 cho biết với $A = 40$, nơtron cuối cùng ở lớp $1d_{3/2}$ với năng lượng tách nơtron khoảng 13 MeV.

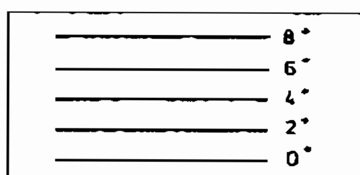
^{208}Pb có các lớp vỏ đầy, cặp nơtron cuối cùng là ở lớp $3p_{1/2}$. Từ hình 2.16 ta chú ý rằng đối với $A = 208$ năng lượng tách 1 nơtron là khoảng 3 MeV.

(b) Các số thần kì nơtron nằm giữa ^{40}Ca và ^{208}Pb là 28, 50 và 82. Với các hạt nhân có $N = Z$, số thần kì nơtron $N = 28$ có năng lượng tách một nơtron khoảng 13 MeV. Với số nơtron $N = 50$, năng lượng tách nơtron cũng khoảng 13 MeV. Với N = 82, năng lượng tách nơtron khoảng 12 MeV. Tuy nhiên, với hạt nhân nặng, số nơtron nhiều hơn so với số proton, do đó $A < 2N$. Khi tính đến điều này, với các hạt nhân có số thần kì 50 và 82, năng lượng để tách nơtron còn nhỏ hơn so với giá trị ở trên. Với hạt nhân có số thần kì 28, năng lượng tách nơtron là cao nhất do dó, đây là hạt nhân có số thần kì nơtron tốt nhất.

(c) Hai nơtron ngoài cùng của ^{210}Pb nằm ở lớp $2g_{9/2}$. Do hai nơtron nằm trên cùng một quỹ đạo và thông thường tạo cặp để $J = 0$, hạt nhân chẵn – chẵn có trạng thái cơ bản là 0^+.

Hai nơtron lớp ngoài cùng của hạt nhân $2g_{9/2}$ của ^{210}Pb có thể cặp đôi để tạo nên những trạng thái có $J = 9, 8, 7, \ldots$. Tuy nhiên hệ hai spin có spin đồng vị $T = 1$. Do sự phản đối xứng của hàm sóng toàn phần đòi hỏi $T + J =$ số lẻ, các giá trị cho phép của J là $8, 6, 4, 2, 0$ và số chẵn lẻ dương. Như vậy các spin-chẵn lẻ của 5 trạng thái thấp nhất là $8^+, 6^+, 4^+, 2^+, 0^+$. Do tương tác dư, 5 trạng thái có những mức năng lượng khác nhau được trình bày như trên hình 2.18.

(d) Gần $A = 50$ hàm cường độ sóng s có một đỉnh. Đây là do khi $A = 50$, năng lượng của mức $3s$ xấp xỉ bằng với năng lượng liên kết của nơtron. Tính toán sử dụng mô hình quang học cho



Hình 2.18

ta hình dáng của đỉnh như trên hình 2.17 (đường liền nét). Khi $150 < A < 190$, hàm cường độ sóng s lại xuất hiện đỉnh do sự bằng nhau của mức năng lượng kích thích $4s$ của nơtron và năng lượng liên kết của nó. Tuy nhiên, sự biến dạng hạt nhân trong vùng này là lớn hơn, đặc biệt gần $A = 160$ đến 170, là vùng các hạt nhân có khuynh hướng biến dạng vĩnh viễn. Ở đây, năng lượng liên kết khác biệt đáng kể so với trong mô hình một hạt riêng lẻ: đỉnh của hàm cường độ sóng s trở nên thấp hơn và tách thành hai đỉnh nhỏ hơn.

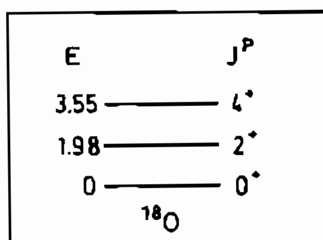
2072

Hình 2.19 cho thấy những trạng thái nằm ở mức thấp của ^{18}O với những thay đổi số gán spin – chẵn lẻ và năng lượng (MeV) so trạng thái cơ bản 0^+.

(a) Giải thích tại sao những giá trị J^p này chỉ đúng với mẫu vỏ chuẩn?

(b) Những giá trị J^p nào tồn tại trong những trạng thái nằm ở mức thấp của ^{19}O?

(c) Cho biết những giá trị năng lượng (so với trạng thái cơ bản) của mức ^{18}O có thể dùng trong mẫu vỏ, bỏ qua những tương tác cấu hình giữa các nucleon với nhau, để tính sự tách các mức năng lượng của mức ^{19}O. Tuy nhiên, điều này đòi hỏi phải biết các hệ số Clebsch – Gordon phức tạp. Để đơn



Hình 2.19

giản hóa vấn đề, xét một trường hợp tưởng tượng khi các mức 2^+ và 4^+ của ^{18}O có năng lượng tương ứng là 2 MeV và $6\frac{2}{3}$ MeV. Tính năng lượng những mức thấp của mức ^{19}O cho trường hợp giả tưởng này.

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Trong mẫu vỏ đơn giản, bỏ qua những tương tác dư giữa các nucleon và chỉ quan tâm tới liên kết spin – quỹ đạo, ta có đối với hệ gồm A nucleon,

$$H = \Sigma H_i \, ,$$

với

$$H_i = T_i + V_i \, ,$$

$$V_i = V_0^i(r) + f(r)\boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{l}_i \, ,$$

$$H_i\Psi_i = E_i\Psi_i \, ,$$

$$\Psi = \prod_{i=1}^{A} \psi_i \, .$$

Khi quan tâm tới tương tác dư, sự chênh lệch năng lượng giữa những nhóm cấu hình khác nhau của các nucleon trên cùng một mức năng lượng cần phải được tính đến.

Với hạt nhân ^{18}O, hai nơtron nằm bên ngoài các lớp bỏ đầy có thể nằm ở các mức $1d_{5/2}$, $2s_{1/2}$ và $1d_{3/2}$ (hình 2.16). Do 2 nucleon nằm trên cùng một quỹ đạo, tính bất đối xứng trong hàm sóng toàn phần của hệ đòi hỏi $T + J$ = lẻ. Do $T = 1$, J là số chẵn. Do đó, trạng thái cơ bản và kích thích có thể có của

^{18}O là

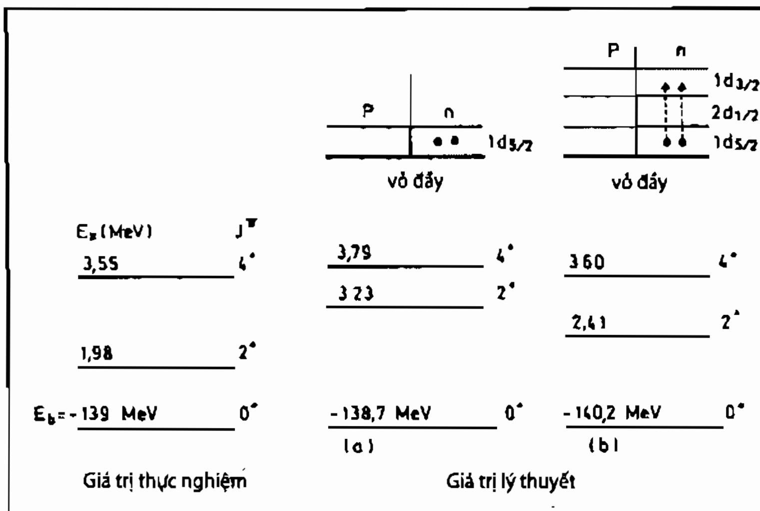
$$(1d_{5/2})^2: \quad J = 0^+, 2^+, 4^+, \quad T = 1,$$

$$(1d_{5/2}2s_{1/2}): \quad J = 2^+, \quad T = 1,$$

$$(2s_{1/2})^2: \quad J = 0^+, \quad T = 1,$$

$$(1d_{3/2})^2: \quad J = 0^+, 2^+, \quad T = 1.$$

Ba trạng thái nằm ở mức thấp của ^{18}O được cho trên hình 2.19, $0^+, 2^+, 4^+$, tương ứng với cấu hình $(1d_{5/2})^2$. Tuy nhiên, khi tính tới những giá trị năng lượng của các mức, nếu chỉ sử dụng cấu hình $(d_{5/2})^2$ sẽ cho kết quả không phù hợp với thực nghiệm. Như vậy, cần phải chấp nhận cả những cấu hình pha trộn $1d_{5/1}, 2s_{1/2}, 1d_{3/2}$, là những cấu hình cho sự phù hợp tốt với thực nghiệm, như trình bày trên hình 2.20.



Hình 2.20

(b) Để tính các mức thấp nhất của ^{19}O sử dụng mẫu vỏ đơn giản và bỏ qua những tương tác giữa những nhóm cấu hình khác nhau, ta chỉ cần tính với nơtron chưa ghép đôi cuối cùng. Theo hình 2.16, nó có thể nằm ở các mức $1d_{5/2}, 2s_{1/2}$, hay $1d_{3/2}$. Do đó, trạng thái cơ bản là $\left(\frac{5}{2}\right)^+$, trạng thái kích thích thứ nhất là $\left(\frac{1}{2}\right)^+$, trạng thái kích thích thứ hai là $\left(\frac{3}{2}\right)^+$.

Nếu tính đến tương tác giữa những nhóm cấu hình khác nhau, ba nơtron nằm ở lớp ngoài cùng có thể nằm ở những quỹ đạo $1d_{5/2}$ và $2s_{1/2}$ để tạo nên những cấu hình sau đây

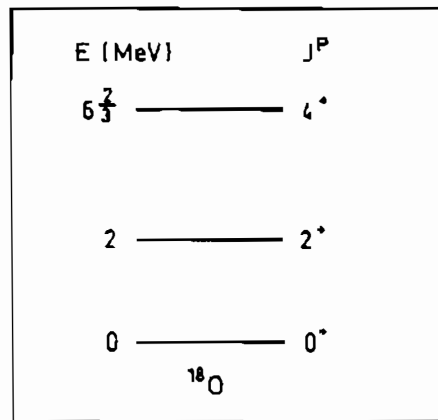
$$[(d_{5/2})^3]_{5/2,m}, \quad [(d_{5/2})^2 s_{1/2}]_{5/2,m}, \quad [d_{5/2}(s_{1/2})^2_0]_{5/2,m}, J^p = \left(\frac{5}{2}\right)^+,$$

$$[(d_{5/2})^2_0 s_{1/2}]_{1/2,m}, J^p = \left(\frac{1}{2}\right)^+,$$

$$[(d_{5/2})^3]_{3/2,m}, \quad [(d_{5/2})^2_2 s_{1/2}]_{3/2,m}, J^p = \left(\frac{3}{2}\right)^+.$$

Hơn nữa, những trạng thái có $J^p = \frac{7^+}{2}, \frac{9^+}{2}$ cũng có thể xảy ra.

(c) Trong trường hợp tưởng tượng, những trạng thái kích thích thấp nhất của ^{18}O là $0^+, 2^+, 4^+$ với năng lượng $0, 2, 6\frac{2}{3}$ MeV như trên hình 2.21



Hình 2.21

Cấu trúc năng lượng tưởng tượng này tương ứng với phổ quay của hạt nhân chẵn – chẵn. Ta có:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{J_2(J_2+1)}{J_1(J_1+1)} = \frac{4(4+1)}{2(2+1)} = \frac{6\frac{2}{3}}{2}.$$

Xem giả định này là đúng, momen quán tính I của hạt nhân ^{18}O có thể được tìm ra. Nếu giả thiết này cũng có thể áp dụng cho ^{19}O và nếu momen quán tính của ^{19}O, có thể xem gần bằng của ^{18}O, ta có thể xác định các mức năng

lượng của ^{19}O. Do $E_J = \frac{\hbar^2}{2I}J(J+1)$, đối với ^{18}O ta có

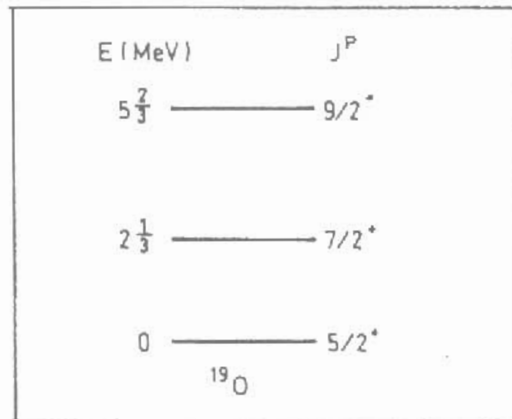
$$\frac{\hbar^2}{2I} = \frac{E_J}{J(J+1)} = \frac{2}{2(2+1)} = \frac{1}{3}\ \text{MeV}.$$

Giả sử rằng I là cùng giá trị đối với ^{19}O. Từ (b) ta có thể thấy rằng ba mức quay thấp nhất của ^{19}O tương ứng với $J = \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}$. Như vậy

$$E_{5/2} = 0, \text{ là trạng thái cơ bản của } {}^{19}O,$$

$$E_{7/2} = \frac{1}{3}\left[\frac{7}{2}\left(\frac{7}{2}+1\right) - \frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}+1\right)\right] = 2\frac{1}{3}\ \text{MeV},$$

$$E_{9/2} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}(9 \times 11 - 5 \times 7) = 5\frac{1}{3}\ \text{MeV}.$$



Hình 2.22

2073

Các Hamintonian không tương đối tính sau có thể được sử dụng để mô tả

hệ các nucleon

$$H_0 = \sum_i \frac{\boldsymbol{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 \mathbf{r}_i^2 ,$$

$$H_1 = H_0 - \sum_i \beta \mathbf{l}_i \cdot \mathbf{s}_i ,$$

$$H_2 = H_1 - \sum_i \frac{1}{2}m\omega^2 (2z_i^2 - x_i^2 - y_i^2) ,$$

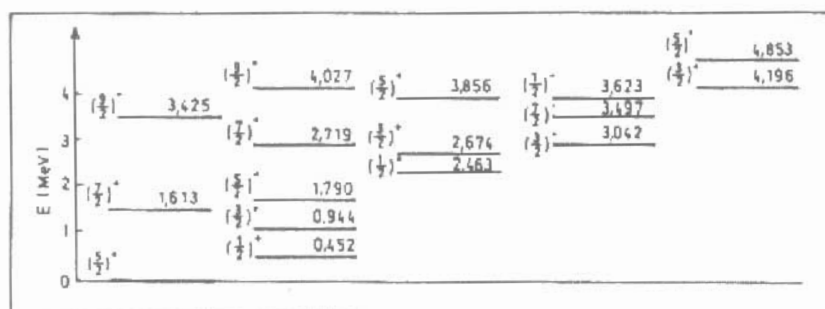
trong đó $\hbar\omega_0 \gg \beta \gg \hbar\omega$.

(a) Với mỗi Hamintonian H_0, H_1, H_2, xác định những đại lượng bảo toàn hoàn toàn và từng phần của hệ. Với trạng thái cơ bản của mỗi mẫu, cho các số lượng tử thích hợp đối với những hạt quỹ đạo riêng lẻ đã điền đầy khi số n của các nucleon đồng nhất là 11, 13 và 15.

(b) Những đặc trưng thêm nào có thể được thêm vào khi mô tả những trạng thái nằm ở mức thấp của những nucleon cầu hoặc biến dạng?

(c) Những mức năng lượng đã biết của nhôm 27, ${}^{27}_{13}Al_{14}$, dưới 5 MeV được cho trên hình 2.23. Những trạng thái nào tương ứng với những dự đoán của các mẫu hình cầu và mẫu biến dạng?

(*Princeton*)



Hình 2.23

Lời giải:

(a) Với H_0 những đại lượng bảo toàn hoàn toàn là năng lượng E, momen động lượng L, spin toàn phần S, momen động lượng toàn phần J, và số chẵn lẻ.

Với H_1 những đại lượng bảo toàn hoàn toàn là E, J và số chẵn lẻ, những đại lượng bảo toàn từng phần là L và S.

Với H_2 những đại lượng bảo toàn hoàn toàn là E, thành phần thứ ba của momen động lượng toàn phần J_z, và số chẵn lẻ, các đại lượng bảo toàn từng phần là J, L, S.

Do H_0 là trường dao động tử điều hòa đẳng hướng, $E_N = \left(N + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega$. Các trạng thái nằm mức thấp như sau (hình 2.22 và 2.16)

$N = 0$ cho trạng thái cơ bản $1s_{1/2}$.

$N = 1$ cho các trạng thái p, $1p_{3/2}$ và $1p_{1/2}$ là các trạng thái suy biến.

$N = 2$ cho các trạng thái $2s$ và $1d$, $1d_{5/2}$, $2s_{1/2}$, $1d_{3/2}$, là các trạng thái suy biến.

Khi số nucleon đồng nhất là $n = 11, 13, 15$, các nucleon được điền đầy cuối cùng có $N = 2$.

H_1 có thể được viết lại như sau

$$H_1 = H_0 - \sum_i \beta(\mathbf{l}_i \cdot \mathbf{s}_i) = H_0 - \sum_i \frac{1}{2}\beta[j_i(j_i+1) - l_i(l_i+1) - s_i(s_i+1)]\,.$$

Khi j_i tăng lên, năng lượng giảm xuống. Với Hamintonian này, một số suy biến bị mất: $1p_{3/2}$ và $1p_{1/2}$ được tách, $1d_{3/2}$ và $1d_{5/2}$ cũng vậy. 11 hoặc 13 nucleon đồng nhất có thể điền đầy tới trạng thái $1d_{5/2}$, trong khi với $n = 15$, nucleon cuối cùng chuyển tới trạng thái $2s_{1/2}$.

H_2 có thể viết lại thành

$$H_2 = H_1 - \sum_i \frac{1}{2}m\omega^2 r_i^2(3\cos^2\theta - 1)\,,$$

tương ứng với các nucleon biến dạng. Với Hamiltonian này, các mức năng lượng $1p_{3/2}$, $1d_{3/2}$, và $1d_{5/2}$ bị chia nhỏ hơn:

$1d_{5/2}$ chia thành $\left(\frac{1}{2}\right)^+, \left(\frac{3}{2}\right)^+, \left(\frac{5}{2}\right)^+$,

$1d_{3/2}$ chia thành $\left(\frac{1}{2}\right)^+, \left(\frac{3}{2}\right)^+$,

$1p_{3/2}$ chia thành $\left(\frac{1}{2}\right)^-, \left(\frac{3}{2}\right)^-$,

Đặt tham số biến dạng là ε. Thứ tự của các mức năng lượng bị tách ra phụ thuộc rất nhiều vào ε. Theo mô hình hạt đơn lẻ đối với các hạt nhân biến dạng, khi $\varepsilon \approx 0,3$ (như đối với ^{27}Al), quỹ đạo của nucleon cuối cùng là

$\left(\frac{3}{2}\right)^+$ của mức $1d_{5/2}$ khi $n = 11$,

$\left(\frac{5}{2}\right)^+$ của mức $1d_{5/2}$ khi $n = 13$,

$\left(\frac{1}{2}\right)^+$ của mức $2s_{1/2}$ khi $n = 15$.

(b) Với các hạt nhân có dạng cầu, khi đề cập đến các trạng thái cơ bản và kích thích thấp, hiệu ứng cặp và tương tác cấu hình giữa các nucleon cần phải tính đến. Với các hạt nhân bị biến dạng, bên cạnh những yếu tố trên, hiệu ứng của trường biến dạng trên các mức năng lượng của hạt đơn lẻ cũng như sự dao động và quay của tập hợp các nucleon cũng cần phải tính đến.

(c) ^{27}Al là một hạt nhân biến dạng với $\varepsilon \approx 0,3$. Cấu hình của 14 nơtron và 13 proton trong hạt nhân cầu là

$$n :(1s_{1/2})^2(1p_{3/2})^4(1p_{1/2})^2(1d_{5/2})^6\,,$$

$$n :(1s_{1/2})^2(1p_{3/2})^4(1p_{1/2})^2(1d_{5/2})^5\,.$$

Trạng thái cơ bản được tạo nên bởi trạng thái của nucleon chưa ghép đôi cuối cùng $(1d_{5/2})$: $J^p = \left(\frac{5}{2}\right)^+$.

Nếu hạt nhân bị biến dạng, không chỉ các mức năng lượng như $1p_{3/2}$, $1d_{5/2}$, $1d_{3/2}$ bị tách, các mức cũng trở nên nhiều hơn và trật tự thay đổi. Nói một cách chặt chẽ, các mức năng lượng của ^{27}Al được điền đầy theo trật tự các mức năng lượng hạt đơn lẻ của hạt nhân biến dạng. Thêm nữa, còn có chuyển động tập hợp, làm cho các mức năng lượng rất phức tạp. So với các mức năng lượng theo lý thuyết, chúng ta có, tương ứng với những mức năng lượng của hạt nhân hình cầu có cùng mức J^p như sau,

$$\text{Trạng thái cơ bản:}\qquad J^p = \left(\frac{5}{2}\right)^+, E = 0\,,$$

$$\text{Các trạng thái kích thích:}\qquad J^p = \left(\frac{1}{2}\right)^+, E = 2,463\ \text{MeV}\,,$$

$$J^p = \left(\frac{3}{2}\right)^+, E = 4,156\ \text{MeV}\,;$$

tương ứng với những mức năng lượng hạt đơn lẻ của hạt nhân biến dạng

$$\text{Trạng thái cơ bản:}\qquad K^p = \left(\frac{5}{2}\right)^+, E = 0\,,$$

$$\text{Các trạng thái kích thích:}\qquad K^p = \left(\frac{1}{2}\right)^+, E = 0,452\ \text{MeV}\,,$$

$$K^p = \left(\frac{1}{2}\right)^+, E = 2,463 \text{ MeV},$$

$$K^p = \left(\frac{1}{2}\right)^-, E = 3,623 \text{ MeV},$$

$$K^p = \left(\frac{3}{2}\right)^+, E = 4,196 \text{ MeV},$$

Cũng như vậy, mỗi K^p tương ứng với một dải năng lượng quay - tập thể của hạt nhân được cho bởi

$$E_J = \frac{\hbar^2}{2I}[J(J+1) - K(K+1)],$$

trong đó $K \neq 1/2, J = K, K+1, \ldots$.

$$E_J = \frac{\hbar^2}{2I}\left[J(J+1) - \frac{3}{4} + a - a(-1)^{J+1/2}\left(J + \frac{1}{2}\right)\right],$$

trong đó $K = 1/2, J = K, K+1, \ldots$.

Ví dụ, với các dải quay $\left(\frac{5}{2}\right)^+ (0)$, $\left(\frac{7}{2}\right)^+ (1,613)$, $\left(\frac{9}{2}\right)^+ (3,425)$, ta có $K = \frac{5}{2}$,

$$\left(\frac{\hbar^2}{2I}\right)[(K+1)(K+2) - K(K+1)] = 1,613 \text{ MeV},$$

$$\left(\frac{\hbar^2}{2I}\right)[(K+2)(K+3) - K(K+1)] = 3,425 \text{ MeV}.$$

cho $\frac{\hbar^2}{2I} \approx 0,222$ MeV. Với các dải quay $\left(\frac{1}{2}\right)^+ (0,452)$, $\left(\frac{3}{2}\right)^+ (0,944)$, $\left(\frac{5}{2}\right)^+ (1,790)$, $\left(\frac{7}{2}\right)^+ (2,719)$, $\left(\frac{9}{2}\right)^+ (4,027)$, ta có

$$\frac{\hbar^2}{2I} \approx 0,150 \text{ MeV}, \qquad a \approx -3,175 \times 10^2.$$

Tương tự, với $\left(\frac{1}{2}\right)^- (3,623)$, $\left(\frac{7}{2}\right)^- (3,497)$ và $\left(\frac{3}{2}\right)^- (3,042)$ ta có

$$\frac{\hbar^2}{2I} \approx 0,278 \text{ MeV}, \qquad a \approx 5,092.$$

2074

Mẫu hiện tại đối với những trạng thái hạt nhân tập thể coi những trạng thái này dưới dạng tương tác của các boson. Với một loạt các trạng thái mà có thể mô tả như sự chồng chập đối xứng của các boson S và D (nghĩa là của spin 0 và 2 tương ứng), spin của các trạng thái có $N_d = 0, 1, 2$ và 3 boson là bao nhiêu? Nếu năng lượng của boson S là E_s, năng lượng của boson D là E_d, và có tương tác dư giữa các cặp boson D của hằng số cường độ α, phổ của các trạng thái có $N_s + N_d = 3$ boson như thế nào?

(*Princeton*)

Lời giải:

Khi $N_d = 0$, spin là 0,

$N_d = 1$, spin là 2,

$N_d = 2$, spin là 4,2,0,

$N_d = 3$, spin là 6, 4, 2, 0.

Với các trạng thái có $N_s + N_d = 3$, khi

$$N_d = 0 : N_s = 3, \qquad E = 3E_s ,$$

$$N_d = 1 : N_s = 2, \qquad E = E_d + 2E_s ,$$

$$N_d = 2 : N_s = 1, \qquad E = 2E_d + E_s + \alpha ,$$

$$N_d = 3 : N_s = 0, \qquad E = 3E_d + 3\alpha .$$

2075

Một mẫu đơn giản hóa của một tương tác hạt nhân phức tạp là lực tạo cặp, được đặc trưng bởi Hamintonian có dạng

$$H = -g \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} ,$$

Trong không gian của tập hợp – hai – hạt đồng nhất với một quỹ đạo đơn j, với các trạng thái cơ sở được cho bởi $(-1)^{j-m}|jm\rangle|j-m\rangle$. Tương tác này có một trạng thái riêng lẻ nổi tiếng. Năng lượng và spin của nó là bao nhiêu? Spin và năng lượng của các trạng thái còn lại của hệ hai hạt là bao nhiêu?

(*Princeton*)

Lời giải:

Giả sử H là ma trận vuông $(j+\frac{1}{2})\times(j+\frac{1}{2})$. Trạng thái riêng có thể được viết dưới dạng

$$\Psi^{N=2}=\left(j+\frac{1}{2}\right)^{-1/2}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\\1\end{pmatrix},$$

trong đó ma trận cột có hạng $(j+\frac{1}{2})\times 1$. Như vậy

$$\hat{H}\Psi^{N=2}=-g\left(j+\frac{1}{2}\right)\Psi^{N=2}.$$

Do đó, trị riêng của năng lượng của $\Psi^{N=2}$ là $-g\left(j+\frac{1}{2}\right)$. Do lực tương tác cặp chỉ tác dụng lên các trạng thái có $J=0$, nên spin là 0.

Vì tổng các trị riêng năng lượng bằng vết của ma trận $\hat{H}$, $-g\left(j+\frac{1}{2}\right)$, và H là đại lượng âm, tất cả những trạng thái riêng trực giao của $\Psi^{N=2}$ có trị riêng năng lượng bằng 0, tương ứng với momen là $J=2,4,6\ldots$, vv.

5. PHÂN RÃ HẠT NHÂN (2076–2107)

2076

Ngay từ thủa ban đầu (1911), dạng của định luật Geiger – Nuttall mô tả mối liên hệ giữa tầm của hạt α: (R_α) và hằng số phân rã (λ) trong hiện tượng phóng xạ α tự nhiên là quan hệ tuyến tính giữa $\lg\lambda$ và $\lg R$. Sau đó, quy luật này được thay thế bằng mối quan hệ gần đúng tuyến tính giữa $\log\lambda$ và lũy thừa bậc nào đó của năng lượng hạt α, $E^x(\alpha)$.

Giải thích mối quan hệ giữa hằng số phân rã và năng lượng bằng cơ lượng tử. Thêm nữa, bằng những đặc trưng chung đã biết của hạt nhân nguyên tử, giải thích tại sao có sự phụ thuộc rất mạnh của λ vào $E(\alpha)$. (Ví dụ, từ $E(\alpha) = 5,3$ MeV đối với Po^{210} tới $E(\alpha) = 7,7$ MeV đối với Po^{214}, λ tăng với hệ số 10^{10}, từ chu kì bán rã khoảng 140 ngày tới còn $1,6 \times 10^{-4}$ s.)

(*Columbia*)

Lời giải:

Phân rã α có thể coi là sự truyền một hạt α qua hàng rào thế của hạt nhân con. Tương tự như điều được chỉ ra trên hình 2.7, trong đó R là bán kính hạt nhân, r_1 là điểm tại đó thế năng của lực đẩy Coulomb $V(r) = Zze^2/r$ bằng với năng lượng E của hạt α. Sử dụng thế năng ba chiều và bỏ qua momen động lượng, ta có thể thu được hệ số truyền T bằng phương pháp W. K. B

$$T = e^{-2G},$$

trong đó

$$G = \frac{1}{\hbar}\int_R^{r_1} (2m|E - V|)^{1/2} dr,$$

với $V = zZe^2/r$, $E = zZe^2/r_1$, $z = 2$, Ze là điện tích của hạt nhân con. Tích phân cho ta

$$G = \frac{1}{\hbar}(2mzZe^2 r_1)^{1/2}\left[\arccos\left(\frac{R}{r_1}\right) - \left(\frac{R}{r_1} - \frac{R^2}{r_1^2}\right)^{1/2}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{R}{r_1}\to 0} \frac{1}{\hbar}(2mzZe^2 r_1)^{1/2}\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{R}{r_1}\right)^{1/2}\right].$$

Giả sử hạt α có vận tốc v_0 trong giếng thế. Sau đó nó va chạm với thành giếng $\frac{v_0}{R}$ lần trên một đơn vị thời gian và với xác suất phân rã trên một đơn vị thời gian là $\lambda = v_0 T/R$. Như vậy

$$\ln\lambda = -\frac{\sqrt{2m}BR\pi}{\hbar}\left(E^{-\frac{1}{2}} - \frac{2}{\pi}B^{-\frac{1}{2}}\right) + \ln\frac{v_0}{R},$$

trong đó $B = zZe^2/R$. Đây chính là mối quan hệ tuyến tính giữa $\log\lambda$ và $E^{-1/2}$ của các hạt phát xạ α trong cùng một dãy phóng xạ.

Với $_{84}$Po,

$$\log_{10}\frac{T(^{210}Po)}{T(^{214}Po)} = 0,434[\ln\lambda(^{214}Po) - \ln\lambda(^{210}Po)]$$

$$= 0,434 \times \sqrt{2mc^2}zZ\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{E_{210}}} - \frac{1}{\sqrt{E_{214}}}\right)$$

$$= \frac{0,434 \times \sqrt{8 \times 940} \times 2 \times (84-2)}{137}\left(\frac{1}{\sqrt{5\cdot 3}} - \frac{1}{\sqrt{7\cdot 7}}\right)$$

$$\approx 10.$$

Như vậy, sự khác biệt về thời gian sống khoảng 10 bậc độ lớn.

2077

Chu kì bán rã của một đồng vị phóng xạ phụ thuộc rất mạnh vào năng lượng giải phóng trong phân rã. Sự phụ thuộc năng lượng của chu kì bán rã tuy nhiên lại rất khác nhau trong phát xạ α và phát xạ β.

(a) Tìm quy luật riêng đối với phân rã α.

(b) Trình bày tại sao quy luật của phân rã β lại khác so với phân rã α bằng cách thảo luận chi tiết sự khác biệt giữa hai quá trình này.

(*Columbia*)

Lời giải:

(a) Đối với những kết quả thu được từ cơ học lượng tử của định luật Geiger – Nuttall cho phân rã α xem **Bài tập 2076**.

(b) Trong khi phân rã α có thể được coi là sự truyền một hạt α xuyên qua rào thế Coulomb để thoát khỏi hạt nhân con, thì phân rã β là kết quả của sự biến đổi một nơtron trong hạt nhân thành một proton vẫn tồn tại trong hạt nhân một electron và một phản nơtrino là những hạt được phát ra. Fermi đã thu được phổ hạt β sử dụng phương pháp tương tự như trong ghi nhận phổ gama. Xác suất chuyển đổi trên một đơn vị thời gian được biểu diễn bằng quy tắc vàng số 2 của Fermi

$$\omega = \frac{2\pi}{\hbar}|H_{fi}|^2\rho(E),$$

trong đó E là năng lượng phân rã, H_{fi} là phần tử ma trận chuyển đổi và $\rho(E) = \frac{dN}{dE}$ là số trạng thái trên một đơn vị khoảng năng lượng.

Với năng lượng phân rã E, số trạng thái của electron trong một khoảng xung lượng p_e và $p_e + dp_e$ là

$$dN_e = \frac{V4\pi p_e^2 dp_e}{(2\pi\hbar)^3} ,$$

trong đó V là thể tích chuẩn hóa. Tương tự với hạt phản nơtrino, ta có

$$dN_\nu = \frac{4\pi p_\nu^2 dp_\nu}{(2\pi\hbar)^3} ,$$

như vậy $dN = dN_e dN_\nu$. Tuy nhiên, p_e và p_ν không độc lập. Chúng liên hệ với nhau thông qua năng lượng $E_e = \sqrt{p_e^2c^2 + m_e^2c^4}$, $E_\nu = p_\nu c$ bởi $E = E_e + E_\nu$. Ta có thể viết $p_\nu = \frac{E-E_e}{c}$, và với E_e đã biết, $dp_\nu = \frac{dE_\nu}{c} = \frac{dE}{c}$. Như vậy

$$\frac{dN}{dE} = \int \frac{dN_e dN_\nu}{dE} = \frac{V^2}{4\pi^4\hbar^6c^3}\int_0^{p_{\max}} (E - E_e)^2 p_e^2 dp_e ,$$

trong đó $p_{\max}$ tương ứng với điểm cuối của phổ β $E_0 \approx E$, và do đó

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar}|H_{fi}|^2\frac{dN}{dE} = \frac{g^2|M_{fi}|^2}{2\pi^3\hbar^7c^3}\int_0^{p_{\max}} (E - \sqrt{p_e^2c^2 + m_e^2c^4})^2 p_e^2 dp_e ,$$

trong đó $M_{fi} = \frac{VH_{fi}}{g}$ và g là hằng số liên kết.

Dưới dạng động năng T, do

$$E_e = T + m_ec^2 = \sqrt{p_e^2c^2 + m_e^2c^4} , \qquad E = T_0 + m_ec^2 ,$$

tích phân trên có thể viết lại dưới dạng

$$\int_0^{T_0} (T + m_ec^2)(T^2 + 2m_ec^2T)^{\frac{1}{2}}(T_0 - T)^2 dT .$$

Điều này chỉ ra rằng với phân rã β

$$\lambda \sim T_0^5 ,$$

đây là cơ sở của đường cong Sargent.

Mối quan hệ này khá khác biệt so với quan hệ trong phân rã α,

$$\lambda \sim \exp\left(-\frac{c}{\sqrt{E}}\right) ,$$

trong đó E là năng lượng phân rã và C là hằng số.

2078

Vàng tự nhiên $^{197}_{79}$Au là chất phóng xạ vì nó không bền trước phân rã α với năng lượng 3,3 MeV. Xác định thời gian sống của $^{197}_{79}$Au để giải thích tại sao vàng không đốt cháy một lỗ trong túi bạn.

(*Princeton*)

Lời giải:

Theo quy luật Geiger – Nuttal

$$\log_{10}\lambda = C - DE_\alpha^{-1/2},$$

trong đó C, D là hằng số phụ thuộc vào Z, và có thể tính được bằng lý thuyết lượng tử, E_α là năng lượng hạt α, có thể sử dụng để tính thời gian sống của ^{197}Au. Trong xác định gần đúng, có thể sử dụng giá trị C, D đối với Pb, $C \approx 52$, $D \approx 140$ (MeV)$^{\frac{1}{2}}$. Như vậy

$$\lambda \approx 10^{(52-140E^{-1/2})} \approx 10^{-25}\ s^{-1}$$

và do đó

$$T_{1/2} = \frac{1}{\lambda}\ln 2 \approx 6,9 \times 10^{24}\ s \approx 2,2 \times 10^{17}\ \text{năm}.$$

Như vậy, số phân rã trong cuộc đời một người là quá nhỏ, không cần quan tâm.

2079

Chu kì rã của ^{239}Pu được xác định bằng cách nhúng khối cầu ^{239}Pu có khối lượng $120,1$ gam trong nitơ lỏng có thể tích đủ để ngừng toàn bộ các hạt α và đo tốc độ bay hơi của chất lỏng. Tốc độ bay hơi tương ứng với công suất $0,231\ W$. Tính trong 100 năm gần nhất, chu kì bán rã của ^{239}Pu, biết rằng năng lượng của hạt α phân rã là 5,144 MeV. (Tính cả năng lượng của hạt nhân lùi). Cho các hệ số chuyển đổi sau:
1 MeV $= 1,60206 \times 10^{-13}$ jun
1 đơn vị khối lượng nguyên tử đvklnt $= 1,66 \times 10^{-24}$ g (*SUNY, Buffalo*)

Lời giải:

Phân rã xảy ra như sau $^{239}Pu \to \alpha + ^{235}U$.

Năng lượng hạt nhân lùi ^{235}U là

$$E_u = \frac{p_u^2}{2M_u} = \frac{p_\alpha^2}{2M_u} = \frac{2M_\alpha E_\alpha}{2M_u} = \frac{4}{235}E_\alpha \,.$$

Năng lượng được giải phóng trong phân rã α là

$$E = E_u + E_\alpha = \frac{239}{235}E_\alpha = 5,232 \text{ MeV}\,.$$

Tốc độ phân rã là

$$\frac{dN}{dt} = \frac{0,231}{5,232 \times 1,60206 \times 10^{-13}} = 2,756 \times 10^{11}\ s^{-1}\,.$$

Số hạt ^{239}Pu là

$$N = \frac{120,1 \times 5,61 \times 10^{26}}{239 \times 939} = 3,002 \times 10^{23}\,.$$

Chu kì rã nửa là

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{N \ln 2}{\frac{dN}{dt}} = \frac{3,002 \times 10^{23} \times \ln 2}{2,756 \times 10^{11}} = 7,55 \times 10^{11}\ s = 2,39 \times 10^4 \text{ năm}\,.$$

2080

^{8}Li là một ví dụ về vật phát xạ hạt phân rã β. Trạng thái cơ bản của ^{8}Li có chu kì bán rã 0,85 s và phân rã thành Be ở mức 2,9 MeV như hình 2.24. Mức 2,9 MeV sau đó phân rã thành hai hạt α với chu kì bán rã là 10^{-22} s.

(a) Số chẵn lẻ của mức 2,9 MeV trong ^{8}Be bằng bao nhiêu? Hãy đưa ra lý do.

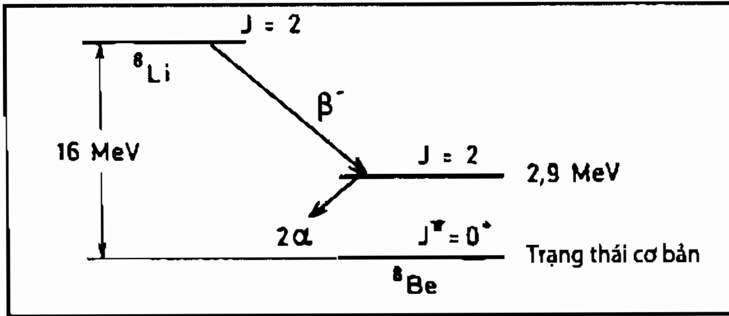
(b) Tại sao chu kì bán rã của ^{8}Be ở mức 2,9 MeV lại nhỏ hơn rất nhiều so với chu kì bán rã của ^{8}Li ở trạng thái cơ bản?

(c) So với trạng thái cơ bản của ^{8}Be, năng lượng ngưỡng bắt nơtron của ^{7}Li nằm ở đâu? Tại sao?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Spin – chẵn lẻ của hạt α là $J^p = 0^+$. Trong phản ứng $^8Be \to \alpha + \alpha$, do trạng thái phân rã cuối cùng của nó là hai boson đồng nhất, hàm sóng đòi



Hình 2.24

hỏi phải là đối xứng - trao đổi. Điều này nghĩa là số lượng tử quỹ đạo l có liên quan của hạt α phải là chẵn, và do đó, tính chẵn của trạng thái cuối của hệ hai hạt α là

$$\pi_f = (+1)^2(-1)^l = +1\,.$$

Do phân rã α là một quá trình tương tác mạnh (chu kì bán rã đặc biệt ngắn), số chẵn lẻ được bảo toàn. Vì vậy, số chẵn lẻ của trạng thái kích thích 2,9 MeV của ^{8}Be là dương.

(b) Phân rã β của trạng thái cơ bản trong ^{8}Li là một quá trình tương tác yếu. Tuy nhiên, phân rã α của trạng thái 2,9 MeV của ^{8}Be là quá trình tương tác mạnh với rào thế Coulomb thấp. Sự khác biệt giữa hai cường độ tương tác dẫn đến sự khác biệt lớn về thời gian sống.

(c) Năng lượng ngưỡng của phản ứng bắt nơtron ^{7}Li cao hơn trạng thái cơ bản của ^{8}Be vì

$$M(^7\mathrm{Li}) + m(n) - M(^8Be) = M(^7\mathrm{Li}) + m(n) - M(^8\mathrm{Li})$$
$$+ M(^8\mathrm{Li}) - M(^8Be) = S_n(^8\mathrm{Li}) + 16\ \mathrm{MeV}\,.$$

trong đó $S_n(^8\mathrm{Li})$ là năng lượng của quá trình tách ^{8}Li thành ^{7}Li và một nơtron. Do

$$S_n(^8\mathrm{Li}) = M(^7\mathrm{Li}) + M_n(n) - M(^8\mathrm{Li}) = 7,018223 + 1,00892 - 8,025018$$
$$= 0,002187\ \text{đvklnt} = 2,0\ \mathrm{MeV}\,,$$

ngưỡng của phản ứng bắt nơtron gây bởi ^{7}Li cao hơn khoảng 18 MeV so với trạng thái cơ bản của ^{8}Be. Chú ý rằng, do ^{8}Li nằm ngoài đường cong bền với

phân rã β, năng lượng cần thiết để loại một nơtron ra khỏi hạt nhân là rất nhỏ.

2081

Những khối lượng nguyên tử sau đây được xác định (theo đơn vị khối lượng nguyên tử):

(1) ${}^{7}_{3}\text{Li}$ $7,0182$
${}^{7}_{4}Be$ $7,0192$

(2) ${}^{13}_{6}C$ $13,0076$
${}^{13}_{7}N$ $13,0100$

(3) ${}^{19}_{9}F$ $19,0045$
${}^{19}_{10}Ne$ $19,0080$

(4) ${}^{34}_{15}P$ $33,9983$
${}^{34}_{16}S$ $33,9978$

(5) ${}^{35}_{16}S$ 34.9791
${}^{35}_{17}Cl$ $34,9789$

Nhớ rằng khối lượng của electron là 0,00055 đvklnt, hãy cho biết nuclit không bền của mỗi cặp, chế độ phân rã và năng lượng gần đúng giải phóng trong phân rã. Đưa ra điều kiện cho sự ổn định mà bạn sử dụng.

(*Columbia*)

Lời giải:

Do mỗi cặp nguyên tố đồng khối có nguyên tử số khác nhau một, chỉ có phân rã β hoặc phản ứng bắt electron có thể xảy ra giữa chúng.

Xét phân rã β. Gọi M_x, M_y, m_e lần lượt là khối lượng của hạt nhân mẹ, hạt nhân con và electron. Như vậy, năng lượng được giải phóng trong phân rã β là $E_d(\beta^-) = [M_x(Z,A) - M_y(Z+1,A) - m_e]c^2$. Biểu diễn mối quan hệ này theo đơn vị đvklnt và bỏ qua sự chênh lệch về năng lượng liên kết của các electron trong các nguyên tử và lớp vỏ khác nhau, ta có

$$E_d(\beta^-) = [M_x(Z,A) - Zm_e - M_y(Z+1,A) + (Z+1)m_e - m_e]c^2$$
$$= [M_x(Z,A) - M_y(Z+1,A)]c^2\,,$$

trong đó M là khối lượng nguyên tử. Vậy phân rã β chỉ có thể xảy ra khi

$M_x > M_y$. Tương tự đối với phân rã β^+, ta có

$$E_d(\beta^+) = [M_x(Z,A) - M_y(Z-1,A) - 2m_e]c^2 \,,$$

điều kiện để có phân rã β^+ là $M_x - M_y > 2m_e = 0,0011$ đvklnt. Với cùng một cách tính như trên, ta có năng lượng giải phóng ra khi xảy ra hiện tượng bắt electron (thường ở lớp vỏ K) là

$$E_d(i) = [M_x(Z,A) - M_y(Z-1,A)]c^2 - W_i \,.$$

trong đó W_i là năng lượng liên kết của một electron với lớp vỏ thứ i, ~ 10 eV hay $1,1 \times 10^{-8}$ đvklnt đối với lớp vỏ K. Vì vậy điều kiện để có thể xảy ra hiện tượng này là $M_x - M_y > W_i/c^2$

Đặt $\Delta = M(Z+1,A) - M(Z,A)$.

Cặp (1) có $\Delta = 0,001$ đvklnt $< 0,0011$ đvklnt, ${}^{7}_{4}$Be không bền xảy ra hiện tượng bắt electron ở lớp vỏ K.

Cặp (2) có $\Delta = 0,0024$ đvklnt $> 0,0011$ đvklnt, ${}^{13}_{7}$N không bền xảy ra phân rã β và hiện tượng bắt electron ở lớp vỏ K.

Cặp (3) có $\Delta = 0,0035$ đvklnt $> 0,0011$ đvklnt, ${}^{19}_{10}$Ne không bền xảy ra phân rã β^+ và hiện tượng bắt electron ở lớp vỏ K.

Cặp (4) có $\Delta = -0,0005$ đvklnt, ${}^{34}_{15}$P không bền xảy ra phân rã β^-.

Cặp (5) có $\Delta = -0,0002$ đvklnt, ${}^{35}_{16}$S không bền xảy ra phân rã β^-.

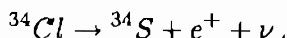
2082

^{34}Cl phân rã positron tạo ra ^{34}S. Hãy vẽ phổ của số positron phát ra theo xung lượng p. Nếu khối lượng hạt nhân nguyên tử của ^{34}Cl và ^{34}S hơn kém nhau 5,52 MeV/c^2 thì năng lượng lớn nhất của positron là bao nhiêu?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Quá trình phân rã ^{34}Cl diễn ra như sau



$${}^{34}Cl \to {}^{34}S + e^+ + \nu \,.$$

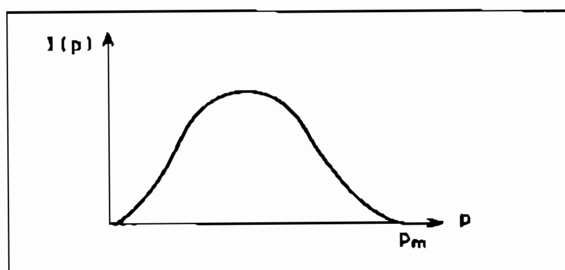
Quá trình này tương tự như phân rã β^-. Số phân rã trong một đơn vị thời gian - phát ra một positron có xung lượng nằm trong khoảng p và $p + dp$ là (**Bài tập 2077(b)**)

$$I(p)dp = \frac{g^2|M_{fi}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3}(E_m - E)^2 p^2 dp \,,$$

trong đó E_m là điểm năng lượng cuối của phổ β^+. Như vậy, $I(p)$ tỉ lệ với $(E_m - E)^2p^2$ như hình 2.25. Năng lượng lớn nhất của hạt β^+ là

$$E_{\max\beta^-} = [M(^{34}Cl) - M(^{34}S) - 2m_e]c^2 = 5,52 \text{ MeV} - 1,022 \text{ MeV}$$

$$= 4,50 \text{ MeV}.$$



Hình 2.25

2083

Cả ^{161}Ho và ^{163}Ho đều phân rã thành đồng vị của Dy bằng cách bắt electron, nhưng giá trị Q_{EC} lần lượt là 850 keV và 2,5 keV. (Q_{EC} là khối lượng chênh lệch giữa trạng thái nghỉ và trạng thái ban đầu của hạt nhân cộng với các electron nguyên tử). Năng lượng liên kết của các electron của D_y được liệt kê trong bảng dưới đây. Trong phản ứng bắt electron của ^{161}Ho, tần xuất bắt các electron ở quỹ đạo $3p_{1/2}$ gần bằng 5% tần xuất bắt các electron ở quỹ đạo $3s$. Hãy cho biết tần xuất này thay đổi như thế nào đối với ^{161}Ho và ^{163}Ho nếu giá trị Q_{EC} không đổi nhưng cho rằng nơtrino có khối lượng là 50 eV?

Quỹ đạo	Năng lượng liên kết (keV)
1s	54
2s	9
$2p_{1/2}$	8,6
3s	2,0
$3p_{1/2}$	1,8

(*Princeton*)

Lời giải:

Do ^{161}Ho và ^{163}Ho có cùng điện tích hạt nhân Z, hàm sóng của electron

quỹ đạo của hai đồng vị này giống nhau, hàm sóng của electron ở quỹ đạo 3s và $3p_{1/2}$ chỉ có pha khác nhau. Vì vậy, các phần tử ma trận chuyển dời trong hiện tượng bắt electron cũng giống nhau.

Hằng số phân rã được xác định như sau

$$\lambda \approx A|M_{if}|^2\rho(E)\,,$$

trong đó M_{if} là phần tử ma trận chuyển dời, $\rho(E)$ là mật độ trạng thái, A là một hằng số. Trong phản ứng bắt electron, các hạt nhân chỉ hấp thụ một nơtrino nên quá trình này là một quá trình có hai vật. Ta có

$$\rho(E) \propto E_\nu^2 \approx (Q_{EC} - B)^2\,,$$

trong đó B là năng lượng liên kết của một electron ở quỹ đạo s hoặc p. Do

$$\frac{\lambda(3p_{1/2})}{\lambda(3s)} = \frac{|M(3p_{1/2})|^2(Q_{EC} - B_p)^2}{|M(3s)|^2(Q_{EC} - B_s)^2} = 0,05,$$

$$\frac{|M(3p_{1/2})^2}{|M(3s)|^2} = 0,05 \times \left(\frac{850 - 2,0}{850 - 1,8}\right)^2 = 0,04998\,.$$

Do vậy, với ^{163}Ho, ta có kết quả sau

$$\frac{\lambda(3p_{1/2})}{\lambda(3s)} = \frac{|M(3p_{1/2})|^2(Q_{EC} - B_p)^2}{|M(3s)|^2(Q_{EC} - B_s)^2}$$

$$= 0,04998 \times \left(\frac{2,5 - 1,8}{2,5 - 2,0}\right)^2 \approx 9,8\%\,.$$

Nếu $m_\nu = 50$ eV, do công thức $E_\nu^2 = p_\nu^2 + m_\nu^2$, số không gian pha trong $P(E)$ thay đổi như sau

$$p_\nu^2\frac{dp_\nu}{dE_\nu} = (E_\nu^2 - m_\nu^2)\frac{E_\nu}{p_\nu} = E_\nu\sqrt{E_\nu^2 - m_\nu^2} \approx E_\nu^2\left(1 - \frac{m_\nu^2}{2E_\nu^2}\right)\,.$$

Vì vậy, hằng số phân rã đối với mọi kênh cho ^{161}Ho và ^{163}Ho thay đổi từ λ_0 đến λ

$$\lambda \approx \lambda_0\left(1 - \frac{1}{2}\frac{m_\nu^2}{E_\nu^2}\right)\,,$$

hay

$$\frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0} \approx \frac{1}{2}\frac{m_\nu^2}{E_\nu^2}\,.$$

Do đó, với hạt nhân ^{161}Ho, trạng thái $3s$ có

$$\frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0} = \frac{1}{2} \times \frac{50^2}{848^2 \times 10^6} = 1,74 \times 10^{-9},$$

trạng thái $3p_{1/2}$ có:

$$\frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0} = \frac{1}{2} \times \frac{50^2}{848,2^2 \times 10^6} = 1,74 \times 10^{-9};$$

với hạt nhân ^{163}Ho, trạng thái 3s có

$$\frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0} = \frac{1}{2} \times \frac{50^2}{0,5 \times 10^6} = 5 \times 10^{-3},$$

trạng thái $3p_{1/2}$ có

$$\frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0} = \frac{1}{2} \times \frac{50^2}{0,7^2 \times 10^6} = 2,25 \times 10^{-3}.$$

2084

Một nguyên tố có nguyên tử số Z thấp có thể phân rã β positron được. Gọi p_0 là động lượng cực đại có thể của positron, giả sử $p_0 \ll mc$ (m là khối lượng của positron) và gọi Γ_β là tốc độ phân rã beta. Một quá trình thay thế khác gọi là bắt giữ K, trong đó, hạt nhân bắt một electron ở lớp vỏ K và phát ra một nơtrino. Gọi Γ_K là tốc độ phân rã của hiện tượng này. Hãy tính tỉ số Γ_K/Γ_β. Có thể coi hàm sóng của electron ở lớp vỏ K giống hàm sóng tương tự hydro và có thể bỏ qua năng lượng liên kết electron.

(*Princeton*)

Lời giải:

Theo lý thuyết nhiễu loạn lượng tử, xác suất xảy ra phân rã β^+ trong một đơn vị thời gian ứng với năng lượng phân rã E là

$$\omega = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\int \psi_f^* H \psi_i d\tau\right|^2 \frac{dn}{dE},$$

trong đó ψ_i là hàm sóng của trạng thái đầu, ψ_f là hàm sóng của trạng thái cuối và $\frac{dn}{dE}$ là số trạng thái cuối trên một khoảng đơn vị của năng lượng E (hay còn gọi là mật độ của các trạng thái cuối). Do trạng thái cuối có 3 hạt (hạt nhân,

β^+ và ν), $\psi_f = u_f\phi_\beta\phi_\nu$ (giả thiết các hạt ở trạng thái cuối không tương tác với nhau, nếu có thì tương tác này rất yếu), trong đó u_f là hàm sóng của hạt nhân ở trạng thái cuối, ϕ_β, ϕ_ν lần lượt là hàm sóng của positron và nơtrino.

Theo lý thuyết của Fermi về phân rã β, H được coi là một hằng số. Đặt nó là g. Hơn nữa, β^+ và nơtrino được coi là các hạt tự do nên ta có thể biểu diễn lại hàm sóng dưới dạng sóng phẳng như sau

$$\phi_\beta^* = \frac{1}{\sqrt{V}}e^{-i\mathbf{k}_\beta\cdot\mathbf{r}}, \qquad \phi_\nu^* = \frac{1}{\sqrt{V}}e^{-i\mathbf{k}_\nu\cdot\mathbf{r}},$$

trong đó V là thể tích chuẩn hóa, $\mathbf{k}_\beta$ và $\mathbf{k}_\nu$ lần lượt là các vectơ sóng của các hạt β^+ và nơtrino. Đặt

$$\int \psi_i u_f^* e^{-i(\mathbf{k}_\beta+\mathbf{k}_\nu)\cdot\mathbf{r}}d\tau = M_{fi}\,.$$

Trạng thái cuối là trạng thái có 3 hạt và dn là tích của số các trạng thái của hạt nhân ở trạng thái cuối, β^+ và nơtrino. Đối với phân rã β^+, số các trạng thái cuối cùng là 1, trong khi đó số trạng thái của hạt β^+ ứng với xung lượng nằm trong khoảng p đến $p + dp$ là

$$dn_\beta = \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3}V\,,$$

và số trạng thái của nơtrino là

$$dn_\nu = \frac{4\pi p_\nu^2 dp_\nu}{(2\pi\hbar)^3}V\,.$$

Do đó

$$\frac{dn}{dE} = \frac{dn_\beta dn_\nu}{dE} = \frac{p^2p_\nu^2 dp dp_\nu}{4\pi^4\hbar^6 dE}V^2\,.$$

Tổng năng lượng của hạt β^+ và nơtrino bằng năng lượng phân rã E (bỏ qua sự giật lùi của hạt nhân)

$$E_e + E_\nu \approx E\,,$$

và với năng lượng positron đã biết E_e, $dE_\nu = dE$. Năng lượng nghỉ của nơtrino bằng 0 hoặc rất nhỏ nên, $E_\nu = cp_\nu$, và

$$p_\nu = (E - E_e)/c, \qquad dp_\nu = \frac{dE}{c}\,.$$

Vì vậy

$$\frac{dn}{dE} = \frac{(E - E_e)^2 p^2 dp}{4\pi^4 \hbar^6 c^3} V^2 .$$

Mà

$$\omega = \int I(p) dp ,$$

biến đổi từ các biểu thức trên ta có

$$I(p)dp = \frac{g^2 |M_{fi}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} (E - E_e)^2 p^2 dp .$$

Tốc độ phân rã β^+ Γ_β là

$$\Gamma_\beta = \int_0^{p_0} I(p)dp = B \int_0^{p_0} (E - E_e)^2 p^2 dp ,$$

trong đó

$$B = \frac{g^2 |M_{fi}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3}$$

và p_0 là giá trị xung lượng lớn nhất, tương ứng với một động năng lớn nhất $E_0 \approx E$. Do $E_0 \ll m_e c^2$, và như vậy $E_0 = \frac{p_0^2}{2m_e}$, $E_e \approx \frac{p^2}{2m_e}$, ta có

$$\begin{aligned} \Gamma_\beta &= B \int_0^{p_0} \frac{1}{(2m_e)^2} (p_0^4 + p^4 - 2p_0^2 p^2) p^2 dp \\ &= \frac{B p_0^7}{4m_e^2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{7} - \frac{2}{5} \right) \\ &\approx 1,9 \times 10^{-2} \frac{B p_0^7}{m_e^2} . \end{aligned}$$

Trong hiện tượng bắt giữ K, trạng thái cuối cùng là hệ hai hạt, do đó nơtrino đơn năng được phát xạ. Xét

$$\Gamma_K = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \int \psi_f^* H \psi_i d\tau \right|^2 \frac{dn}{dE} .$$

Hàm sóng của trạng thái cuối cùng ψ_f^* là tích của hàm sóng của hạt nhân con u_f^* và hàm sóng của nơtrino ϕ_ν^*. Nơtrino có thể coi là hạt tự do và hàm sóng của nó là sóng phẳng

$$\phi_\nu^* = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-i\mathbf{k}_\nu \cdot \mathbf{r}} .$$

Hàm sóng ban đầu được tính xấp xỉ bằng tích của hàm sóng của hạt nhân mẹ và hàm sóng của electron ở lớp vỏ K

$$\phi_K = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{Zm_e e^2}{\hbar^2}\right)^{3/2} e^{-Zm_e e^2 r/\hbar^2}\,.$$

Khi đó do

$$\left|\int \psi_f^* H \psi_i d\tau\right| = \frac{g}{\sqrt{V\pi}}\left(\frac{Zm_e e^2}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left|\int u_f^* u_i e^{-i\mathbf{k}_\nu\cdot\mathbf{r}} e^{-\frac{Zm_e e^2}{\hbar^2}r} d\tau\right|$$

$$\approx \frac{g}{\sqrt{V\pi}}\left(\frac{Zm_e e^2}{\hbar^2}\right)^{3/2}|M_{fi}|,$$

$$\frac{dn}{dE} = \frac{4\pi V p_\nu^2 dp_\nu}{(2\pi\hbar)^3 dE} = \frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^3}\frac{E_\nu^2}{c^3}\,,$$

coi $E_\nu \approx E$ và bỏ qua sự giật lùi của hạt nhân, ta có

$$\Gamma_K = \frac{m_e^3 g^2 |M_{fi}|^2}{\pi^2\hbar^7 e^3}\left(\frac{Ze^2}{\hbar}\right)^3 E_\nu^2 = 2\pi m_e^3 B\left(\frac{Ze^2}{\hbar}\right)^3 E_\nu^2\,.$$

Bỏ qua năng lượng liên kết của electron, ta có thể coi $E_\nu \approx E_0 + 2m_e c^2 \approx 2m_e c^2$, và như thế

$$\frac{\Gamma_K}{\Gamma_\beta} = \frac{8\pi Z^3}{1,9\times 10^{-2}}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^3\left(\frac{m_e c}{p_0}\right)^7 = 5,1\times 10^{-4} Z^3\left(\frac{m_e c}{p_0}\right)^7\,.$$

Như vậy, $\frac{\Gamma_k}{\Gamma_\beta} \propto \frac{1}{p_0^7}$. Tỉ số này tăng nhanh khi p_0 giảm.

2085

Triti, đồng vị ^{3}H, phân rã beta với chu kì bán rã bằng 12,5 năm. Một mẫu được làm giàu khí hydro chứa 0,1 gam triti tỏa ra 21 cal nhiệt trong một giờ.

(a) Tính năng lượng trung bình mà các hạt β phát ra từ số liệu đó.

(b) Phép đo đặc trưng nào trên phổ của beta (gồm cả hạt nhân phân rã) chỉ ra rằng còn có thêm một sản phẩm phân rã nữa và đó là hạt nhẹ và trung hòa.

(c) Cho một tới hạn, phân tích định lượng như thế nào một phổ beta của triti có thể sử dụng để xác định (hoặc có thể đưa ra một cận giá trị giới hạn) được khối lượng của nơtrino electron.

(*Columbia*)

Lời giải:

(a) Hằng số phân rã là

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{\frac{1}{2}}} = \frac{\ln 2}{12,5 \times 365 \times 24} = 6,33 \times 10^{-6} h^{-1}\,.$$

Do đó

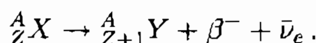
$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N = \frac{0,1 \times 6,023 \times 10^{23}}{3} \times 6,33 \times 10^{-6} = 1,27 \times 10^{17}$$

phân rã trong một giờ và năng lượng trung bình của các hạt β là

$$\bar{E} = \frac{21 \times 4,18}{1,27 \times 10^{17}} = 6,91 \times 10^{-16}\ J = 4,3\ \text{keV}\,.$$

(b) Cả phân rã α và β đều biểu thị các chuyển mức giữa hai trạng thái có năng lượng xác định. Tuy nhiên, phân rã α tạo ra sản phẩm gồm hai hạt là hạt nhân con và hạt $+\alpha$, theo định luật bảo toàn năng lượng và bảo toàn xung lượng thì hạt α phát ra là hạt đơn năng; trong khi đó chuyển mức β là phân rã ba hạt (hạt nhân con, electron hoặc positron và nơtrino), các electron được phát ra có phân bố năng lượng liên tục có giá trị lớn nhất xác định gần bằng năng lượng chuyển mức. Vì vậy phổ α gồm một đường thẳng đứng (hay đỉnh) trong khi đó phổ β liên tục từ 0 đến một điểm cuối có giá trị năng lượng xác định. Một phép đo phổ β chỉ ra bức xạ của hạt thứ ba, một hạt trung hòa. Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng cho thấy hạt đó rất nhẹ.

(c) Pauli đề xuất rằng phân rã β diễn ra như sau



$$^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z+1}Y + \beta^{-} + \bar{\nu}_e\,.$$

Như biểu diễn trên hình 2.25, β^- có phổ năng lượng liên tục với năng lượng lớn nhất là E_m. Khi động năng của $\bar{\nu}_e$ tiến tới 0 thì năng lượng của β tiến tới E_m. Theo định luật bảo toàn năng lượng, ta có

$$M(^{A}_{Z}X) = M(^{A}_{Z+1}Y) + \frac{E_m}{c^2} + m_\nu\,,$$

hay

$$m_\nu = M(^3_1H) - M(^3_2He) - E_m/c^2 .$$

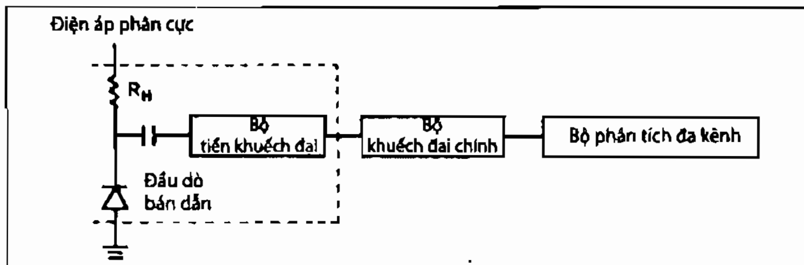
Nếu E_m được đo đạc, khối lượng của nơtrino có thể tính được khối lượng của nó quá nhỏ. Do đó, chỉ có thể xác định được giá trị giới hạn trên.

2086

(a) Miêu tả ngắn gọn phổ năng lượng của hạt anpha và beta được phát ra từ hạt nhân phóng xạ. Làm nổi bật sự khác nhau và giải thích một cách định tính các lý do của sự khác nhau đó.

(b) Vẽ sơ đồ khối của một thiết bị có thể đo được các phổ ở trên. Ước lượng bằng số các thông số cần thiết và giải thích tại sao lại chọn các thông số đó.

(*UC, Berkeley*)



Hình 2.26

Lời giải:

(a) Hạt α phát ra từ một hạt nhân phóng xạ là hạt đơn năng; phổ năng lượng của α gồm các đường thẳng đứng. Còn β có phổ năng lượng liên tục, được giới hạn bởi điểm năng lượng cuối cùng xác định. Bởi vì bức xạ β còn phát kèm theo một nơtrino mang theo một phần năng lượng phân rã.

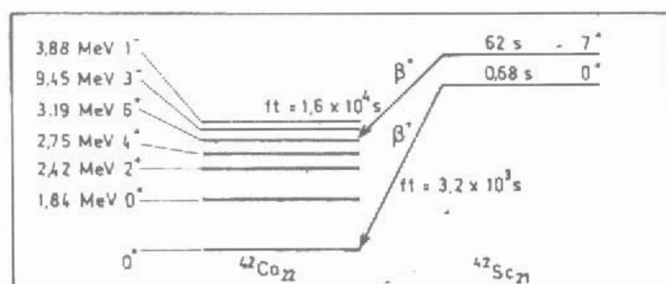
(b) Hình 2.26 là sơ đồ khối của một quang phổ kế bán dẫn α.

Năng lượng của một hạt α sinh ra trong phân rã α thường có giá trị khoảng vài MeV, vì vậy quang phổ kế ở đây sử dụng một đầu dò bán dẫn là một cửa sổ mỏng, bề mặt được phủ một lớp vàng - silic. Đầu dò có độ phân giải năng lượng khoảng 1% tại nhiệt độ phòng. Do năng lượng của hạt α thấp, thì việc sử dụng một lớp bán dẫn dày và nhạy là không cần thiết và hiệu điện thế phân cực có giá trị từ vài chục đến 100 V là đủ. Để có kết quả tốt máy phân tích đa kênh nên có trên 1024 kênh và sử dụng khoảng 10 kênh để đo cả độ rộng ở

nửa cực đại của một đỉnh.

2087

Hai trạng thái thấp nhất của scanđi-42, ${}^{42}_{21}Sc_{21}$, có hai spin là 0^+ và 7^+. Chúng lần lượt phân rã positron trở thành ${}^{42}_{20}Ca_{22}$ ở trạng thái đầu 0^+ và 6^+, với chu kì bán rã positron rút gọn lần lượt là $(\text{ft})_{0^+} = 3,2 \times 10^3$ s, $(\text{ft})_{7^+} = 1,6 \times 10^4$ s. Không có phân rã positron nào được phát hiện ở trạng thái 0^+ với mức năng lượng 1,84 MeV. (Xem hình 2.27.)



Hình 2.27

(a) Hai trạng thái của ^{42}Sc có thể được giải thích một cách đơn giản qua hai nucleon hóa trị với cấu hình $(f_{7/2})^2$. Xác định các trạng thái đã biết của ^{42}Ca phù hợp với cấu hình này. Giải thích ngắn gọn. Cho rằng điện tích độc lập, hãy quy định các số lượng tử spin đồng vị $|T, T_Z\rangle$ đối với tất cả các trạng thái $(f_{7/2})^2$. Phân biệt bản chất của hai chuyển mức beta và giải thích lý do.

(b) Với các hàm sóng thích hợp ứng với trạng thái $|J, M_J\rangle = |7, 7\rangle$ của scanđi-42 và trạng thái $|6, 6\rangle$ của canxi-42, hãy tính tỉ số $(ft)_{7^+}/(ft)_{0^+}$ đối với 2 phân rã positron này.

Với $j = l + \frac{1}{2}$:

$$\hat{S}_-|j, j\rangle = \frac{1}{(2j)^{1/2}}|j, j-1\rangle + \left(\frac{2j-1}{2j}\right)^{1/2}|j-1, j-1\rangle,$$

$$\hat{S}_z|j, j\rangle = \frac{1}{2}|j, j\rangle,$$

$$G_v = 1,4 \times 10^{-49} \text{ erg cm}^3,$$

$$G_A = 1,6 \times 10^{-49} \text{ erg cm}^3 \qquad (Princeton)$$

Lời giải:

(a) Với ^{42}S, $T_z = \frac{1}{2}(Z - N) = 0$. Do momen lượng góc của hai nucleon bằng 7/2 và spin đồng vị bằng 1/2, thực hiện phép cộng vectơ với mỗi spin của hạt nhân là một số nguyên có giá trị từ 0 đến 7 và với mỗi spin đồng vị của hạt nhân là 0 hoặc 1 đơn vị. Theo nguyên lý Pauli tổng quát, yêu cầu hàm sóng toàn phần phải phản đối xứng. Do đó, tổng $J + T$ phải một số lẻ. Vì vậy các trạng thái tương ứng với cấu hình $(f_{7/2})^2$ là $J = 0^+, 2^+, 4^+, 6^+$ khi $T = 1$, và $J = 1^+, 3^+, 5^+, 7^+$ khi $T = 0$.

Sự chuyển mức từ $7^+ \to 6^+$ là một chuyển mức Gamow-Teller khi $\Delta J = 0$ hay 1 ($J_i = 0$ đến $J_f = 0$ bị cấm), $\Delta T = 0$ hay 1, $\pi_i = \pi_f$.

Sự chuyển mức từ $0^+ \to 0^+$ là một chuyển mức Fermi khi $\Delta J = 0$, $\Delta T = 0$, $\pi_i = \pi_f$.

(b) Xác suất xảy ra chuyển mức β trong một đơn vị thời gian là $\Gamma(\beta) \propto G_v^2 \langle M_F \rangle^2 + G_A^2 \langle M_{GT} \rangle^2$, trong đó $\langle M_F \rangle^2$ và $\langle M_{GT} \rangle^2$ là các bình phương của các phần tử ma trận tương tác spin trung bình yếu

$$\langle M_F \rangle^2 = \frac{1}{2J_i + 1} \sum_{M_i, M_f} \langle J_f M_f T_f T_{fz} | 1 \cdot \sum_{k=1}^{A} t_\pm(k) | J_i M_i T_i T_{iz} \rangle^2$$

$$= \langle J_f M T_f T_{fz} | 1 \cdot \sum_{k=1}^{A} t_\pm(k) | J_i M T_i T_{iz} \rangle^2 ,$$

$$\langle M_{GT} \rangle^2 = \frac{1}{2J_i + 1} \sum_{m, M_i, M_f} |\langle J_f M_f T_f T_{fz} | \sum_{k=1}^{A} \sigma_m(k) t_\pm(k) | J_i M_i T_i T_{iz} \rangle|^2 ,$$

với m lấy các giá trị $+1, 0$ và -1 tương ứng với

$$\sigma_{+1} = \sigma_x + i\sigma_y, \quad \sigma_0 = \sigma_z, \quad \sigma_{-1} = \sigma_x - i\sigma_y .$$

Khi đó, chu kì bán rã là

$$ft = \frac{K}{G_v^2 \langle M_F \rangle^2 + G_A^2 \langle M_{GT} \rangle^2} ,$$

trong đó $K = 2\pi^3 \hbar^7 \ln 2 / m^5 c^4$ là một hằng số. Vì vậy

$$\frac{ft(7^+ \to 6^+)}{ft(0^+ \to 0^+)} = \frac{G_v^2 \langle M_F \rangle_{0^+}^2}{G_A^2 \langle M_{GT} \rangle_{7^+}^2} .$$

Coi

$$\langle M_F\rangle = \langle JMTT_{fz}|1\cdot\sum_{k=1}^{A} t_{\pm}(k)|JMTT_{iz}\rangle = \langle JMTT_{fz}|T_{\pm}|JMTT_{iz}\rangle$$
$$= \sqrt{T(T+1) - T_{iz}T_{fz}}\,,$$

thay tổng của các thành phần z của các spin đồng vị của các nucleon bằng thành phần z của tổng các spin đồng vị toàn phần. Đặt $T = 1$, $T_{iz} = 0$, ta có

$$\langle M_F\rangle^2 = 2\,.$$

Coi

$$\langle M_{GT}\rangle^2 = \sum_m |\langle 6,6,1,-1|\{\sigma_m(1)t_{\pm}(1) + \sigma_m(2)t_{\pm}(2)\}|7,7,1,0\rangle|^2\,,$$

trong đó chỉ có 2 đồng nhất, ở bên ngoài các vỏ đầy mới được đưa vào để tính toán. Khi đó

$$\langle M_{GT}\rangle^2 = 4\sum_m |\langle 6,6,1,-1|\sigma_m(1)t_{\pm}(1)|7,7,1,0\rangle|^2\,.$$

Viết các hàm sóng như dưới dạng tổ hợp của các hàm sóng của nucleon

$$|7,7\rangle = \left|\frac{7}{2},\frac{7}{2};\frac{7}{2},\frac{7}{2}\right\rangle,$$
$$|7,6\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\frac{7}{2},\frac{6}{2};\frac{7}{2},\frac{7}{2}\right\rangle + \left|\frac{7}{2},\frac{7}{2};\frac{7}{2},\frac{6}{2}\right\rangle\right),$$
$$|6,6\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\frac{7}{2},\frac{6}{2};\frac{7}{2},\frac{7}{2}\right\rangle - \left|\frac{7}{2},\frac{7}{2};\frac{7}{2},\frac{6}{2}\right\rangle\right),$$

ta có

$$\langle M_{GT}\rangle^2 = 4\left|\left\langle\frac{7}{2},\frac{6}{2};\frac{7}{2},\frac{7}{2};1,-1\right|\frac{\sigma_-(1)t_{\pm}(1)}{2}\left|\frac{7}{2},\frac{7}{2};\frac{7}{2},\frac{7}{2};1,0\right\rangle\right|^2 = 2\,.$$

Do đó

$$\frac{(ft)_{7^+}}{(ft)_{0^+}} = \frac{G_v^2}{G_A^2} \approx \left(\frac{1,4}{1,6}\right)^2 \approx 0,77\,.$$

2088

Người ta vẫn chưa phát hiện ra đồng vị của đồng -57 ($^{57}_{29}Cu_{28}$) từ phản ứng phân rã phát ra bức xạ positron và niken -57 ($^{57}_{28}Ni_{29}$).

(a) Gợi ý số gán spin chẵn lẻ của mô hình lớp vỏ ứng với trạng thái cơ bản và trạng thái kích thích của các hạt nhân này.

(b) Ước lượng điểm năng lượng cuối của positron trong phân rã từ trạng thái cơ bản của ^{57}Cu đến trạng thái cơ bản của ^{57}Ni. Ước lượng chu kì bán rã của phân rã này (bậc độ lớn).

(c) Hãy thảo luận về các điều kiện xảy ra của phân rã β được đưa ra bởi Fermi và Gamow-Teller, chỉ ra quy tắc lựa chọn spin chẵn lẻ tương ứng. Đối với quá trình phân rã ở trên, hãy ước lượng tỉ số Γ_F/Γ_{GT} của hai đóng góp đối với tốc độ phân rã. Phân rã β^+ xảy ra có đáng kể không trong khoảng từ trạng thái cơ bản của ^{57}Cu tới trạng thái kích thích đầu tiên của ^{57}Ni? Giải thích tại sao?

(d) Niken-58 tồn tại trong tự nhiên. Hãy mô tả ngắn gọn một thí nghiệm để nghiên cứu phân rã positron của đồng-57.

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) ^{57}Cu và ^{57}Ni là các hạt nhân gương với cùng cấu trúc mức năng lượng của một nucleon đơn lẻ nằm bên ngoài các lớp vỏ đầy hai lớp. Nucleon hóa trị là proton đối với ^{57}Cu và là nơtron đối với ^{57}Ni, trạng thái cơ bản và trạng thái kích thích đầu tiên của hai hạt nhân này có cùng đặc điểm.

Đối với trạng thái cơ bản, nucleon cuối cùng ở trạng thái $2p_{3/2}$ (hình 2.11), và vì vậy $J^\pi = (\frac{3}{2})^-$; đối với trạng thái kích thích đầu tiên, nucleon ở trạng thái $1f_{5/2}$, và như vậy $J^\pi = (\frac{5}{2})^-(E_1 = 0,76$ MeV).

(b) Vì ^{57}Cu và ^{57}Ni là các hạt nhân gương nên độ chênh lệch khối lượng của hai hạt nhân này là (**Bài tập 2067(c)**)

$$\Delta E = M(Z+1, A)c^2 - M(Z, A)c^2$$
$$= \frac{3e^2}{5R}[(Z+1)^2 - Z^2] - (m_n - M_H)c^2$$

$$= \frac{3c\hbar}{5R}\left(\frac{e^2}{c\hbar}\right)(2Z+1) - (m_n - M_H)c^2$$

$$= \frac{3 \times 197 \times (2 \times 28 + 1)}{5 \times 1,2 \times 57^{1/3} \times 137} - 0,78$$

$$= 9,87 \text{ MeV}.$$

Vì vậy, trạng thái cơ bản của ^{57}Cu là 9,87 MeV cao hơn của ^{57}Ni. Điểm năng lượng cuối của positron trong phân rã có giá trị từ trạng thái cơ bản của ^{57}Cu đến trạng thái cơ bản của ^{57}Ni là

$$E_0 = \Delta E - 2m_e c^2 \approx 9,87 - 1,02 \approx 8,85 \text{ MeV}.$$

Khi phân rã β^+ từ $(\frac{3}{2})^-$ tới $(\frac{3}{2})^-$, $\Delta J = 0$, $\Delta\pi = +$, $\Delta T = 0$, $\Delta T_z = -1$, phân rã là loại siêu được phép. Để đơn giản phép tính chúng ta cho $F(Z, E) = 1$. Khi đó **(Bài tập 2084)**

$$\lambda_\beta \approx \int_0^{p_0} I(p)dp \approx B\int_0^{E_0}(E_0 - E)^2 E^2 dE$$

$$= BE_0^5\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{30}BE_0^5,$$

trong đó

$$B = \frac{g^2|M_{fi}|^2}{2\pi^3 c^6 \hbar^7} = 3,36 \times 10^{-3} \text{ MeV}^{-5}s^{-1},$$

với $|M_{fi}|^2 \approx 1$, $g = 8,95 \times 10^{-44}$ MeV · cm^3 (giá trị thực nghiệm). Khi đó

$$\tau_{1/2} = \ln 2/\lambda = \frac{30 \ln 2}{BE_0^5} = 0,114 \ s.$$

(c) Trong phân rã β^+ xảy ra giữa các trạng thái cơ bản của các hạt nhân gương $\frac{3^-}{2} \to \frac{3^-}{2}$, vì cấu trúc của hạt nhân ở trạng thái ban đầu và trạng thái cuối tương tự nhau nên chuyển mức này là siêu được phép. Như thế, các chuyển mức có thể được phân loại thành loại Fermi và loại Gamow-Teller. Đối với loại Fermi, quy tắc lựa chọn là $\Delta J = 0$, $\Delta\pi = +$, nơtrino phát xạ và electron có spin song song và ngược chiều. Đối với loại Gamow-Teller, quy tắc lựa chọn là $\Delta J = 0, \pm 1$, $\Delta\pi = +$, nơtrino phát xạ và electron có spin song song và cùng chiều.

Đối với chuyển mức $\frac{3^-}{2} \to \frac{3^-}{2}$ của loại Fermi,

$$|M_F|^2 = T(T+1) - T_{iz}T_{fz} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 1.$$

Đối với chuyển mức $\frac{3^-}{2} \to \frac{3^-}{2}$ của loại Gamow-Teller,

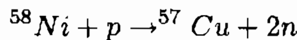
$$|M_{GT}|^2 = \frac{J_f + 1}{J_f} = \frac{3/2 + 1}{3/2} = \frac{5}{3}\,.$$

Hằng số liên kết của hai loại trên có mối quan hệ gần đúng như sau $|g_{GT}| \approx 1,24|g_F|$. Vì vậy, tỉ số của các xác suất chuyển mức là

$$\frac{\lambda_F}{\lambda_{GT}} = \frac{g_F^2|M_F|^2}{g_{GT}^2|M_{GT}|^2} = \frac{1}{1,24^2 \times 5/3} = 0,39\,.$$

Chuyển mức từ ^{57}Cu tới trạng thái kích thích đầu tiên của ^{57}Ni là một chuyển mức được phép thông thường vì $\Delta J = 1$, $\Delta\pi = +$. Vì trạng thái ban đầu và trạng thái cuối cùng là $2p_{3/2}$ và $1f_{5/2}$, dẫn đến sự khác nhau lớn hơn trong cấu trúc hạt nhân, fT của chuyển mức này lớn hơn chuyển mức siêu được phép từ 2 đến 3 bậc về độ lớn. Hơn nữa, độ lệch pha ở đây bằng $\left(\frac{8,85-0,76}{8,85}\right)^5 = 0,64$. Vì vậy, tỉ số phân nhánh rất nhỏ, việc đưa ra một chuyển mức là rất khó xác định.

(d) Khi chúng ta bắn phá bia ^{58}Ni bằng chùm proton, có thể xảy ra phản ứng dưới đây



$$^{58}Ni + p \to ^{57}Cu + 2n$$

Độ dôi khối lượng $\Delta = (M - A)$ (MeV) có giá trị là

$$\Delta(n) \approx 8,071, \quad \Delta(^1H) = 7,289\,,$$
$$\Delta(^{58}Ni) = -60,235, \quad \Delta(^{57}Cu) \approx -46,234\,.$$

Chúng ta có

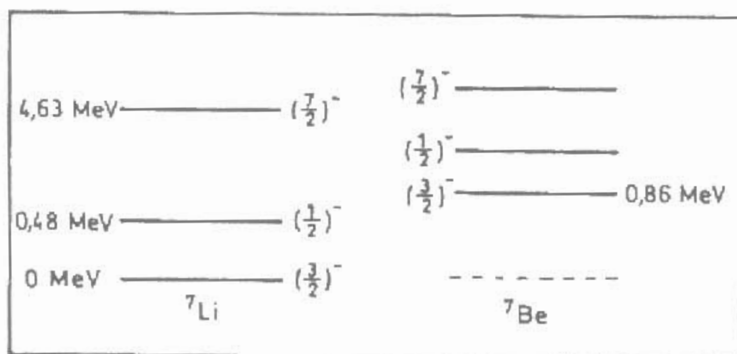
$$Q = \Delta(^{58}Ni) + \Delta(^1H) - \Delta(^{57}Cu) - 2\Delta(n)$$
$$= -60,235 + 7,289 + 46,234 - 2 \times 8,071 = -22,854 \text{ MeV}\,.$$

Vì vậy phản ứng này là phản ứng thu nhiệt và cần có các proton có đủ năng lượng để phản ứng xảy ra. Các nơtron có thể được sử dụng để giám sát sự tạo thành ^{57}Cu, và đo độ trễ trong phát xạ β^+ đối với phát xạ n cho ta phương tiện để nghiên cứu phân rã β^+ của ^{57}Cu.

2089

Cho rằng để tìm kiếm các nơtrino mặt trời cần phải sử dụng một mẫu lớn Li giàu đồng vị $^7_3$Li. Sự phát hiện phụ thuộc vào sản phẩm, khoảng cách và đầu

dò đồng vị ^7_4Be bắt electron với chu kì bán rã là 53 ngày. Mức năng lượng thấp của hai hạt nhân này được chỉ ra dưới đây trong hình 2.28. Khối lượng nguyên tử ^7_4Be ở trạng thái cơ bản nằm ở 0,86 MeV cao hơn khối lượng nguyên tử của ^7_3Li ở trạng thái cơ bản.



Hình 2.28

(a) Thảo luận về các chế độ bắt giữ electron ở trạng thái cơ bản của ^7Be qua ước lượng về các tỉ số phân nhánh và xác suất xảy ra phân rã liên quan tương đối (tỉ số ft).

(b) Để chuẩn đầu dò này, một nguồn điểm phát ra 10^{17} nơtrino đơn sắc/s với năng lượng 1,5 MeV được đặt tại tâm của hình cầu ^7Li nặng 1 tấn ($=1000\ kg$). Hãy ước lượng tốc độ cân bằng phân rã toàn phần của ^7Be, biết

$$G_V = 1,42 \times 10^{-49} \text{ ec cm}^3 ,$$

$$G_A = 1,60 \times 10^{-49} \text{ ec cm}^3 ,$$

$$\rho_{\text{Li}} = 0,53 \text{ g/cm}^3 .$$

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Hai chế độ bắt giữ electron như sau

$$\left(\frac{3^-}{2}\right)^- \to \left(\frac{3}{2}\right)^- : \quad \Delta J = 0, \Delta P = + ,$$

đây là tổ hợp của loại chuyển mức F và chuyển mức $G - T$;

$$\left(\frac{3}{2}\right)^- \to \left(\frac{1}{2}\right)^- : \Delta J = 1, \Delta P = + ,$$

còn đây là loại chuyển mức thuần $G - T$.

${}^7_3$Li và ${}^7_4$Be là các hạt nhân gương có $T = \frac{1}{2}$, và lần lượt có $T_z = \frac{1}{2}$ và $-\frac{1}{2}$.

Đối với chuyển mức loại F từ $\left(\frac{3}{2}\right)^- \to \left(\frac{3}{2}\right)^-$ hàm sóng ban đầu và hàm sóng ở trạng thái cuối tương tự nhau và vì vậy

$$\langle M_F\rangle^2 = T(T+1) - T_{zi}T_{zf} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1\,.$$

Đối với chuyển mức loại $G - T$ từ $\frac{3^-}{2} \to \frac{3}{2}$, mẫu đơn hạt có

$$\langle M_{G-T}\rangle^2 = \frac{J_f + 1}{J_f} = \frac{3/2 + 1}{3/2} = \frac{5}{3}\,.$$

Đối với chuyển mức loại $G - T$ từ $\left(\frac{3}{2}\right)^- \to \left(\frac{1}{2}\right)^-$, chuyển mức này được tạo thành từ $l + \frac{1}{2}$ tới $l - \frac{1}{2}$ với $l = 1$, và mẫu đơn hạt có

$$\langle M_{G-T}\rangle^2 = \frac{4l}{2l+1} = \frac{4}{3}\,.$$

Do $\lambda_K(M^2, W_\nu) = |M|^2 W_\nu^2$, trong đó W_ν là năng lượng phân rã,

$$\frac{\lambda_K\left(\frac{3^-}{2} \to \frac{3^-}{2}\right)}{\lambda_K\left(\frac{3^-}{2} \to \frac{1^-}{2}\right)} = \frac{\langle M_{G-T}\rangle^2_{3/2} + \frac{G_V^2}{G_A^2}\langle M_F\rangle^2}{\langle M_{G-T}\rangle^2_{1/2}} \cdot \frac{W_{\nu_1}^2}{W_{\nu_2}^2}$$

$$= \frac{\frac{5}{3} + \left(\frac{1,42}{1,60}\right)^2}{\frac{4}{3}} \times \left(\frac{0,86}{0,86 - 0,48}\right)^2$$

$$= \frac{(5 + 0,79 \times 3) \times 0,86^2}{4 \times (0,86 - 0,48)^2} = 9,43\,.$$

Vì vậy, các tỉ số phân nhánh lần lượt là $B(\frac{3^-}{2} \to \frac{3}{2}) = \frac{9,43}{10,43} = 90,4\%$,

$$B\left(\frac{3^-}{2} \to \frac{1^-}{2}\right) = \frac{1}{10,43} = 9,6\%\,.$$

Tỉ số fT của hai chuyển mức trên là

$$\frac{(fT)_{3/2^-}}{(fT)_{1/2}} = \frac{\langle M_{G-T}\rangle^2_{1/2}}{\langle M_{G-T}\rangle^2_{3/2} + \frac{G_V^2}{G_A^2}\langle M_F\rangle^2} = \frac{4}{3 \times 0,79 + 5} = 0,543\,.$$

(b) Khi chiếu nơtrino vào ^{7}Li, ^{7}Li bắt nơtrino và trở thành ^{7}Be. Mặt khác, ^{7}Be trải qua phân rã thành ^{7}Li. Gọi số hạt nhân ^{7}Be được tạo thành trong một đơn vị thời gian trong khi chiếu là ΔN_1. Giả sử rằng một lớp vỏ của ^{7}Li có bán kính r và chiều dày dr. Lớp vỏ này chứa

$$\frac{4\pi r^2 \rho n dr}{A}$$

hạt nhân ^{7}Li, trong đó n là số Avogadro, A là số khối của ^{7}Li. Dòng nơtrino tại r là $\frac{I_0}{4\pi r^2}$. Nếu $\sigma =$ là thiết diện của phản ứng bắt electron của ^{7}Li, $a =$ là tỉ số hoạt động của ^{7}Li sinh ra ^{7}Be, R là đường kính quả cầu ^{7}Li, số lượng hạt nhân ^{7}Be được sinh ra trong một đơn vị thời gian là

$$\Delta N_1 = \int \frac{I_0}{4\pi r^2} \rho n \sigma a \cdot 4\pi r^2 dr/A = I_0 \rho n \sigma a R/A \, .$$

Với $a = 0,925$, $\rho = 0,53$ g cm^{-3}, $A = 7$, $n = 6,023 \times 10^{23}$, $R = \left(\frac{3\times 10^6}{4\pi\rho}\right)^{\frac{1}{3}} = 76,7$ cm, $I_0 = 10^{17}$ s^{-1}, $\sigma \approx 10^{-43}$ cm^2, ta có

$$\begin{aligned}\Delta N_1 &= \frac{10^{17} \times 0,53 \times 6,023 \times 10^{23} \times 10^{-43} \times 0,925 \times 76,7}{7} \\ &= 3,2 \times 10^{-2} \, s^{-1} \, .\end{aligned}$$

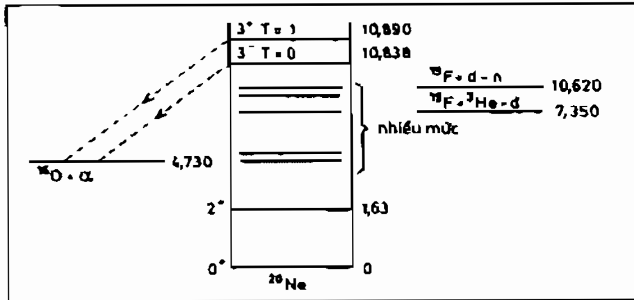
Tại trạng thái cân bằng, đây cũng là số hạt ^{7}Be phân rã thành ^{7}Li.

Vì vậy, tốc độ phân rã của ^{7}Be tại trạng thái cân bằng là $3,2 \times 10^{-2}$ s^{-1}. Chú ý rằng số lượng ^{7}Li được tạo ra trong phân rã của ^{7}Be không đáng kể so với tổng số hạt nhân hiện tại.

2090

Người ta cho rằng các nucleon (N) tương tác trực tiếp với nhau thông qua tương tác yếu và tương tác này vi phạm sự bảo toàn tính chẵn lẻ. Một cách để nghiên cứu bản chất của tương tác yếu giữa $N - N$ trong tự nhiên là sử dụng phân rã α, ví dụ điển hình như sự phân rã của ^{20}Ne (hình 2.29) với các trạng thái 3^+, $T = 1$ và 3^-, $T = 0$.

Sau đây, bạn sẽ được yêu cầu giải thích nguyên lý của một thí nghiệm đo đạc phần tử ma trận của tương tác yếu này giữa các trạng thái đó, $\langle 3^+ | H_{\text{yếu}} | 3^- \rangle$.



Hình 2.29

(a) Sự tương tác yếu $N-N$ có các thành phần đẳng vô hướng, đẳng vectơ và đẳng tenxơ (nghĩa là bậc 0, 1 và 2 trong spin đồng vị). Thành phần nào đóng góp vào phần tử ma trận $\langle 3^+|H_{\text{yếu}}|3^-\rangle$?

(b) Giải thích tính chẵn lẻ và quy tắc chọn lọc spin đồng vị trong phân rã α. Nói một cách cụ thể, hãy giải thích trạng thái nào trong hai trạng thái của ^{20}Ne sẽ phân rã tới trạng thái cơ bản của $^{16}\text{O}+\alpha$ nếu không có sự vi phạm tính chẵn lẻ trong tương tác $N-N$.

(c) Cho phép một phần tử ma trận vi phạm tính chẵn lẻ $\langle 3^+|H_{\text{yếu}}|3^-\rangle$ tại 1 eV, hãy ước lượng độ rộng α của chuyển mức cấm tính chẵn lẻ, Γ_α (bị cấm), theo đơn vị độ rộng α của chuyển mức được phép chẵn lẻ, Γ_α (được phép). Cho rằng Γ_α (được phép) nhỏ hơn so với khoảng giữa hai mức năng lượng của hai trạng thái 3^+, 3^-.

(d) Độ rộng α của chuyển mức được phép tính chẵn lẻ là Γ_α (được phép) = 45 keV không nhỏ so với khoảng giữa hai mức năng lượng. Bạn có cho rằng giới hạn độ rộng của trạng thái này khác so với kết quả mà bạn đã thu được ở phần trên (c) không? Hãy thảo luận.

(e) Phản ứng trực tiếp ^{19}F(^{3}He,d)^{20}Ne* chiếm một trong những trạng thái bị kích thích mạnh. Theo bạn nghĩ đó là trạng thái nào và tại sao?

(f) Cũng có một bội đôi số chẵn lẻ $1^+/1^-$ ở mức năng lượng $\sim 11,23$ MeV. Cả hai trạng thái này đều có $T=1$.

(i) Trong trường hợp này trạng thái nào có số chẵn lẻ bị cấm đối với phân rã α?

(ii) Như trong phần (a), thành phần spin đồng vị nào của tương tác yếu $N-N$ đóng góp vào phần tử ma trận hỗn hợp này? (Chú ý rằng ^{20}Ne tự liên hợp). Thành phần nào sẽ được xác định bởi phép đo độ rộng α của số chẵn lẻ

bị cấm?

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Khi $T = 1$ đối với trạng thái 3^+ và $T = 0$ đối với trạng thái 3^- thì chỉ có thành phần đẳng vectơ với $\Delta T = 1$ là đóng góp vào $\langle 3^+|H_{\text{yếu}}|3^-\rangle$.

(b) Phân rã α tương tác mạnh mà spin đồng vị bảo toàn. Vì vậy, $\Delta T = 0$. Khi spin đồng vị của hạt α bằng 0, spin đồng vị của hạt nhân con phải bằng spin đồng vị của hạt nhân mẹ. Khi ^{16}O có $T = 0$, chỉ trạng thái 3^-, trạng thái $T = 0$ có thể chịu phân rã α thành ^{16}O + α. Khi cả spin của ^{16}O và α bằng 0 và tổng xung lượng góc không đổi trong phân rã α thì trạng thái cuối của xung lượng góc quỹ đạo là $l = 3$ và vì vậy số chẵn lẻ $(-1)^3 = -1$. Chỉ khi cùng với trạng thái ban đầu, chuyển mức này mới có số chẵn lẻ được phép.

(c) Quy tắc vàng Fermi cho biết xác suất xảy ra chuyển mức thứ nhất trong một đơn vị thời gian bằng

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar}|V_{fi}|^2\rho(E_f)\,,$$

trong đó V_{fi} là phần tử ma trận chuyển mức và $\rho(E_f)$ là mật độ trạng thái cuối. Khi đó độ rộng α của chuyển mức được phép chẵn lẻ ($3^-, T = 0$ tới $^{16}O + \alpha$) là

$$\Gamma_\alpha = \frac{2\pi}{\hbar}|V_{3^-\to{}^{16}\mathrm{O}}|^2\rho(E_f)\,.$$

Chuyển mức cấm chẵn lẻ ($3^+, T = 1$ tới ^{16}O $+ \alpha$) là quá trình thứ hai, có

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\sum_{n\neq i}\frac{V_{fn}V_{ni}}{E_i - E_n + i\varepsilon}\right|^2\rho(E_f)\,,$$

trong đó 2ε là độ rộng của trạng thái trung gian, và tổng gồm tất cả các trạng thái trung gian. Trong trường hợp này, chỉ có một trạng thái trung gian với trạng thái 3^-, $T = 0$. Vì vậy

$$\Gamma'_\alpha = \frac{2\pi}{\hbar}|V_{3^-\to{}^{16}\mathrm{O}}|^2\frac{1}{(E_i - E_n)^2 + \varepsilon^2}|\langle 3^+|H_{\text{yếu}}|3^-\rangle|^2\rho(E_f)$$

$$= \Gamma_\alpha\frac{|\langle 3^+|H_{\text{yếu}}|3^-\rangle|^2}{(\Delta E)^2 + (\Gamma_\alpha/2)^2}\,,$$

trong đó ΔE là khoảng cách giữa hai mức năng lượng của hai trạng thái $3^+, 3^-$, Γ_α là độ rộng của chuyển mức được cho phép tính chẵn lẻ. Nếu $\Gamma_\alpha \ll$

ΔE, khi $\langle 3^+|H_{\text{yếu}}|3^-\rangle = 1$ eV, $\Delta E = 0,052$ MeV $= 52 \times 10^3$ eV, chúng ta có

$$\Gamma'_\alpha \approx \frac{|\langle 3^+|H_{\text{yếu}}|3^-\rangle|^2}{(\Delta E)^2}\Gamma_\alpha = \frac{\Gamma_\alpha}{52^2 \times 10^6} = 3,7 \times 10^{-10}\Gamma_\alpha\,.$$

(d) Khi $\Gamma_\alpha = 45$ keV, $(\Gamma_\alpha/2)^2$ là đáng kể so với $(\Delta E)^2$. Vì vậy

$$\Gamma'_\alpha = \frac{10^{-6}}{52^2 + \frac{45^6}{4}}\Gamma_\alpha = 3,1 \times 10^{-10}\Gamma_\alpha = 1,4 \times 10^{-5}\ \text{eV}\,.$$

(e) Xét phản ứng $^{19}F(^3He, d)^{20}Ne^*$. Gọi spin của ^{19}F, ^3He, d, ^{20}Ne, và proton bị bắt giữ lần lượt là $\mathbf{J}_A$, $\mathbf{J}_a$, $\mathbf{J}_b$, $\mathbf{J}_B$, J_p, momen động lượng của ^3He, d và proton bị bắt là $\mathbf{l}_a$, $\mathbf{l}_b$, $\mathbf{l}_p$. Khi đó

$$\mathbf{J}_A + \mathbf{J}_a + \mathbf{l}_a = \mathbf{J}_B + \mathbf{J}_b + \mathbf{l}_b\,.$$

Do

$$\mathbf{J}_A = \mathbf{J}_p + \mathbf{l}_b, \quad \mathbf{l}_a = \mathbf{l}_p + \mathbf{l}_b, \quad \mathbf{J}_A + \mathbf{s}_p + \mathbf{l}_p = \mathbf{J}_B\,,$$

và $J_A = \frac{1}{2}$, $J_B = 3$, $J_b = 1$, $l_b = 0$, $s_p = \frac{1}{2}$, ta có $J_p = \frac{1}{2}$, $l_p = 2, 3, 4$. Bảo toàn chẵn lẻ yêu cầu $P(^{19}F)P(p)(-1)^{l_p} = P(^{20}Ne^*)$, $P(^{20}Ne^*) = (-1)^{l_p}$.

Thực tế l_p được tìm từ sự phân bố góc với giá trị $l_p = 2$. Khi đó $P(^{20}Ne^*) =$ $+$, và vì vậy phản ứng này chiếm trạng thái 3^+ của Ne^*, chứ không phải là trạng thái 3^-.

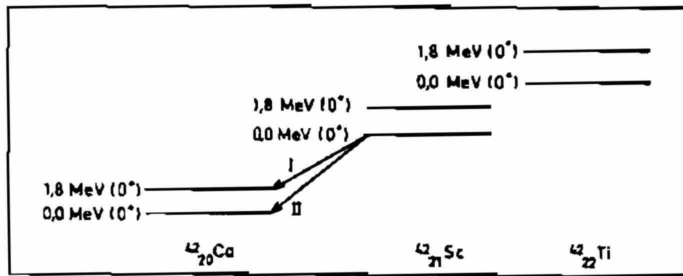
(f) (i) Trạng thái 1^+ bị cấm chẵn lẻ trong phân rã α. Nói cách khác, trong phân rã α 1^-, $l_f + J_\alpha + J_{^{16}O} = 1$, $P_f = P(\alpha)P(^{16}O)(-1)^{l_f} = -1$, vì vậy phân rã α của chúng có tính chẵn lẻ được phép.

(ii) Do ^{20}Ne là hạt nhân tự liên hợp, $T_3 = 0$ vì $\langle 1,0|1,0;1,0\rangle = 0$. Vì vậy, chỉ có các thành phần có $T = 0, 2$ có thể đóng góp. Tuy nhiên, trong tương tác yếu thì $|\Delta T| \leq 1$ nên chỉ có thành phần $\Delta T = 0$ có thể đóng góp vào kết quả thí nghiệm.

2091

Xét cấu trúc mức năng lượng dưới đây (hình 2.30):

Các trạng thái cơ bản tạo ra một đồng vị bội ba như các trạng thái kích thích (tất cả các trạng thái đều có một spin - chẵn lẻ là 0^+). Trạng thái cơ bản của $^{42}_{21}$Sc có thể phân rã β trở thành $^{42}_{20}$Ca ở trạng thái cơ bản có động năng cuối là 5,4 MeV (chuyển mức II trong hình 2.30).



Hình 2.30

(a) Chỉ sử dụng các suy luận trong không gian pha, hãy tính tỉ số các tốc độ cho các chuyển mức I và II.

(b) Cho rằng các trạng thái hạt nhân là các trạng thái riêng thuần của spin đồng vị. Tại sao trong thực tế, phần tử ma trận Fermi lại là một toán tử spin đồng vị bậc thang cấm các chuyển mức loại I diễn ra?

(c) Xét spin đồng vị hỗn hợp do tương tác điện từ. Thông thường

$$H_{EM} = H_0 + H_1 + H_2\,,$$

ở đây các chỉ số tương ứng với bậc của các tenxơ spin đồng vị. Hãy viết tỉ số phân chia $\frac{\Gamma_I}{\Gamma_{II}}$ dưới dạng các phần tử ma trận rút gọn của mỗi phần của H_{EM}.

(d) Sử dụng kết quả của phần (a) và (c), bỏ qua H_2, và cho biết $\frac{\Gamma_I}{\Gamma_{II}} = 6 \times 10^{-5}$, hãy tính giá trị của phần tử ma trận rút gọn hỗn hợp của trạng thái cơ bản và trạng thái kích thích của $^{42}_{20}$Ca.

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Chỉ sử dụng các suy luận trong không gian pha, đối với phân rã β $E_0 \gg m_e c^2$, $\Gamma \approx E_0^5$ **(Bài tập 2077)**. Do đó

$$\frac{\Gamma_I}{\Gamma_{II}} = \frac{(5,4-1,8)^5}{(5,4-0)^5} \approx 0,13\,.$$

(b) Đối với các chuyển mức Fermi nằm trong cùng nhóm đa bội spin đồng vị, vì cấu trúc của trạng thái ban đầu và trạng thái cuối tương tự nhau, xác suất chuyển mức lớn. Các chuyển mức này thường được gọi là siêu được phép.

Đối với chuyển mức $0^+ \to 0^+ (T = 1)$, chỉ có chuyển mức Fermi với

$$\begin{aligned}
\langle M_F \rangle^2 &= \langle \alpha, T_f, T_{f3} | \sum_{K=1}^{A} t_\pm(K) | \alpha', T_i, T_{i3} \rangle^2 \\
&= \left(\delta_{\alpha\alpha'} \delta_{T_i T_f} \sqrt{T(T+1) - T_{i3} T_{f3}} \right)^2 \\
&= \begin{cases} T(T+1) - T_{i3} T_{f3}, & \text{nếu } \alpha = \alpha',\ T_f = T_i, \\ 0, & \text{trường hợp khác,} \end{cases}
\end{aligned}$$

bỏ qua hiệu chính các bậc cao hơn trong phần tử ma trận Fermi. Ở đây α ở đây là số lượng tử trạng thái bất kì nào đó của hạt nhân, khác với spin đồng vị. Từ đây chúng ta có thể thấy kênh II là một chuyển mức nằm trong đa bội spin đồng vị, hay là một chuyển mức siêu cho phép, kênh I là một chuyển tiếp giữa hai nhóm đa bội khác nhau, hay là một chuyển mức cấm Fermi.

(c) Chúng ta sử dụng lý thuyết nhiễu loạn. Gọi trạng thái cơ bản và trạng thái kích thích của ^{42}Ca lần lượt là $|1\rangle$ và $|2\rangle$. Do ảnh hưởng của H_{EM}, các trạng thái này trở thành hỗn hợp. Gọi các trạng thái hỗn hợp tương ứng là $|1\rangle'$ và $|2\rangle'$, chú ý rằng hỗn hợp doH_{EM} là rất nhỏ. Ta có

$$H^0|1\rangle = E_1|1\rangle\,,$$

$$H^0|2\rangle = E_2|2\rangle\,,$$

trong đó E_1 và E_2 là năng lượng của hai trạng thái ($E_1 \approx E_0$, $E_2 - E_1 =$ 1., MeV).

Xét

$$H = H^0 + H_{EM}\,,$$

trong đó $H_{EM} = H_0 + H_1 + H_2$. Khi chỉ số tương ứng với hạng của tenxơ spin đồng vị, chúng ta viết H_0, H_1 H_2 như $P_{0,0}$, $P_{1,0}$, $P_{2,0}$ và xác định

$$\langle J_1 m_1 | P_{\mu\nu} | J_2 m_2 \rangle = C^{J_1 m_1}_{\mu\nu J_2 m_2} \langle J_1 || P_{\mu\nu} || J_2 \rangle\,.$$

Khi đó

$$\begin{aligned}
H_{EM} &= P_{0,0} + P_{1,0} + P_{2,0}\,, \\
\langle 1 | H_{EM} | 2 \rangle &= \langle \alpha, 1, -1 | (P_{0,0} + P_{1,0} + P_{2,0}) | \alpha', 1, -1 \rangle \\
&= \Bigg(\langle \alpha, 1 || P_0 || \alpha', 1 \rangle - \sqrt{\frac{1}{2}} \langle \alpha, 1 || P_1 || \alpha', 1 \rangle
\end{aligned}$$

$$+\sqrt{\frac{1}{10}}\langle\alpha,1||P_2||\alpha',1\rangle\Bigg),$$

$$\langle 1|H_{EM}|1\rangle=\langle 2|H_{EM}|2\rangle=\langle\alpha,1,-1|(P_{0,0}+P_{1,0}+P_{2,0})|\alpha,1,-1\rangle$$

$$=\langle\alpha,1||P_0||\alpha,1\rangle-\sqrt{\frac{1}{2}}\langle\alpha,1||P_1||\alpha,1\rangle+\sqrt{\frac{1}{10}}\langle\alpha,1||P_2||\alpha,1\rangle\,.$$

Trong phương trình trên, α và α' biểu thị các số lượng tử của $|1\rangle$ và $|2\rangle$ chứ không phải là spin đồng vị, và $\langle\alpha,1||P||\alpha,1\rangle$ là phần có liên quan của phần tử ma trận rút gọn. Vì vậy

$$\frac{\Gamma_I}{\Gamma_{II}}=\frac{E_1^5|M_1|^2}{E_2^5|M_2|^2}=\frac{(5,4-1,8-\langle 2|H_{EM}|2\rangle)^5}{(5,4-\langle 1|H_{EM}|1\rangle)^5}\frac{\langle 1|H_{EM}|2\rangle^2}{(E_2-E_1)^2}\,.$$

Nếu các hiệu chính năng lượng có thể bỏ qua thì $\langle 1|H_{EM}|1\rangle\ll E_1,E_2$, và

$$\frac{\Gamma_I}{\Gamma_{II}}=\frac{E_{10}^5}{E_{20}^5(E_2-E_1)^2}|\langle 1|H_{\rm EM}|2\rangle|^2$$

$$=\frac{(5,4-1,8)^5}{5,4^5\times 1,8^2}\left(\langle 1||P_0||2\rangle-\sqrt{\frac{1}{2}}\langle 1||P_1||2\rangle+\sqrt{\frac{1}{10}}\langle 1||P_2||2\rangle\right)^2.$$

Nếu chúng ta bỏ qua sự đóng góp của H_2 và giả sử $\langle 1||P_0||2\rangle=0$, khi đó thành phần đẳng vô hướng H không trộn hai trạng thái spin đồng vị và chúng ta có

$$\frac{\Gamma_I}{\Gamma_{II}}=\frac{E_{10}^5}{E_{20}^5(E_2-E_1)^2}|\langle\alpha,1||P_1||\alpha',1\rangle|^2\,.$$

(d) Trong trường hợp đơn giản hóa ở trên thì,

$$\frac{\Gamma_I}{\Gamma_{II}}=\frac{(5,4-1,8)^5}{5,4^5\times 1,8^2}|\langle\alpha,1||P_1||\alpha',1\rangle|^2=6\times 10^{-5}$$

cho

$$|\langle\alpha,1||P_1||\alpha',1\rangle|^2=24,6\times 6\times 10^{-5}=1,48\times 10^{-3}\ \text{MeV}^2\,,$$

hay

$$|\langle\alpha,1||P_1||\alpha',1\rangle|=38\ \text{keV}\,.$$

2092

"Khác với phổ học nguyên tử, chuyển mức lưỡng cực điện ($E1$) không được quan sát thường xuyên giữa một vài trạng thái hạt nhân đầu tiên."

(a) Đối với các hạt nhân nhẹ, đưa ra các lý lẽ để ủng hộ nhận định trên dựa trên cơ sở của mẫu vỏ. Chỉ ra các vị trí tại đó được coi là ngoại lệ.

(b) Ước lượng một bậc độ lớn cho năng lượng và thời gian sống của chuyển mức lưỡng cực điện của năng lượng thấp nhất đối với $^{17}_{9}F_8$, giới thiệu ngắn gọn sự lựa chọn các thông số đầu vào của bạn.

(c) Hãy chỉ ra rằng đối với các hạt nhân có số nơtron và số proton bằng nhau thì không có các chuyển mức lưỡng cực điện giữa hai trạng thái có cùng spin đồng vị T.

Dưới đây là hệ số Clebch-Gordan có thể sử dụng:

Sử dụng kí hiệu $\langle J_1 J_2 M_1 M_2 | J_{TOT} M_{TOT} \rangle$, $\langle J100|J0\rangle = 0$.

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Dựa vào các mức năng lượng đơn hạt được cho bởi thuyết mẫu vỏ, chúng ta thấy các mức năng lượng trong cùng một lớp vỏ thường có cùng tính chẵn lẻ, đặc biệt là các mức năng lượng thấp nhất nằm ở các lớp vỏ 1s, 1p, 1d, 2s v.v.. Đối với các hạt nhân nhẹ, chuyển mức γ xảy ra chủ yếu ở giữa các mức năng lượng khác nhau của các nucleon đơn lẻ. Trong chuyển mức giữa các mức năng lượng khác nhau của cùng lớp vỏ, tính chẵn lẻ không thay đổi. Nói cách khác, chuyển mức lưỡng cực điện $E1$ tuân theo quy tắc chọn lọc $\Delta J = 0$ hoặc 1, $\Delta P = -1$. Trong tự nhiên, các chuyển mức bảo toàn tính chẵn lẻ có thể không phải lưỡng cực điện. Tuy nhiên nếu trạng thái cơ bản và trạng thái kích thích không nằm trên một lớp vỏ, thì tính chẵn lẻ có thể thay đổi trong một chuyển mức. Ví dụ như trong chuyển mức $1p_{3/2} \to 1s_{1/2}$, $\Delta J = 1$, $\Delta P = -1$. Đây là một chuyển mức lưỡng cực điện.

(b) Trong mẫu đơn hạt, chuyển mức lưỡng cực điện có năng lượng thấp nhất $E1$ của ^{17}F là $2s_{1/2} \to 1p_{1/2}$. Xác suất chuyển mức trong một đơn vị thời gian có thể được ước lượng bằng (**Bài tập 2093** với $L = 1$)

$$\lambda \approx \frac{c}{4}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)\left(\frac{E_\gamma}{\hbar c}\right)^3 \langle r\rangle^2,$$

trong đó E_γ là năng lượng chuyển mức và $\langle r\rangle \sim R = 1,4\times 10^{-13}\ A^{1/3}$ cm. Vì vậy

$$\lambda \approx \frac{3\times 10^{10}\times(1.4\times 10^{-13})^2}{4\times 137\times(197\times 10^{-13})^3}A^{2/3}E_\gamma^3 = 1,4\times 10^{14}A^{2/3}E_\gamma^3\,,$$

trong đó E_γ có đơn vị là MeV. Đối với ^{17}F chúng ta có thể lấy $E_\gamma \approx 5$ MeV, $A = 17$, suy ra

$$\lambda = 1,2\times 10^{17}\ s\,,$$

hoặc

$$\tau = \lambda^{-1} = 9\times 10^{-18}\ s\,.$$

(c) Đối với các hạt nhân nhẹ hoặc trung bình, spin đồng vị là một số lượng tử có lợi. Một trạng thái của hạt nhân có thể được viết là $|JmTT_z\rangle$, ở đây J, m được hiểu là momen động lượng, T, T_z là spin đồng vị. Toán tử chuyển mức đa cực điện giữa hai trạng thái là

$$\begin{aligned}O_E(L,E) &= \sum_{K=1}^{A}\left[\frac{1}{2}(1+\tau_z(K))e_p + \frac{1}{2}(1-\tau_z(K))e_n\right]r^L(K)Y_{LM}(r(K))\\ &= \sum_{K=1}^{A}S(L,M,K)\cdot 1 + \sum_{K=1}^{A}V(L,M,K)\tau_z(K)\end{aligned}$$

với

$$S(L,M,K) = \frac{1}{2}(e_p+e_n)r^L(K)Y_{LM}(r(K))\,,$$

$$V(L,M,K) = \frac{1}{2}(e_p-e_n)r^L(K)Y_{LM}(r(K))\,,$$

trong đó τ_z là thành phần z của ma trận spin đồng vị và $\tau_z\phi_n = -\phi_n$, $\tau_z\phi_p = +\phi_p$.

Số hạng đầu tiên liên quan tới vô hướng spin đồng vị, số hạng thứ hai liên quan tới vectơ spin đồng vị. Một chuyển mức đa cực điện từ J, T, T_z tới J', T', T_z' có thể được viết dưới dạng như sau

$$\begin{aligned}B_E(L: J_iT_iT_z \to J_fT_fT_z) &= \langle J_fT_fT_z|O_E(L)|J_iT_iT_z\rangle^2/(2J_i+1)\\ &= \frac{1}{(2J_i+1)(2T_f+1)}[\delta_{T_iT_f}\langle J_fT_f|\sum_{K=1}^{A}S(L,K)\cdot 1|J_iT_i\rangle\\ &\quad + \langle T_iT_z10|T_fT_z\rangle\langle J_fT_f|\sum_{K=1}^{A}V(L,K)\tau_z(K)|J_iT_i\rangle]^2\,.\end{aligned}$$

Từ phương trình trên, chúng ta thấy rằng các chuyển mức đa cực điện giữa hai trạng thái tuân theo quy tắc chọn lọc spin đồng vị $\Delta T \leq 1$. Khi $\Delta T = 0$, $\delta'_{TT} \neq 0$, có một thành phần vô hướng spin đồng vị; khi $\Delta T = 1$, thành phần vô hướng bằng 0.

Đối với chuyển mức lưỡng cực điện,

$$\sum_{K=1}^{A} S(L,K)\cdot 1 = \sum_{K=1}^{A} \frac{1}{2}(e_p + e_n) r(K) Y_{LM}(r(K))$$
$$= \frac{1}{2}(e_p + e_n) \sum_{K=1}^{A} r(K) Y_{LM}(r(K)),$$

r là tọa độ của nucleon liên quan tới khối tâm của hạt nhân.

Đối với các hạt nhân có dạng đối xứng cầu hay đối xứng trục, khi $\sum_{K=1}^{A} rY_{LM}(r(K))$ bằng 0, thì số hạng vô hướng spin đồng vị không đóng góp vào chuyển mức lưỡng cực điện. Đối với số hạng vectơ spin đồng vị, khi $T_i = T_f = T$,

$$\langle T_i T_z 10 | T_f T_z \rangle = \frac{T_z}{\sqrt{T(T+1)}}.$$

Khi đó với các hạt nhân có $Z = N$ thì các chuyển mức giữa hai mức năng lượng có $\Delta T = 0$, khi $T_z = 0$,

$$\langle T_i T_z 10 | T_f T_z \rangle = 0.$$

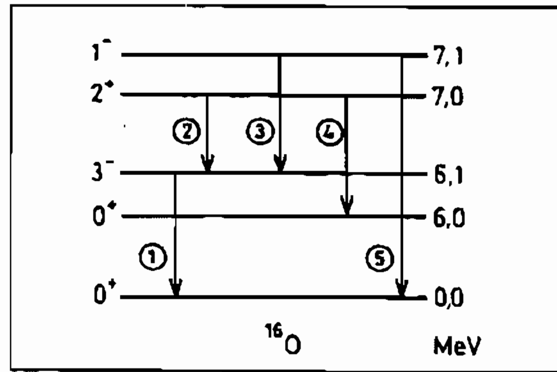
và do đó cả hai số hạng vô hướng spin đồng vị và vectơ spin đồng vị không có đóng góp gì. Vì vậy các hạt nhân tự liên hợp có trạng thái ứng với $T_i = T_f$ không thể có chuyển mức lưỡng cực điện.

2093

(a) Hãy giải thích tại sao bức xạ điện từ E_λ được phát ra chủ yếu khi tính đa cực L được phép thấp nhất. Hãy đưa ra ước lượng về các tỉ số $E_1 : E_2 : E_3 : E_4 : E_5$ đối với chuyển mức của ^{16}O được chỉ ra trong hình 2.31.

(b) Ước lượng thời gian sống của trạng thái 7,1 MeV. Hãy giải thích cho sự đánh giá gần đúng đó của bạn.

(c) Liệt kê các chế độ phân rã có thể có ở trạng thái 6,0 MeV.



Hình 2.31

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Theo lý thuyết vỏ hạt nhân, bức xạ γ được phát ra do các chuyển mức giữa các trạng thái năng lượng của nucleon trong cùng một hạt nhân. Cho một proton di chuyển trong một trường xuyên tâm, bức xạ được phát ra khi nó chuyển từ trạng thái năng lượng cao hơn về trạng thái năng lượng thấp hơn trong các hạt nhân. Nếu L là bậc của bức xạ đa cực điện thì xác suất chuyển mức trong một đơn vị thời gian được tính bằng

$$\lambda_E(L) \approx \frac{2(L+1)}{L[(2L+1)!!]^2}\left(\frac{3}{L+3}\right)^2\left(\frac{e^2}{\hbar}\right)k^{2L+1}\langle r^L\rangle^2,$$

trong đó $k = \frac{w}{c} = \frac{E_\gamma}{\hbar c}$ là số sóng của bức xạ, E_γ là năng lượng chuyển dời và $\langle\gamma^L\rangle^2 \approx R^{2L}$, $R = 1,4\times 10^{-13}A^{1/3}$ cm là bán kính của hạt nhân. Vì vậy

$$\lambda_E(L) \approx \frac{2(L+1)}{L[(2L+1)!!]^2}\left(\frac{3}{L+3}\right)^2\left(\frac{e^2}{R\hbar c}\right)\left(\frac{E_\gamma c}{\hbar c}\right)\left(\frac{E_\gamma R}{\hbar c}\right)^{2L}$$

$$= \frac{2(L+1)}{L[(2L+1)!!]^2}\left(\frac{3}{L+3}\right)^2\frac{1}{137}\left(\frac{3\times 10^{10}E_\gamma}{197\times 10^{-13}}\right)$$

$$\times\left(\frac{E_\gamma\times 1,4\times 10^{-13}A^{1/3}}{197\times 10^{-13}}\right)^{2L}$$

$$= \frac{4,4(L+1)}{L[(2L+1)!!]^2}\left(\frac{3}{L+3}\right)^2\left(\frac{E_\gamma}{197}\right)^{2L+1}(1,4A^{1/3})^{2L}\times 10^{21}\ s^{-1}$$

với E_γ có đơn vị là MeV. Xét ^{16}O. Nếu $E_\gamma \sim 1$ MeV, ta có

$$\frac{\lambda_E(L+1)}{\lambda_E(L)} \sim (kR)^2 = \left(\frac{E_\gamma R}{\hbar c}\right)^2 = \left(\frac{1,4 \times 10^{-13} \times 16^{1/3}}{197 \times 10^{-13}}\right)^2 \approx 3 \times 10^{-4}.$$

Vì vậy, $\lambda_E(L)$ giảm một thừa số 10^{-4} khi L tăng thêm 1. Điều này có nghĩa là bức xạ E_L được phát ra chủ yếu khi tính đa cực L được phép thấp nhất.

Các chuyển mức của ^{16}O được chỉ ra trên hình 2.31 có thể tổng hợp lại trong bảng dưới đây.

Chuyển mức	$\Delta\pi$	Δl	Loại	L	E_γ (MeV)
E_1	có	3	bát cực	3	6,1
E_2	có	1	lưỡng cực	1	0,9
E_3	không	2	tứ cực	2	1,0
E_4	không	2	tứ cực	2	1,0
E_5	có	1	lưỡng cực	1	7,1

Vì vậy, ta có

$$\begin{aligned}\lambda_{E_1} : \lambda_{E_2} : \lambda_{E_3} : \lambda_{E_4} : \lambda_{E_5} = &\frac{4}{3(7!!)^2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{6,1}{197}\right)^7 (1,4A^{1/3})^6 \\ &: \frac{2}{(3!!)^2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{0,9}{197}\right)^3 (1,4A^{1/3})^2 \\ &: \frac{3}{2(5!!)^2}\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{1}{197}\right)^5 (1,4A^{1/3})^4 \\ &: \frac{3}{2(5!!)^2}\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{1}{197}\right)^5 (1,4A^{1/3})^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&: \frac{2}{(3!!)^2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{7,1}{197}\right)^3 (1,4A^{1/3})^2 \\ &= 1,59 \times 10^{-12} : 1,48 \times 10^{-7} : 1,25 \times 10^{-12} \\ &\quad : 1,25 \times 10^{-12} : 7,28 \times 10^{-5} \\ &= 2,18 \times 10^{-8} : 2,03 \times 10^{-3} \\ &\quad : 1,72 \times 10^{-8} : 1,72 \times 10^{-8} : 1\end{aligned}$$

Vì vậy, xác suất chuyển mức của E_5 là lớn nhất, E_2 tiếp theo, còn E_3, E_4 và E_1 là nhỏ nhất.

(b) Chu kì bán rã của mức năng lượng 7,1 MeV có thể được xác định thông qua λ_{E_5}

$$\lambda_{E_5} = \frac{4,4 \times 2}{(3!!)^2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{7,1}{197}\right)^3(1,4 \times 16^{1/3})^2 \times 10^{21} = 3,2 \times 10^{17}\ s^{-1},$$

suy ra

$$T_{1/2}(7,1\ \text{MeV}) = \ln 2/\lambda_{E_5} = 2,2 \times 10^{-18}\ s\,.$$

Bỏ qua các chuyển mức đối với các mức năng lượng khác vì xác suất xảy ra các chuyển mức này rất nhỏ, ví dụ như

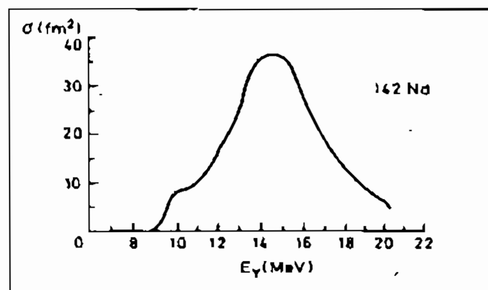
$$\lambda_{E_3} : \lambda_{E_5} = 1,7 \times 10^{-8} : 1\,.$$

Hơn nữa, sử dụng mẫu đơn hạt sẽ thích hợp khi giả thiết rằng các hạt nhân có dạng đối xứng cầu, lúc đó hàm sóng tại trạng thái ban đầu và cuối cùng là hằng số ở bên trong hạt nhân và bằng không khi ở bên ngoài hạt nhân, điều này phù hợp với hạt nhân ^{16}O.

(c) Chuyển mức γ từ $0^+ \to 0^+$ tương đương với chuyển mức từ mức có năng lượng là 6,0 MeV về trạng thái cơ bản của ^{16}O bị cấm. Tuy nhiên, các nucleon vẫn có thể chuyển về trạng thái cơ bản bởi biến hoán bên trong.

2094

Tia γ có thiết diện toàn phần $\sigma_{\text{toàn phần}}$ (loại trừ cặp e^+e^-) trên neodym 142 được biểu diễn trên hình 2.32.



Hình 2.32

(a) Thiết diện của lưỡng cực điện hay lưỡng cực từ chiếm ưu thế và tại sao?

(b) Coi các hạt nhân đơn giản như hai chất lỏng nucleon (proton và nơtron), hãy giải thích một cách định tính nguồn gốc gây nên sự cộng hưởng được chỉ ra trong hình vẽ.

(c) Sử dụng một mẫu đơn giản của các hạt nhân như A hạt được giới hạn trong một thế năng của dao động trễ điều hòa, hãy ước lượng năng lượng cộng hưởng như một hàm của A. Giá trị quan sát được trong hình vẽ là $A = 142$ có đúng không?

(d) Hãy thảo luận về vai trò của lực tương tác hai vật còn dư trong sự hiệu chính ước lượng trong phần (c).

(e) Quá trình vật lý nào dẫn đến độ rộng của cộng hưởng? Hãy ước lượng gần đúng độ rộng đó do các cơ chế khác nhau.

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Đường cong kích thích của các phản ứng (γ, n) và (γ, p) cho một vùng cộng hưởng rộng vài MeV nằm trong khoảng năng lượng từ $E_\gamma = 10$ tới 20 MeV. Điều này có thể được giải thích như sau. Khi năng lượng kích thích tăng, mật độ trạng thái tăng và bề rộng mở rộng ra. Khi khoảng cách và bề rộng cùng cỡ, các mức tách riêng nối lại nhau, do đó tia γ trong một khoảng năng lượng của các có thể kích thích các hạt nhân, gây ra cộng hưởng rộng. Nếu $E_\gamma \approx 15$ MeV lớn hơn năng lượng dao động điều hòa của các nucleon $\hbar\omega \approx 44/A^{1/3}$ MeV thì chuyển mức lưỡng cực có thể xảy ra. Mô hình đơn hạt cho biết **(Bài tập 2093(a))**

$$\frac{\Gamma(E2 or M1)}{\Gamma(E1)} \approx (kR)^2 = \left(\frac{15 \times 1,4 \times 10^{-13} \times 142^{1/3}}{197 \times 10^{-13}}\right)^2 = 0,3 .$$

Vì vậy, tiết diện hạt nhân là nguyên nhân chính gây ra sự hấp thụ lưỡng cực điện. Chúng ta cũng có thể xem đến sự hấp thụ tập thể của các hạt nhân. Chúng ta thấy rằng sự hấp thụ của các tia γ làm cho hạt nhân bị biến dạng và khi năng lượng của tia γ bằng các mức năng lượng dao động tập thể của hạt nhân, sự hấp thụ cộng hưởng có thể diễn ra. Khi $E_\gamma \approx 15$ MeV, đối với các hạt nhân ^{142}Nd sự dao động lưỡng cực điện, tứ cực điện, bát cực điện có thể xảy ra. Tuy nhiên khi năng lượng này gần với mức năng lượng lưỡng cực điện nhất thì $E1$ hấp thụ cộng hưởng chiếm ưu thế.

(b) Coi các proton và nơtron bên trong hạt nhân như các chất lỏng có thể thấm vào nhau nhưng không thể nén lại được. Do sự va chạm của photon tới, các proton và nơtron bên trong hạt nhân có khuynh hướng di chuyển về các mặt khác nhau, và khối tâm của chúng tách rời nhau. Do đó, thế năng của

các hạt nhân tăng, sinh ra lực hồi phục dẫn đến sự dao động lưỡng cực. Hiện tượng hấp thụ cộng hưởng diễn ra nếu tần số của photon bằng với tần số cộng hưởng của dao động điều hòa.

(c) Trong một mô hình dao động tử điều hòa đơn giản, chúng ta coi một hạt có khối lượng $M = Am_N$, m_N là khối lượng hạt nhân, chuyển động trong một thế $V = \frac{1}{2}Kx^2$, ở đây K là hằng số lực, tỉ lệ với tiết diện ngang của hạt nhân. Tần số cộng hưởng là $f \approx \sqrt{K/M}$. Khi $K \propto R^2 \propto A^{2/3}$, $M \propto A$, ta có

$$f \propto A^{-1/6} \approx A^{-0.17} .$$

Điều này phù hợp với kết quả thực nghiệm $E_\gamma \propto A^{-0,19}$.

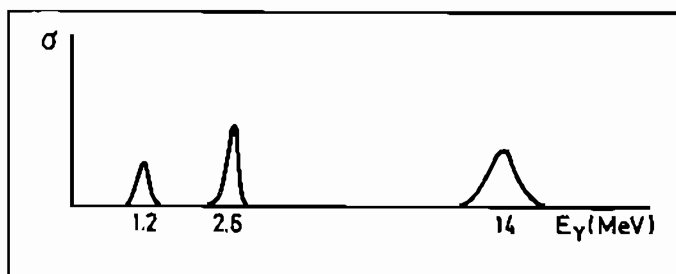
(d) Lực hai vật còn dư không nằm ở vị trí chính giữa. Nó làm cho các nucleon bị biến dạng và vì vậy dao động một cách dễ dàng hơn. Sự chênh lệch giữa các kết quả tính toán gần đúng theo lý thuyết và thực nghiệm có thể được giải thích bởi các thành phần của lực còn dư. Riêng với các nucleon bị biến dạng mạnh có thể xảy ra nhiều đỉnh cộng hưởng kép. Hiện tượng này đã được quan sát trong thực nghiệm.

(e) Sự mở rộng của độ rộng vùng cộng hưởng khổng lồ chủ yếu là do sư biến dạng của hạt nhân và sự cộng hưởng dưới tác dụng của các photon tới gây nên. Thứ nhất là sự biến dạng và lực hồi phục liên quan đến rất nhiều yếu tố và vì vậy dao động tử điều hòa giả định không có một đặc trưng tốt (giá trị Q rất nhỏ), do đó độ rộng vùng cộng hưởng được mở rộng. Thứ hai là năng lượng của photon có thể đi tiếp tới các nucleon khác, tạo ra hạt nhân phức hợp và phân bố lại năng lượng tùy theo bậc tự do. Điều này có thể tạo ra một độ rộng cộng hưởng mở rộng từ vài MeV đến 10 MeV. Hơn nữa còn có các hiệu ứng mở rộng khác như hiệu ứng Doppler mở rộng vùng cộng hưởng khoảng vài keV. Đối với một hạt nhân có $A = 142$, thì độ mở rộng do hiệu ứng Doppler gây ra bằng

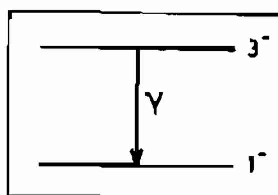
$$\Delta E_D \approx \frac{E_\gamma^2}{Mc^2} \approx \frac{15^2}{142 \times 940} = 1,7 \times 10^{-3}\ MeV = 1,7\ \text{keV}.$$

2095

Tiết diện hấp thụ toàn phần của các tia γ của ^{208}Pb (trạng thái cơ bản có spin chẵn lẻ $J^\pi = 0^+$) được chỉ ra trong hình 2.33. Đỉnh tại 2,6 MeV tương ứng với mức $J^\pi = 3^-$ mức này tiếp tục phân rã γ về mức 1^- tương ứng với năng lượng 1,2 MeV (xem hình 2.34).



Hình 2.33



Hình 2.34

(a) Các đa cực điện hay các đa cực từ của các tia γ phát ra trong chuyển dời giữa mức 2,6 MeV và 1,2 MeV như thế nào? Theo bạn cái nào chiếm ưu thế?

(b) Độ rộng của đỉnh tại mức 2,6 MeV nhỏ hơn 1 eV, trong khi đó độ rộng tại mức 14 MeV là 1 MeV. Bạn có thể đưa ra một lý do hợp lý cho sự khác biệt lớn này? Thí nghiệm nào có thể được thực hiện để kiểm chứng sự phỏng đoán của bạn?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Trong chuyển mức $3^- \to 1^-$, photon phát xạ có thể mang theo một momen động lượng $l = 4, 3, 2$. Khi không có sự thay đổi tính chẵn lẻ, $l = 4, 2$. Vì vậy các chuyển mức có thể xảy ra do các đa cực $E4$, $M3$ hoặc $E2$. Chuyển mức tứ cực điện $E2$ là chủ yếu.

(b) Độ rộng đỉnh của mức năng lượng 2,6 MeV nhỏ hơn 1 eV vì đây là loại phân rã điện từ, còn đỉnh hấp thụ tại mức năng lượng 14 MeV là một cộng hưởng lưỡng cực "khổng lồ" (**Bài tập 2094**). Do năng lượng cộng hưởng cao quá trình này chủ yếu là các tương tác mạnh với sự phát xạ của các nucleon, tại đây độ rộng của các mức năng lượng đơn rộng hơn và rất nhiều mức kết hợp với nhau tạo thành một cộng hưởng rộng và khổng lồ. Vì vậy, sự khác

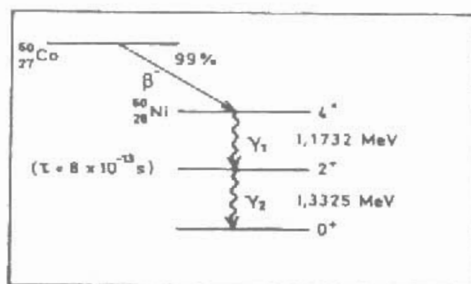
nhau trong chế độ phân rã đã dẫn đến sự khác nhau lớn về độ rộng của các mức.

Thực tế, chỉ có các tia γ là nhận được từ sự phát xạ tại mức 2,6 MeV trong khi đó tại mức 14 MeV lại là các nucleon.

2096

Các tia gama được phát ra liên tục từ một hạt nhân có trạng thái kích có phân bố góc bất đẳng hướng với hướng spin của các hạt nhân bị kích thích. Vì thông thường các spin hạt nhân không định hướng song song với nhau và sự phân bố hướng của chúng rất ngẫu nhiên nên tính không đẳng hướng không thể đo đạc được. Tuy nhiên đối với các hạt nhân trải qua một chuỗi bậc thang bức xạ γ (ví dụ, ^{60}Ni được sử dụng trong bài tập này, xem hình 2.35), thì hướng của một trong các tia γ có thể được sử dụng như một tham chiếu cho sự định hướng của một hạt nhân riêng. Vì vậy, giả sử tại một trạng thái tức thời chu kì bán rã là không đáng kể, một phép đo tỉ lệ trùng hợp của hai tia γ có thể cho biết tương quan góc để xác định các spin hạt nhân.

Trong trường hợp của ^{60}Ni chúng ta có chuỗi như thế, cụ thể là $J^p = 4^+ \to J^p = 2^+ \to J^p = 0^+$. Hàm tương quan góc có dạng $W(\theta) \sim 1 + 0,1248\cos^2\theta + 0,0418\cos^4\theta$.



Hình 2.35

(a) Các chuyển mức này thuộc loại nào?

(b) Tại sao số mũ lẻ của $\cos\theta$ thì khuyết? Tại sao $\cos^4\theta$ lại là lũy thừa cao nhất?

(c) Vẽ sơ đồ lắp đặt của một thí nghiệm để chỉ ra cách bạn tạo ra các phép đo này. Định nghĩa tất cả thành phần. (Cho sơ đồ khối)

(d) Mô tả đầu dò tia γ.

(e) Bằng cách nào có thể xác định được các hệ số trong hàm tương quan để chứng minh rằng ^{60}Ni có chuyển mức $4 \to 2 \to 0$?

(f) Sự trùng hợp ngẫu nhiên sẽ xảy ra giữa hai đầu dò tia γ? Làm thế nào để có thể tính đến sự trùng hợp này?

(g) Một nguồn ^{22}Na sẽ được sử dụng như thế nào để chuẩn các đầu dò và các thiết bị điện tử? (^{22}Na phát ra tia gama có năng lượng 0,511 MeV từ sự hủy β^+).

(h) Có bao nhiêu tán xạ Compton của các tia γ trong thời gian nguồn ^{60}Co thay đổi các thông số?

(*Chicago*)

Lời giải:

(a) Mỗi bức xạ tia gama trong hai chuỗi phát xạ trừ 2 từ momen động lượng của các hạt nhân kích thích, nhưng không làm thay đổi tính chẵn lẻ. Vì vậy, hai phát xạ là loại tứ cực điện E2.

(b) Hàm tương quan góc đối bức xạ chuỗi bậc thang có thể được viết dưới dạng

$$W(\theta) = \sum_{K=0}^{K_{max}} A_{2K} P_{2K}(\cos\theta),$$

trong đó $0 \leq K_{max} \leq \min(J_b, L_1, L_2)$,

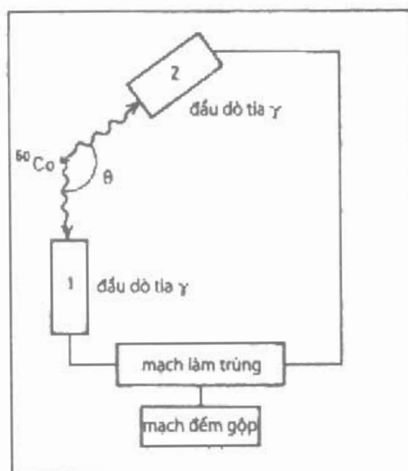
$$A_{2K} = F_{2K}(L_1, J_a, J_b) F_{2K}(L_2, J_c, J_b),$$

L_1, L_2 là momen động lượng của 2 tia γ, J_a, J_b, J_c là spin hạt nhân ban đầu, giữa và cuối, $P_{2K}(\cos\theta)$ là đa thức Legendre.

Từ $W(\theta)$ chỉ phụ thuộc vào $P_{2K}(\cos\theta)$, nó chỉ bao hàm các lũy thừa chẵn của $\cos\theta$. Với sự chuyển trạng thái $4^+ \to 2^+ \to 0^+$ của ^{60}Ni, K_{max} có giá trị là 2. Vì thế giá trị lớn nhất của $\cos\theta$ trong $P_4(\cos\theta)$ là 4 và cũng tương tự với $W(\theta)$.

(c) Hình 2.36 mô tả thiết bị dùng cho thí nghiệm đo đạc sự tương quan về góc giữa các tia γ. Detectơ 1 được giữ cố định, quay detectơ 2 trong mặt phẳng chứa nguồn và detectơ 1 sao cho thay đổi góc giữa 2 trục của detectơ trong khi khoảng cách từ detectơ tới nguồn là không đổi. Một hệ trùng hợp nhanh-trễ được sử dụng để giảm sự trùng hợp giả và tán xạ nhiều lần.

(d) Một detectơ tia γ gồm có 1 chất nhấp nháy, bộ phận đo quang và một bộ khuếch đại tín hiệu cao áp cho bộ đo quang. Khi mà chất nhấp nháy hấp thụ một tia γ sẽ xảy ra hiện tượng huỳnh quang. Photon huỳnh quang sẽ đập



Hình 2.36

vào catôt của bộ phận đo quang gây ra sự phát sơ cấp quang điện tử, tại đó dưới điện áp cao sẽ xảy ra hiện tượng khuếch đại tín hiệu lên nhiều lần, cho ta một tín hiệu ở anôt, tín hiệu này sau đó được khuếch đại và xử lý tiếp.

(e) Bộ đếm tốc độ trùng hợp sẽ xác định đối với các góc θ khác nhau. Từ sự phù hợp giữa dữ liệu với hàm tương quan góc, chúng ta sẽ suy ra được các hệ số.

(f) Chúng ta có thể liên kết đường trễ của một trong hai detectơ γ. Nếu thời gian trễ lớn có thể so với thời gian sống của trạng thái trung gian, tín hiệu giữa 2 detectơ có thể xem là độc lập và các tốc độ đếm trùng hợp là ngẫu nhiên. Điều này sau đó được sử dụng để xác định đúng dữ liệu cần quan sát.

(g) Hai tia γ năng lượng 0,511 MeV được tạo ra từ phản ứng hủy cặp tia β^+ của nguyên tử ^{22}Na tại cùng một thời điểm và phát ra ngược chiều. Chúng có thể dùng như một cơ sở để hiệu chỉnh thời gian trễ giữa hai đầu dò để bù cho độ trễ vốn có của đầu dò và mạch điện tử để có một kết quả tốt nhất.

(h) Tán xạ Compton của hai tia γ trên nguồn ^{60}Co sẽ làm tăng sự bất thường của phát xạ γ và giảm sự đẳng hướng, như vậy làm giảm hệ số nội suy trong hàm hiệu chính góc.

2097

Một hạt nhân có khối lượng ban đầu là M đang ở trang thái kích thích

có năng lượng ΔE lớn hơn so với trạng thái cơ bản của hạt nhân. Hạt nhân phát ra một tia gama có năng lượng $h\nu$ và tạo ra sự chuyển dời về trạng thái cân bằng. Giải thích tại sao tia gama có năng lượng $h\nu$ lại không bằng hiệu năng lượng kích thích ΔE và quy định tỉ số $\frac{h\nu - \Delta E}{\Delta E}$. (Ta có thể thừa nhận $\Delta E < Mc^2$).

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Hạt nhân có thể bị giật lùi khi phát ra tia γ bởi vì định luật bảo toàn động lượng. Năng lượng giật lùi lấy từ năng lượng kích thích và khiến cho $h\nu$ nhỏ hơn ΔE.

Gọi năng lượng toàn phần của các hạt nhân là E và động lượng giật lùi là p. Định luật bảo toàn năng lượng và động lượng cho ta

$$p = p_\gamma, \qquad E + E_\gamma = Mc^2 + \Delta E\,.$$

Vì

$$E_\gamma = P_\gamma c = h\nu, \qquad E = \sqrt{p^2c^2 + M^2c^4}\,,$$

ta có

$$E_\gamma = \frac{1}{2Mc^2} \cdot \frac{(\Delta E)^2 + 2Mc^2\Delta E}{\left(1 + \frac{\Delta E}{Mc^2}\right)} \approx \Delta E - \frac{(\Delta E)^2}{2Mc^2}\,,$$

hay

$$\frac{h\nu - \Delta E}{\Delta E} = -\frac{\Delta E}{2Mc^2}\,.$$

2098

Một hạt (giả định) có khối lượng nghỉ là m ở trạng thái kích thích có năng lượng ΔE có thể đạt đến bằng cách hấp thụ tia γ. Giả thiết rằng $\Delta E/c^2$ không quá nhỏ so với m.

Tìm năng lượng tia γ cộng hưởng E_γ có thể kích thích hạt ở trạng thái nghỉ.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Kí hiệu hạt là A. Phản ứng là $\gamma + A \to A^*$. Gọi E_γ và p_γ là năng lượng và động lượng tương ứng của tia γ, p là động lượng của A ở trạng thái nghỉ ban

đầu, sau khi hấp thụ tia γ. Định luật bảo toàn cho ta biểu thức

$$E_\gamma + mc^2 = \sqrt{\left(m + \frac{\Delta E}{c^2}\right)^2 c^4 + p^2c^2}\,.$$

Định luật bảo toàn momen động lượng

$$p = p_\gamma\,,$$

hay

$$pc = p_\gamma c = E_\gamma\,.$$

Thay vào biểu thức có

$$E_\gamma = \Delta E + \frac{(\Delta E)^2}{2mc^2}\,.$$

Như vậy, cần đến tia γ có năng lượng cao hơn ΔE một lượng là $\frac{\Delta E^2}{2mc^2}$, nó cung cấp năng lượng cho sự giật lùi của hạt.

2099

(a) Hãy sử dụng nguyên lý tương đương và thuyết tương đối hẹp để tính toán, đến bậc nhất theo y, thay đổi tần số của một photon rơi thẳng xuống ở khoảng cách y so với bề mặt trái đất.

(b) Hoàn toàn có thể xác định sự thay đổi của tần số trong phòng thí nghiệm nếu sử dụng hiệu ứng Mössbauer.

Hãy mô tả thí nghiệm như vậy, đặc biệt là:

Thế nào là hiệu ứng Mössbauer và tại sao nó lại có thể ứng dụng trong trường hợp này.

Năng lượng của một photon mà ta cần là bao nhiêu?

Bằng cách nào ta có thể phát photon?

Bằng cách nào ta có thể xác định sự thay đổi nhỏ của tần số?

Ước lượng số photon mà ta cần để có thể xác định được kết quả chính xác.

(*Columbia*)

Lời giải:

(a) Giả sử tần số của photon ban đầu là ν_0, và tần số sau khi rơi ở khoảng cách y trong trường hấp dẫn của trái đất là ν. Do đó, khối lượng tương đương

của photon là $h\nu_0/c^2$ và $h\nu/c^2$. Giả thiết khối lượng của trái đất là M và bán kính trái đất là R. Sự bảo toàn năng lượng cho ta:

$$h\nu_0 - G\frac{M \cdot \frac{h\nu_0}{c^2}}{R+y} = h\nu - G\frac{M \cdot \frac{h\nu}{c^2}}{R},$$

với G là hằng số hấp dẫn, hay khai triển đến bậc nhất của y,

$$\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} = \frac{GM}{c^2}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+y}\right) \approx \frac{gy}{c^2} = 1,09 \times 10^{-16} y,$$

trong đó g là gia tốc trọng trường và y tính theo mét. Với một ví dụ, ở khoảng cách $y = 20m$ ta có.

$$\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} = 2,2 \times 10^{-15}.$$

(b) Theo nguyên lý, photon phát bởi một hạt nhân có năng lượng E_γ bằng với năng lượng kích thích E_0 của hạt nhân. Tuy nhiên, trong trường hợp có sự giật lùi của hạt nhân sẽ mất đi một phần năng lượng, $E_\gamma < E_0$, hoặc chính xác hơn (**Bài tập 2097**),

$$E_\gamma = E_0 - \frac{E_0^2}{2Mc^2},$$

trong đó M là khối lượng của hạt nhân. Tương tự khi mà hạt nhân hấp thụ một photon nhờ hiện tượng cộng hưởng hấp thụ, phonton cần có năng lượng **(Bài tập 2098)**

$$E_\gamma = E_0 + \frac{E_0^2}{2Mc^2}.$$

Thường thì $\frac{E_0^2}{2Mc^2}$ lớn hơn so với độ rộng cộng hưởng, tia γ phát ra bởi một hạt nhân thì không thể bị hấp thụ cộng hưởng bởi một hạt nhân cùng loại.

Tuy nhiên, khi cả nguồn γ và chất hấp thụ đều được đặt cố định trong tinh thể thì sự lùi lại của toàn bộ tinh thể là như nhau, $M \to \infty$, $\frac{E_0^2}{2Mc^2} \to 0$. Hấp thụ cộng hưởng có thể xảy ra với hạt nhân cùng loại tương ứng. Nó tương ứng với hiệu ứng Mössbauer. Nó cho phép ta xác định chính xác năng lượng của tia γ, độ chính xác chỉ bị giới hạn bởi độ rộng tự nhiên của mức.

Để xác định độ dịch tần $\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = 2,2 \times 10^{-15}$, nguồn hấp thụ γ phải có mức với độ rộng tự nhiên là Γ/E_γ nhỏ hơn $\Delta\nu/\nu_0$. Một sự lựa chọn có thể là ^{67}Zn có $E_\gamma = 93$ keV, $\Gamma/E_\gamma = 5,0 \times 10^{-16}$. Tinh thể của ^{67}Zn có thể sử dụng cả hai như nguồn phát và nguồn thu. Tại $y = 0$ cả hai nguồn đều được giữ cố định trong mặt phẳng nằm ngang và đường cong hấp thụ cộng hưởng được

xác định. Sau đó, di chuyển tinh thể nguồn 20 m lên phía trên vật hấp thụ. Tần số của photon tới vật hấp thụ cố định là $\nu_0 + \Delta\nu$ và hiện tượng hấp thụ cộng hưởng không xảy ra. Nếu như vật hấp thụ có vận tốc đi xuống v thì theo hiệu ứng Doppler, photon có tần số ν_0 được vật hấp thụ nhận biết, hấp thụ cộng hưởng có thể xảy ra. Do

$$\nu_0 = (\nu_0 + \Delta\nu)\left(1 - \frac{v}{c}\right) \approx \nu_0 + \Delta\nu - \nu_0\left(\frac{v}{c}\right),$$

$$v \approx c\left(\frac{\Delta\nu}{\nu_0}\right) = 3 \times 10^{10} \times 2,2 \times 10^{-15}$$

$$= 6,6 \times 10^{-5}\ cm\ s^{-1},$$

ở đây vận tốc phụ thuộc vào vật hấp thụ.

Bởi vì độ rộng tự nhiên của tia γ phát ra ở ^{67}Zn nhỏ hơn nhiều so với tỉ số $\Delta\nu/\nu_0$, ở đây không cần một tốc độ đếm nhanh. Sai số thống kê khoảng 5% của đỉnh phổ là đủ trong việc xác định thay đổi tần số, tương ứng với số đếm của photon là 400.

2100

Một đồng vị hạt nhân mẹ có thời gian bán rã $\tau_{1/2} = 10^4$ năm$= 3,15\times10^{11}$ s. Nó phân rã thông qua một dãy các chất phóng xạ con và kết thúc ở một đồng vị bền. Hầu hết các hạt nhân con đều có thời gian bán rã lớn nhất là 20 năm. Một số ít hơn 1 năm. Tại thời điểm $t = 0$ có 10^{20} hạt nhân mẹ và chưa có hạt nhân con nào.

(a) Tại $t = 0$ độ phóng xạ (phân rã/s) của hạt nhân mẹ là bao nhiêu?

(b) Phải mất bao nhiêu lâu thì tỉ lệ của các hạt nhân đồng vị 20 năm đạt được tỉ lệ 97% của giá trị cân bằng.

(c) Tại $t = 10^4$ năm thì có bao nhiêu hạt nhân đồng vị 20 năm xuất hiện. Cho rằng không có một phân rã nào ảnh hưởng tới phân rã đồng vị 20 năm.

(d) Đồng vị 20 năm có 2 kiểu phân rã: α, 99,5%; β, 0,5%. Tại thời điểm $t = 10^4$ năm thì độ phóng xạ của đồng vị trên trong phân rã β là bao nhiêu?

(e) Trong số chất phóng xạ con, có chất nào có thể đạt được thạng thái cân bằng của chúng nhanh hơn (hay chậm hơn) đồng vị 20 năm không?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Hằng số phân rã của đồng vị mẹ là

$$\lambda_1 = \frac{\ln 2}{\tau_{1/2}} = 6,93 \times 10^{-5} \text{ năm}^{-1} = 2,2 \times 10^{-12}\ s^{-1}.$$

Khi $t = 0$, độ phóng xạ của hạt nhân mẹ là

$$A_1(0) = \lambda_1 N_1(t=0) = \frac{2,2 \times 10^{-12} \times 10^{20}}{3,7 \times 10^7} = 5,95 \text{ milicuri(mc)}.$$

(b) Cho rằng đồng vị con 20 năm là hạt nhân con thứ n trong dãy phóng xạ. Vì thế độ cư trú là hàm của thời gian

$$N_n(t) = N_1(0)(h_1 e^{-\lambda_1 t} + h_2 e^{-\lambda_2 t} + \cdots + h_n e^{-\lambda_n t}),$$

trong đó

$$h_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{n-1}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)\cdots(\lambda_n - \lambda_1)},$$
$$h_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{n-1}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)\cdots(\lambda_n - \lambda_2)},$$
$$\vdots$$
$$h_n = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{n-1}}{(\lambda_1 - \lambda_n)(\lambda_2 - \lambda_n)\cdots(\lambda_{n-1} - \lambda_n)},$$

trong đó $N_1(0)$ là số hạt nhân mẹ tại thời điểm $t = 0$, λ_i là hằng số phân rã của chất phân rã thứ i. Với cân bằng trường kì chúng phụ thuộc $\lambda_1 \ll \lambda_j$, $j = 2, 3, \ldots, n$. .... Do đồng vị con thứ n có thời gian bán rã lớn nhất 10^{20} năm, chúng ta cũng có $\lambda_n \ll \lambda_j$, $j = 2, 3, \ldots, (j \neq n)$, $\lambda_n = \ln 2/\tau_{1/2} = 3,466 \times 10^{-2}$ năm ^{1}. Do vậy,

$$h_1 \approx \frac{\lambda_1}{\lambda_n}, \qquad h_n \approx -\frac{\lambda_1}{\lambda_n}.$$

Sau một thời gian đủ dài hệ thống sẽ đạt tới trạng thái cân bằng tại đó $\lambda_n N_n^e(t) = \lambda_1 N_1^e(t)$, chỉ số trên e kí hiệu giá trị cân bằng, hay

$$N_n^e(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_n} N_1^e(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_n} N_1(0) e^{-\lambda_1 t}.$$

Tại thời điểm t trước khi cân bằng ta có

$$N_n(t) \approx N_1(0)\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}e^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_n}e^{-\lambda_n t}\right).$$

Khi $N_n(t) = 0,97N_n^e(t)$, hay

$$0,97\frac{\lambda_1}{\lambda_n}N_1(0)e^{-\lambda_1 t} \approx N_1(0)\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}e^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_n}e^{-\lambda_n t}\right),$$

thời điểm $t = t_0$ được xác định

$$t_0 = \frac{\ln 0,03}{\lambda_1 - \lambda_n} \approx 101 \text{ năm}.$$

Do đó, sau khoảng thời gian 101 năm độ cư trú của đồng vị 20 năm sẽ đạt được 97% giá trị cân bằng của nó.

(c) Tại $t = 10^4$ năm, hệ thống có thể coi như đạt trang thái cân bằng. Do đó, độ cư trú của đồng vị 20 năm tại thời điểm đó là

$$N_n(10^4) = \frac{\lambda_1}{\lambda_n}N_1(0)e^{-\lambda_1 t} = 10^{17}.$$

(d) Sau khi hệ thống đạt trạng thái cân bằng, tất cả các đồng vị sẽ có cùng độ phóng xạ. Tại $t = 10^4$ năm, độ phóng xạ của đồng vị phóng xạ gốc là

$$A_1(10^4) = \lambda_1 N(0)e^{-\lambda_1 t} = 6,93 \times 10^{-5} \times 10^{20} \times \exp(-6,93 \times 10^{-5} \times 10^4)$$
$$= 3,47 \times 10^{15} \text{ năm}^{-1} = 3,0\, mc.$$

Hoạt độ phóng xạ tia β được tạo bởi các đồng vị 20 năm là

$$A_\beta = 3 \times 0,05 = 0,15\, mc.$$

(e) Các đồng vị con trước đồng vị 20 năm có thể đạt tới độ cư trú cân bằng của chúng trước đồng vị 20 năm, các đồng vị sau đồng vị 20 năm có thể đạt tới độ cư trú cân bằng của chúng cũng nhanh như đồng vị 20 năm.

2101

Một lá vàng mỏng được rọi bằng chùm nơtron nhiệt với thông lượng 10^{12} nơtron/cm^2/s. Hạt nhân của vàng ^{198}Au có chu kì bán rã là 2,7 ngày được tạo

ra từ phản ứng $^{197}Au(n,\gamma)^{198}Au$. Mật độ của vàng là 19,3 gm/cm^3 và tiết diện ngang cho phản ứng trên là $97,8 \times 10^{-24}$ cm^2. ^{197}Au là 100% tự nhiên.

(a) Nếu như lá vàng bị rọi trong thời gian 5 phút, thì độ phóng xạ của ^{198}Au trong lá vàng là bao nhiêu phân rã/cm^2/s?

(b) Lượng ^{198}Au/cm^2 lớn nhất có thể được tạo ra trên lá vàng là bao nhiêu?

(c) Lá vàng phải được chiếu xạ bao lâu nếu nó sẽ đạt đến 2/3 độ phóng xạ cực đại của nó?

(*Columbia*)

Lời giải:

(a) Tại thời điểm ban đầu mật độ ^{197}Au trên một đơn vị diện tích là

$$N_1(0) = \frac{0,02 \times 19,3}{197} \times 6,023 \times 10^{23} = 1,18 \times 10^{21} \text{ cm}^{-2}.$$

Gọi số hạt nhân của ^{197}Au và ^{198}Au tại thời điểm t theo thứ tự là N_1, N_2, σ là tiết diện phản ứng hiệu dụng của phản ứng (n,γ), I là thông lượng của chùm nơtron tới, và λ là hằng số phân rã của ^{198}Au. Khi đó

$$\frac{dN_1}{dt} = -\sigma I N_1,$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \sigma I N_1 - \lambda N_2.$$

Lấy tích phân ta có

$$N_1 = N_1(0)e^{-\sigma It},$$

$$N_2 = \frac{\sigma I}{\lambda - \sigma I} N_1(0)(e^{-\sigma It} - e^{-\lambda t}).$$

Do

$$\lambda = \frac{\ln 2}{2,7 \times 24 \times 3600} = 2,97 \times 10^{-6}\ s^{-1},$$

$$\sigma I = 9,78 \times 10^{-23} \times 10^{12} = 9,78 \times 10^{-11}\ s^{-1} \ll \lambda,$$

tại $t = 5\ ph = 300\ s$ độ phóng xạ của ^{198}Au là

$$\begin{aligned} A(300s) &= \lambda N_2(t) = \frac{\lambda\sigma I N_1(0)}{\lambda - \sigma I}(e^{-\sigma It} - e^{-\lambda t}) \approx \sigma I N_1(0)(1 - e^{-\lambda t}) \\ &= 9,78 \times 10^{-11} \times 1,18 \times 10^{21} \times [1 - \exp(-2,97 \times 10^{-6} \times 300)] \\ &= 1,03 \times 10^{8}\ \text{cm}^{-2}\ s^{-1}. \end{aligned}$$

(b) Sau khi đạt tới sự cân bằng, độ phóng xạ của một nuclit và do đó số hạt nhân của nó giữ nguyên không thay đổi. Đây chính là lượng ^{198}Au tối đa được tạo ra. Vì

$$\frac{dN_2}{dt} = 0\,,$$

ta có

$$\lambda N_2 = \sigma I N_1 \approx \sigma I N_1(0)$$

suy ra

$$N_2 = \frac{\sigma I}{\lambda} N_1(0) = \frac{9,78 \times 10^{-11}}{2,97 \times 10^{-6}} \times 1,18 \times 10^{21}$$
$$= 3,89 \times 10^{16}\ \text{cm}^{-2}\,.$$

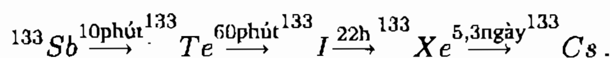
(c) Vì

$$A = \frac{2}{3} A_{\max} \approx \sigma I N_1(0)(1 - e^{-\lambda t})\,,$$

$$t = -\frac{1}{\lambda} \ln\left(1 - \frac{2}{3}\frac{A_{\max}}{\sigma I N_1(0)}\right) = -\frac{1}{\lambda} \ln\left(1 - \frac{2}{3}\right) = 3,70 \times 10^5\ s = 4,28\ \text{ngày}\,.$$

2102

Trong phản ứng phân hạchcủa ^{235}U, 4.5% của phân hạch là ^{133}Sb. Đồng vị này không bền và là gốc của dãy phân rã bức xạ β và kết thúc ổn định tại ^{133}Cs:



$$^{133}Sb \xrightarrow{10\text{phút}} {^{133}Te} \xrightarrow{60\text{phút}} {^{133}I} \xrightarrow{22\text{h}} {^{133}Xe} \xrightarrow{5,3\text{ngày}} {^{133}Cs}\,.$$

(a) Một mẫu 1 gam urani được chiếu xạ 60 phút trong lò phản ứng. Trong suốt quá trình mẫu được rọi bởi dòng có mật độ không đổi 10^{11} nơtron/cm^2 s. Tính số nguyên tử của Sb, Te, I sau khi đưa ra từ lò phản ứng. Biết rằng urani chiếm 99,3% ^{238}U và 0,7% ^{235}U, và tiết diện phân hạch nơtron của ^{235}U là 500 bac. (Bỏ qua hiện tượng chắn xạ của phần này đối với phần khác của mẫu).

(b) 12 h sau khi đưa ra khỏi lò phản ứng, lượng Iot có trong mẫu được tách ra nhờ phương pháp hóa học Có thể thu được bao nhiêu nguyên tử I nếu hiệu suất xử lý đạt 75%.

(*Columbia*)

Lời giải:

(a) Số nguyên tử Sb được sinh ra mỗi giây trong lò phản ứng là

$$
\begin{aligned}
C &= N_0 \cdot f \cdot \sigma \cdot 4,5\% \\
&= \frac{1 \times 0,007}{235} \times 6,023 \times 10^{23} \times 10^{11} \times 500 \times 10^{-24} \times 0,045 \\
&= 4,04 \times 10^7 \ s^{-1} .
\end{aligned}
$$

Gọi số nguyên tử của Sb, Te, I có trong mẫu khi đưa ra khỏi lò phản ứng là N_1, N_2, N_3 và hằng số phân rã của chúng lần lượt là $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Khi đó $\lambda_1 = \frac{\ln 2}{600} = 1,16 \times 10^{-3} \ s^{-1}$, $\lambda_2 = 1,93 \times 10^{-4} \ s^{-1}$, $\lambda_3 = 8,75 \times 10^{-6} \ s^{-1}$, và $\frac{dN_1}{dt} = C - \lambda_1 N_1$, với $N_1 = 0$ tại $t = 0$, trong khoảng $T = 3600 \ s$,

$$N_1(T) = \frac{C}{\lambda_1}(1 - e^{-\lambda_1 T}) = 3,43 \times 10^{10} ,$$

$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2$, với $N_2 = 0$, tại $t = 0$, suy ra

$$N_2(T) = \frac{C}{\lambda_2}\left(1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_1 T} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_2 T}\right) = 8,38 \times 10^{10} ,$$

$\frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2 - \lambda_3 N_3$, với $N_3 = 0$, tại $t = 0$, suy ra

$$
\begin{aligned}
N_3(T) = & \frac{C}{\lambda_3}\left[1 - \frac{\lambda_2\lambda_3 e^{-\lambda_1 T}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} - \frac{\lambda_3\lambda_1 e^{-\lambda_2 T}}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1)}\right] \\
& + \frac{C}{\lambda_3}\left[\frac{\lambda_2\lambda_3}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} - \frac{\lambda_1\lambda_3}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)} - 1\right] e^{-\lambda_3 T} \\
= & \frac{C}{\lambda_3}\left[1 - \frac{\lambda_2\lambda_3 e^{-\lambda_1 T}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} - \frac{\lambda_3\lambda_1 e^{-\lambda_2 T}}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1)}\right. \\
& \left. - \frac{\lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_3 T}}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}\right] \approx \frac{C}{\lambda_3}(1 - e^{-\lambda_3 T}) \\
= & \frac{C}{\lambda_3}(1 - 0,969) = 2,77 \times 10^{10} .
\end{aligned}
$$

(b) Các mẫu sau khi được đưa ra khỏi lò phản ứng, Sb không được sản suất thêm mà lượng nguyên tử Sb sẽ bị giảm đi theo thời gian. Ngoài ra, ở trạng thái ban đầu $t = T, N_1, N_2, N_3$ không phải là 0. Ta có

$$N_1(t) = N_1(T)e^{-\lambda_1 t},$$

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}N_1(T)e^{-\lambda_1 t} + \left[N_2(T) + \frac{\lambda_1 N_1(T)}{\lambda_1 - \lambda_2}e^{-\lambda_2 t}\right],$$

$$N_3(t) = \frac{\lambda_1\lambda_2 N_1(T)}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)}e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_2}\left[N_2(T) + \frac{\lambda_1 N_1(T)}{\lambda_1 - \lambda_2}\right]e^{-\lambda_2 t}$$
$$+ \left[N_3(T) + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_3}N_2(T) + \frac{\lambda_1\lambda_2 N_1(T)}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)}\right]e^{-\lambda_3 t}.$$

Trong $t = 12\ h$, do $t \gg \tau_1, \tau_2$,

$$\begin{aligned} N_3(12\text{ h}) &\approx \left[N_3(T) + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_3}N_2(T) + \frac{\lambda_1\lambda_2 N_1(T)}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)}\right]e^{-\lambda_3 t} \\ &= 10^{10} \times [2,77 + 8,80 + 3,62] \\ &\quad \times \exp(-8,75 \times 10^{-6} \times 12 \times 3600) \\ &= 1,04 \times 10^{11}. \end{aligned}$$

Số lượng nguyên tử của đồng vị I thu được là

$$N = 0,75 \times N_3 = 7,81 \times 10^{10}.$$

2103

Một lá ^{7}Li có khối lượng 0,05 g bị các nơtron nhiệt chiếu xạ (tiết diện hiệu dụng bắt hạt là 37 mbac và trở thành ^{8}Li, phân rã phóng xạ β^- có chu kì bán rã là 0,85 s. Chỉ ra độ phóng xạ cân bằng (số các phóng xạ β mỗi giây) khi lá đó phơi nhiễm dưới dòng nơtron ổn định là 3×10^{12} nơtron/s·cm^2.

(*Columbia*)

Lời giải:

Gọi độ cư trú của ^{7}Li là $N_1(t)$, của ^{8}Li là $N_2(t)$. Thời điểm ban đầu

$$N_1(0) = \frac{0,05}{7} \times 6,023 \times 10^{23} = 4,3 \times 10^{21}, \quad N_2(0) = 0.$$

Trong quá trình bị chiếu xạ, $N_1(t)$ thay đổi theo quy luật

$$\frac{dN_1}{dt} = -\sigma\phi N_1 \, ,$$

trong đó σ là tiết diện bắt giữ nơtron và ϕ là thông lượng nơtron, hay

$$N_1(t) = N_1(0)e^{-\sigma\phi t} \, .$$

$N_2(t)$ thay đổi theo quy luật

$$\frac{dN_2}{dt} = -\frac{dN_1}{dt} - \lambda N_2(t) = N_1(0)\sigma\phi e^{-\sigma\phi t} - \lambda N_2(t) \, ,$$

trong đó λ là hằng số phân rã beta của ^{8}Li. Tích phân cho ta

$$N_2(t) = \frac{\sigma\phi}{\lambda - \sigma\phi}(e^{-\sigma\phi t} - e^{-\lambda t})N_1(0) \, .$$

Tại trạng thái cân bằng, $\frac{dN_2}{dt} = 0$, cho thời gian t đạt tới trạng thái câng bằng là

$$t = \frac{1}{\lambda - \sigma\phi} \ln\left(\frac{\lambda}{\sigma\phi}\right) \, .$$

Do $\lambda = \frac{\ln 2}{0,85} = 0,816 \; s^{-1}$, $\sigma\phi = 3,7 \times 10^{-26} \times 3 \times 10^{12} = 1,11 \times 10^{-13} \; s^{-1}$,

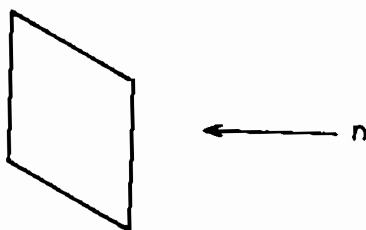
$$t \approx \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{\lambda}{\sigma\phi}\right) = 3,63 \; s \, .$$

Độ phóng xạ cân bằng là

$$A = \lambda N_2 \approx \frac{\lambda\sigma\phi N_1(0)}{\lambda - \sigma\phi} \approx \sigma\phi N_1(0) = 4,77 \times 10^8 \; Bq = 12,9 \; mc \, .$$

2104

Trong một thí nghiệm kích hoạt nơtron, một dòng hạt nơtron là 10^8 nơtron/cm^2·s chiếu thẳng góc tới bề mặt một lá kim loại có diện tích 1 cm^2, mật độ khối là 10^{22} atom/cm^3, và độ dày là 10^{-2} cm (hình 2.37). Các hạt nhân bia có tiết diện duy nhất bắt giữ nơtron là 1bac (10^{-24} cm^2), và sự bắt giữ tạo ra duy nhất một trạng thái hạt nhân phân rã tia β với thời gian sống là 10^4 s. Sau khi kết thúc 100 s chiếu xạ, tốc độ phát xạ tia β của lá kim loại là bao nhiêu?



Hình 2.37

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Gọi số hạt nhân bia là $N(t)$, và số hạt nhân không bền tạo thành do chiếu xạ là $N_\beta(t)$. Do độ dày của bia là 10^{-2} cm, có thể xem là mỏng do đó

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\sigma\phi N(t),$$

trong đó ϕ là thông lượng nơtron, σ là tiết diện bắt giữ nơtron toàn phần của hạt nhân bia. Tích phân ta có $N(t) = N(0)e^{-\sigma\phi t}$. Do $\sigma\phi = 10^{-24} \times 10^8 = 10^{-16}\ s^{-1}$, $\sigma\phi t = 10^{-14} \ll 1$ ta có thể coi $N(t) \approx N(0)$, vì vậy

$$\frac{dN}{dt} \approx -\sigma\phi N(0),$$

chỉ ra là tốc độ tạo thành gần như một hằng số. Tính tới các hạt nhân không bền, ta có

$$\frac{dN_\beta(t)}{dt} \approx \sigma\phi N(0) - \lambda N_\beta(t),$$

trong đó λ là hằng số phân rã β. Tích phân ta được

$$N_\beta(t) = \frac{\sigma\phi N(0)}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t}),$$

Vì thế

$$A = N_\beta(t)\lambda = \sigma\phi N(0)(1 - e^{-\lambda t}).$$

Tại $t = 100\ s$, phóng xạ của lá kim loại là

$$A = 10^{-16} \times 10^{22} \times 1 \times 10^{-2} \times (1 - e^{-10^{-2}}) = 99,5\ s^{-1}$$

với

$$\lambda = \frac{1}{10^4} = 10^{-4}\ s.$$

2105

Việc xác định tuổi bằng phóng xạ được thực hiện nhờ sử dụng đồng vị

(a) ^{238}U.

(b) ^{12}C.

(c) ^{14}C.

(*CCT*)

Lời giải:

^{14}C. Chất đồng vị phóng xạ ^{14}C duy trì một tỉ lệ nhỏ nhưng luôn cân bằng của cacbon trong khí quyển do liên tục được tạo ra nhờ sự bắn phá của các tia vũ trụ. Một sinh vật, bằng sự trao đổi cacbon trong khí quyển, thường xuyên duy trì cùng tỉ lệ đồng vị ^{14}C. Sau khi sinh vật chết đi, sự thay đổi đó ngừng lại và tỉ lệ đồng vị giảm đi, như thế cho ta một phương pháp xác định thời điểm của cái chết. ^{12}C là một đồng vị bền vững và không thể sử dụng cho mục đích trên. ^{238}U có thời gian bán rã là $4,5 \times 10^9$ năm, quá dài cho xác định thời gian.

2106

^{14}C phân rã với thời gian bán rã khoảng 5500 năm.

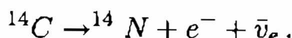
(a) Bạn có thể dự đoán bản chất của phân rã trên là gì? Và sản phẩm cuối cùng là gì? Giải thích ngắn gọn.

(b) Nếu không có thêm ^{14}C được đưa vào các hệ sinh học sau khi chết, hãy ước lượng tuổi của di tích một cây mà độ phóng xạ của nó (phân rã/s) được nêu trong phần (a) bằng 1/3 độ phóng xạ của cây có thể so sánh nhưng tương đối còn non.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) ^{14}C là một hạt nhân có nơtron dư nên sẽ phân rã β^- để trở thành ^{14}N theo phản ứng



$$^{14}C \rightarrow ^{14}N + e^- + \bar{\nu}_e \,.$$

(b) Số nguyên tử của ^{14}C trong một hệ sinh vật sau khi chết phân rã theo quy luật $N(t) = N(0)e^{-\lambda t}$, do vậy độ phóng xạ của ^{14}C là

$$A(t) = \lambda N(t) = A(0)e^{-\lambda t} \,.$$

Tuổi của cây từ lúc chết là

$$t = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{A(0)}{A(t)} = \frac{\tau_{1/2}}{\ln 2}\ln\frac{A(0)}{A(t)}$$

$$= \frac{5500}{\ln 2}\ln\left(\frac{3}{1}\right) = 8717 \text{ năm}.$$

2107

Plutoni (^{238}Pu, $Z = 94$) được dùng làm nguồn năng lượng trong các chuyến bay vũ trụ. ^{238}Pu là một chất phân rã α với thời gian bán hủy là 90 năm. ($2,7 \times 10^9$ s).

(a) Z và N của hạt nhân sau khi phân rã α là bao nhiêu?

(b) Tại sao ^{238}Pu lại dễ dàng phát xạ α hơn là phát xạ đơteron?

(c) Mỗi tia α được phát ra với năng lượng 5,5 MeV. Tính năng lượng thu được từ 238 g ^{238}Pu (6×10^{23})? (Bạn có thể sử dụng đơn vị tương thích nhưng phải đặc tả rõ).

(d) Nếu nguồn năng lượng trong câu (c) tạo ra 8 lần năng lượng tối thiểu để chạy một thiết bị, thì sau bao lâu nguồn vẫn còn đủ cho nhiệm vụ đó.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Hạt nhân con có $N = 142$, $Z = 92$.

(b) Điều này xảy ra bởi vì năng lượng liên kết của hạt α cao hơn so với đơteron và nhiều năng lượng hơn được giải phóng trong phân rã α. Với ^{238}Pu,

$$^{238}_{94}Pu \rightarrow ^{234}_{92}U + \alpha, \quad Q = 46,186 - 38,168 - 2,645 \approx 5,4 \text{ MeV},$$

$$^{238}_{94}Pu \rightarrow ^{236}_{93}Np + d, \quad Q = 46,186 - 43,437 - 13,136 \approx -10,4 \text{ MeV}.$$

Phân rã đơteron không thể vì $Q < 0$.

(c) Do sự giật lùi của ^{234}U, năng lượng phân rã trên một nguyên tử ^{238}Pu là

$$E_d = E_\alpha + E_U = \frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha} + \frac{p_\alpha^2}{2m_U} = E_\alpha\left(1 + \frac{m_\alpha}{m_U}\right) = 5,5\left(\frac{238}{234}\right) = 5,6 \text{ MeV}.$$

Vì thời gian bán rã của ^{238}Pu là $T_{1/2} = 90$ năm $= 2,7 \times 10^9$ s, hằng số phân rã là

$$\lambda = \ln 2/T_{1/2} = 2,57 \times 10^{-10}\ s^{-1}.$$

Với 238 g của ^{238}Pu, năng lượng thu được mỗi giây tại thời điểm ban đầu là

$$\frac{dE}{dt} = E_d\frac{dN}{dt} = E_d\lambda N_0 = 5,6 \times 2,57 \times 10^{-10} \times 6 \times 10^{23} = 8,6 \times 10^{14}\ \text{MeV}/s\,.$$

(d) Vì tổng số hạt nhân ^{238}Pu giảm dần, năng lượng phát ra cũng phải như thế

$$W(t) = W(0)e^{-\lambda t}\,.$$

Khi $W(t_0) = W(0)/8$,

$$t_0 = \ln 8/\lambda = 3\ln 2/\lambda = 3T_{1/2} = 270\ \text{năm}.$$

Do vậy, thời gian thiết bị trong thí nghiêm có thể hoạt động bình thường là 270 năm.

6. PHẢN ỨNG HẠT NHÂN (2108-2120)

2108

Mức năng lượng kích thích hạt nhân đặc thù vào khoảng 10^{-2}, 10^1, 10^3, 10^5 MeV.

(*Columbia*)

Lời giải:

10^1 MeV.

2109

Bảng sau là khối lượng nguyên tử theo đơn vị u ($1\ u = 932$ MeV/c^2).

Electron	0,000549	$^{152}_{62}$Sm	151,919 756
Nơtron	1,008665	$^{152}_{63}$Eu	151,921 749
$^1_1$H	1,007825	$^{152}_{64}$Gd	151,919 794

(a) Giá trị Q của phản ứng ^{152}Eu(n,p) là bao nhiêu?

(b) Những loại phân rã tương tác yếu nào có thể xảy ra đối với ^{152}Eu?

(c) Tính mức năng lượng cao nhất từ các phần tử được tạo ra từ ý (b)?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Từ phương trình phản ứng $^{152}Eu + n \to {}^{152}Sm + p$, ta có trị số của Q

là

$$\begin{aligned}Q &= [m(^{152}Eu) + m(n) - m(^{152}Sm) - m(p)]c^2 \\ &= [M(^{152}Eu) + m(n) - M(^{152}Sm) - M(^1H)]c^2 \\ &= 0,002833\ u = 2,64\ \text{MeV}\,,\end{aligned}$$

với m là khối lượng hạt nhân. M là khối lượng nguyên tử. Ảnh hưởng của năng lượng liên kết của electron quỹ đạo đã được bỏ qua ở tính toán.

(b) Phân rã tương tác yếu có thể đối với ^{152}Eu là các phân rã beta và bắt giữ electron.

$$\beta^-\text{-phân rã}: {}^{152}Eu \rightarrow {}^{152}Gd + e^- + \bar{\nu}_e\,,$$

$$\beta^+\text{-phân rã}: {}^{152}Eu \rightarrow {}^{152}Sm + e^+ + \nu_e\,,$$

$$\text{Bắt electron quỹ đạo}: {}^{152}Eu + e^- \rightarrow {}^{152}Sm + \nu_e\,.$$

Xem xét tới các giá trị Q tương ứng:

$$\beta^-\text{-phân rã}:\ E_d(\beta^-) = [M(^{152}Eu) - M(^{152}Gd)]c^2 = 1,822\ \text{MeV} > 0\,,$$

phân rã này có thể xảy ra

$$\begin{aligned}\beta^+\text{- phân rã}:\ E_d(\beta^+) &= [M(^{152}Eu) - M(^{152}Sm) - 2m(e)]c^2 \\ &= 0,831\ \text{MeV} > 0\,,\end{aligned}$$

phân rã này có thể xảy ra

Bắt giữ electron quỹ đạo:

$$E_d(EC) = [M(^{152}Eu) - M(^{152}Sm)]c^2 - W_j = 1,858\ \text{MeV} - W_j\,,$$

trong đó W_j là năng lượng liên kết electron trong quỹ đạo nguyên tử, chỉ số j biểu thị lớp vỏ electron như K, L, M... Nói chung $W_j \ll 1$ MeV và bắt giữ electron quỹ đạo cũng là quá trình có thể xét về mặt năng lượng đối với ^{152}Eu.

(c) Do khối lượng của electron nhỏ hơn nhiều so với khối lượng của hạt nhân con, sự giật lùi của nó có thể bỏ qua. Khi đó các năng lượng phát xạ từ các quá trình ở (b) chỉ là các năng lượng phân rã. Vì vậy,

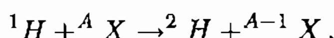
với phân rã β^-, năng lượng cực đại của electron là 1,822 MeV,

với phân rã β^+, năng lượng cực đại của hạt positron là 0,831 MeV.

Đối với quá trình bắt giữ electron quỹ đạo, các hạt nơtrino là các hạt đơn năng lượng, năng lượng của chúng phụ thuộc vào năng lượng liên kết của các vỏ electron mà từ đó chúng bị bắt giữ. Ví dụ, đối với việc bắt giữ lớp K, $W_k \approx 50$ keV, $E_\nu \approx 1,8$ MeV.

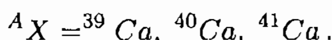
2110

(a) Xem xét phản ứng hạt nhân



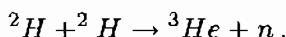
$$^1H +^A X \to^2 H +^{A-1} X\,.$$

Với hạt nhân nào trong số các hạt nhân ^AX sau đây bạn cho rằng phản ứng là mạnh nhất, tại sao?



$$^AX =^{39} Ca,\ ^{40}Ca,\ ^{41}Ca\,.$$

(b) Sử dụng tất cả các thông tin mà bạn biết về hạt nhân, hãy ước lượng nhiệt độ cần thiết trong lò phản ứng tổng hợp nhiệt hạch để đảm bảo cho phản ứng sau diễn ra



$$^2H +^2 H \to {}^3He + n\,.$$

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Phản ứng hạt nhân mạnh nhất với bia ^{41}Ca. Trong phản ứng, hạt proton kết hợp với một hạt nơtron trong ^{41}Ca tạo ra một hạt đơteri. Đồng vị phóng xạ ^{41}Ca có một hạt nơtron dư bên ngoài, một vỏ đôi được lấp đầy, điều đó có nghĩa là năng lượng liên kết của hạt nơtron cuối cùng thấp hơn so với ^{40}Ca, ^{39}Ca, do đó nó sẽ dễ dàng kết hợp hơn.

(b) Để tạo điều kiện xảy ra phản ứng $^2H +^2 H \to^3 H + n$, hai hạt đơteron phải có khả năng vượt qua rào thế Coulomb $V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$,với r là khoảng cách giữa hai hạt đơteron. Lấy bán kính của đơteron là 2 fm. Như vậy, ta có $r_{\min} = 4 \times 10^{-15}\ m$, và $V_{\max} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_{\min}}$. Nhiệt độ cần cho phản ứng là

$$T \gtrsim \frac{V_{\max}}{k} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_{\min}}\frac{1}{k} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{\hbar c}\right)\left(\frac{\hbar c}{r_{\min}}\right)\frac{1}{k}$$

$$= \frac{1}{137} \times \left(\frac{197 \times 10^{-15}}{4 \times 10^{-15}}\right)\frac{1}{8,6 \times 10^{-11}} = 4 \times 10^9\ K\,.$$

Với k là hằng số Boltzmann. Như vậy, nhiệt độ phải lớn hơn 4×10^9 K để phản ứng nhiệt hạch $^2H +^2 H \rightarrow {}^3He + n$ diễn ra.

2111

(a) Mô tả một thí nghiệm có thể để xác định các vị trí (năng lượng kính thích) của các trạng thái (mức năng lượng) của hạt nhân như ^{13}C. Hãy chỉ ra bia, quá trình phản ứng và đầu dò được sử dụng.

(b) Trong thí nghiệm được đề xuất, loại quan sát nào liên quan tới momen động lượng của trạng thái kích thích?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Bắn phá hạt nhân bia ^{12}C bằng hạt đơteron và phát hiện phổ năng lượng của hạt proton phát ra từ phản ứng ^{12}C(d,p)^{13}C với đầu dò bán dẫn silic-vàng. Điều đó, kết hợp với năng lượng đã biết của đơteron tới, cho ta biết mức năng lượng của trạng thái kích thích của ^{13}C. Ta cũng có thể sử dụng đầu dò Ge để đo năng lượng của tia γ phát xạ trong quá trình khử kích thích của $^{13}C^*$ và suy ra các mức năng lượng kích thích.

(b) Từ tính chất spin - chẵn lẻ đã biết của ^{12}C và sự phân bố góc đo được của sản phẩm phản ứng p, chúng ta có thể suy ra spin - chẵn lẻ của hạt nhân ^{13}C được tạo ra.

2112

Cho biết khối lượng nguyên tử (M- A) theo đơn vị keV:

$$^1n = 8071 \text{ keV}, \ ^1H = 7289 \text{ keV}, \ ^7Li = 14907 \text{ keV}, \ ^7Be = 15769 \text{ keV},$$

và đối với một electron $m_0c^2 = 511$ keV.

(a) Theo những điều kiện nào thì phản ứng ^{7}Li(p,n)^{7}Be sẽ xảy ra?

(b) Năng lượng trong phòng thí nghiệm của các nơtron tại ngưỡng phát xạ nơtron sẽ là bao nhiêu?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Trong $^7Li + p \rightarrow^7 Be + n + Q$, năng lượng phản ứng Q được xác định

là

$$Q = \Delta M(^7Li) + \Delta M(^1H) - \Delta M(^7Be) - \Delta M(n)$$
$$= 14907 + 7289 - 15769 - 8071 = -1644 \text{ keV}.$$

Điều này có nghĩa là trong hệ khối tâm, động năng toàn phần của ^{7}Li và proton phải đạt 1644 keV để phản ứng xảy ra. Đặt E, P là năng lượng toàn phần và động lượng của hạt proton trong hệ phòng thí nghiệm, ta cần phải có

$$(E + m_{Li}c^2)^2 - P^2c^2 = (|Q| + m_{Li}c^2 + m_pc^2)^2 .$$

Do $E^2 = m_p^2c^4 + P^2c^2$, $E \approx T + m_pc^2$, $|Q| \ll m_{Li}$, m_p, ta có $2(E - m_pc^2)m_{Li}c^2 \approx 2|Q|(m_{Li} + m_p)c^2$, hay

$$T = \frac{m_p + m_{Li}}{m_{Li}} \times |Q| \approx \frac{1+7}{7} \times 1644 = 1879 \text{ keV}.$$

Do đó, động năng T của các proton tới phải lớn hơn 1879 keV.

(b) Vận tốc của khối tâm trong phòng thí nghiệm là

$$V_c = \frac{m_p}{m_p + m_{Li}} V_p .$$

Do tại ngưỡng nơtron được sinh ra ở trạng thái nghỉ tại hệ khối tâm, vận tốc của nó trong phòng thí nghiệm là V_c. Vì thế động năng phòng thí nghiệm của nó là

$$\frac{1}{2}m_nV_c^2 = \frac{1}{2}\frac{m_nm_p^2}{(m_p + m_{Li})^2} \cdot \frac{2T}{m_p} = \frac{m_nm_pT}{(m_p + m_{Li})^2} \approx \frac{T}{64} = 29,4 \text{ keV}.$$

2113

Hạt nhân của ^{8}Be không bền đối với phân rã thành 2 hạt α, nhưng thí nghiệm trên các phản ứng hạt nhân chỉ ra 2 mức không bền thấp nhất đó là

$J = 0$, số chẵn, ~95 keV trên mức phân ly,

$J = 2$, số chẵn, ~3 MeV trên mức phân ly.

Cho biết sự tồn tại của các mức này ảnh hưởng thế nào đến việc tán xạ của hạt α từ khí He. Cụ thể là:

(a) Viết hàm sóng của sự tán xạ đàn hồi trong khai triển sóng riêng phần khi $r \to \infty$.

(b) Hãy mô tả định tính độ lệch pha thay đổi ra sao như hàm của năng lượng ở lân cận với mỗi mức.

(c) Hãy mô tả sự biến thiên tác động đến phân bố góc của hạt α như thế nào?

(*Chicago*)

Lời giải:

(a) Hàm sóng cho tán xạ đàn hồi của hạt α (He^{++}) bởi một hạt nhân heli liên quan đến hai lệch pha bổ sung xuất phát từ tương tác Coulomb (δ_l) và lực hạt nhân (η_l). Tính đến sự đồng nhất của 2 hạt (không có spin), hàm sóng không gian phải đối xứng với một giá trị chẵn của l. Sóng từ khoảng $r \to \infty$ là

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^l}{2}(2l+1)i^l e^{i(\delta_l+\eta_l)}\frac{1}{kr}$$

$$\times \sin\left[kr - \frac{l\pi}{2} - \gamma\ln(2kr) + \delta_l + \eta_l\right] P_l(\cos\theta)\,,$$

trong đó k là số sóng ở hệ khối tâm và $\gamma = (2e)^2/\hbar v$, v là vận tốc tương đối của hạt α.

(b) Lực hút hạt nhân làm cho mỗi η_l tăng từ mức 0 khi năng lượng khối tâm tăng đến một mức tương đối cao. Cụ thể là mỗi η_l tăng tương đối nhanh, đến gần π radian khi cộng hưởng, do năng lượng tiếp cận và vượt quá bất kì mức không ổn định nào của hạt nhân hợp thành, ví dụ, gần 95 keV với $l = 0$ và gần 3 MeV với $l = 2$ trong trường hợp của ^{8}Be.

Tuy vậy, hiệu ứng của lực hạt nhân còn lại nói chung không đáng kể tại năng lượng thấp hơn hàng rào Coulomb, hoặc trong trường hợp sự tổng hợp của lực đẩy Coulomb và lực ly tâm làm giảm biên độ sóng riêng phần tại giá trị r trong phạm vi của lực hạt nhân. Vì thế η_l duy trì ở ~ 0 (hoặc $\sim n\pi$) ngoại trừ khi gần một cộng hưởng, khi đó η_l tăng lên một giá trị π. Lấy $R \sim 1,5$ fm như là bán kính của mỗi hạt nhân He^{++} đỉnh của hàng rào Coulomb khi mà 2 hạt nhân như thế chạm lẫn nhau là $B \sim (2e)^2/2R \sim 2$ MeV. Do đó, độ rộng của cộng hưởng $l = 0$, tại 95 keV, phần lớn bị triệt tiêu bởi vật hàng rào Coulomb, trong khi cộng hưởng $l = 2$ được mở rộng.

(c) Để chỉ ra ảnh hưởng của lực hạt nhân tới sự phân bố góc ta viết lại hàm

sóng hạt như sau

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^l}{2}(2l+1)i^l e^{i\delta_l}\frac{1}{kr}\left\{\sin\left(kr-\frac{l\pi}{2}-\gamma\ln(2kr)+\delta_l\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{e^{2i\eta_l}-1}{2i}\right)\exp\left[i\left(kr-\frac{l\pi}{2}-\gamma\ln(2kr)+\delta_l\right]\right\}P_l(\cos\theta)\,.$$

Ở đây, số hạng đầu tiên trong dấu ngoặc biểu thị hàm sóng tán xạ Coulomb không bị ảnh hưởng của lực hạt nhân. Sự đóng góp của số hạng này có thể tính tổng thông qua l cho

$$\exp i\{kr\cos\theta-\gamma\ln[kr(1-\cos\theta)]+\delta_0\}-\gamma(kr)^{-1}\exp i\{kr\cos\theta$$
$$-\gamma\ln(kr)+\delta_0\}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{e^{-i\gamma\ln(1-\cos\theta)}}{1-\cos\theta}+\frac{e^{-i\gamma\ln(1+\cos\theta)}}{1+\cos\theta}\right]\,.$$

Số hạng thứ 2 biểu thị sóng tán xạ do lực hạt nhân, sóng này giao thoa với sóng tán xạ Coulomb ở mỗi hướng. Mặc dù rất nhỏ để η_l gần bằng $n\pi$, vì thế năng lượng thấp dưới hàng rào Coulomb. Vì vậy, sự phát hiện giao thoa này có thể làm dấu hiệu của một cộng hưởng ở mức năng lượng thấp hơn.

Một thí nghiệm năm 1956 chỉ ra rằng không một sự giao thoa đáng kể nào từ tán xạ hạt nhân dưới mức năng lượng khối tâm 300 keV, tại năng lượng đó $\eta_0 = (178 \pm 1)$ độ là giá trị thu được.

2114

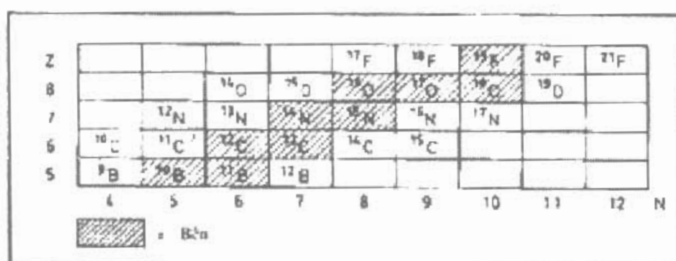
Một máy gia tốc Van de Graaff 3MV được trang bị để tăng tốc cho hạt proton, đơteron, các hạt ^{3}He bị ion hóa 2 lần và hạt anpha.

(a) Năng lượng cực đại của các hạt thu được từ thiết bị này là bao nhiêu?

(b) Viết các phản ứng, nhờ nó đồng vị ^{15}O có thể được tạo ra từ thiết bị này.

(c) Liệt kê ít nhất sáu phản ứng, trong đó ^{15}N là hạt nhân hợp phần.

(d) Mô tả hai thí nghiệm phản ứng hạt nhân có thể thực hiện được với máy gia tốc này để xác định các mức năng lượng của ^{15}N. Dẫn ra bất kì phương trình nào cần thiết. (Giả sử, tất cả khối lượng đã biết. Hình 2.38 chỉ ra các đồng vị của các hạt nhân nhẹ).



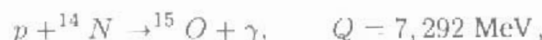
Hình 2.38

(*Columbia*)

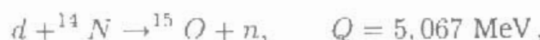
Lời giải:

(a) Giá trị năng lượng cực đại có thể đạt được với các loại hạt khác nhau là: 3 MeV với p, 3 MeV với đơteron, 6 MeV đối với hạt ^{3}He, 6 MeV bị ion hóa 2 lần đối với hạt α.

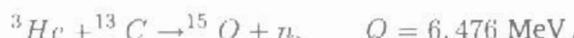
(b) Dựa vào mức năng lượng, các phản ứng tạo thành ^{15}O là



$$p + ^{14}N \to ^{15}O + \gamma, \qquad Q = 7,292 \text{ MeV},$$



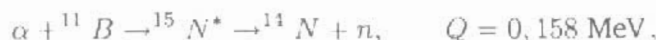
$$d + ^{14}N \to ^{15}O + n, \qquad Q = 5,067 \text{ MeV},$$



$$^3He + ^{13}C \to ^{15}O + n, \qquad Q = 6,476 \text{ MeV}.$$

^{15}O không thể tạo ra được từ các hạt α vì năng lượng liên kết của chúng cao và khối lượng nhỏ, dẫn đến kết quả là $Q = -8,35$ MeV.

(c) Các phản ứng, trong đó ^{15}N là những hạt nhân hợp phần như sau



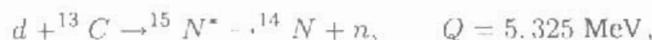
$$\alpha + ^{11}B \to ^{15}N^* \to ^{14}N + n, \qquad Q = 0,158 \text{ MeV},$$



$$\to ^{15}N^* \to ^{14}C + p, \qquad Q = 0,874 \text{ MeV},$$



$$\to ^{15}N^* \to ^{15}N + \gamma, \qquad Q = 10,991 \text{ MeV},$$



$$d + ^{13}C \to ^{15}N^* \to ^{14}N + n, \qquad Q = 5.325 \text{ MeV},$$



$$\to ^{15}N^* \to ^{11}B + \alpha, \qquad Q = 5,168 \text{ MeV},$$



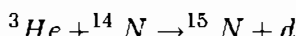
$$\to ^{15}N^* \to ^{14}C + p, \qquad Q = 5,952 \text{ MeV}.$$

(d) (1) Với phản ứng $\alpha + ^{11}B \to ^{15}N^* \to ^{15}N + \gamma$, xác định đường cong hiệu suất của tia γ như một hàm của năng lượng E_α của các hạt α tới. Một

đỉnh cộng hưởng tương ứng với một mức năng lượng của hạt nhân hợp phần $^{15}N^*$, có thể xác định

$$E^* = \frac{11}{15}E_\alpha + m(^4He)c^2 + m(^{11}B)c^2 - m(^{15}N)c^2 .$$

(2) Với những hạt tới đã biết rõ năng lượng, việc xác định phổ năng lượng của các hạt tạo ra cho phép ta xác định mức năng lượng của $^{15}N^*$. Chẳng hạn, phản ứng



$$^3He +^{14} N \rightarrow^{15} N + d$$

có $Q = 4,558$ MeV đối với trạng thái cơ bản ^{15}N. Nếu ^{3}He đi đến có năng lượng là E_0, đơteron đi ra có năng lượngE' và góc phát xạ là θ, thì năng lượng kích thích E^* được tính

$$E^* = Q - Q' ,$$

trong đó

$$Q' = \left[1 + \frac{m(d)}{m(^{15}N)}\right] E' - \left[1 - \frac{m(^3He)}{m(^{15}N)}\right] E_0 - \frac{2\sqrt{m(^3He)m(d)E_0E'}}{m(^{15}N)} \cos\theta$$

$$= \left(1 + \frac{2}{15}\right) E' - \left(1 - \frac{3}{15}\right) E_0 - 2\frac{\sqrt{3 \times 2E_0E'}}{15} \cos\theta$$

$$= \frac{1}{15}(17E' - 12E_0 - 2\sqrt{6E_0E'} \cos\theta) .$$

2115

Khi nguyên tố Li^6 (ở trạng thái cơ bản có $J = 1$, tính chẵn) bị bắn phá bởi các đơteron, tốc độ phản ứng ở phản ứng $Li^6 + d \rightarrow \alpha + \alpha$ thể hiện một đỉnh cộng hưởng tại E (đơteron)$= 0,6$ MeV. Sự phân bố góc của các hạt α được tạo ra biểu thị sự phụ thuộc vào $(1 + A\cos^2\theta)$, trong đó θ là góc phát xạ đối với hướng tới của đơteron. Trạng thái cơ bản của hạt đơteron gồm một proton và một nơtron ở cấu hình của $^3S_1$. Khối lượng của các hạt nhân liên quan là

$$m_d = 2,0147 \text{ dvklnt} , \; m_\alpha = 4,003 \text{ dvklnt} ,$$

$$m_{Li} = 6,0170 \text{ dvklnt} , \; m_{Be} = 8,0079 \text{ dvklnt} ,$$

trong đó 1 dvklnt $= 938,2$ MeV.

Từ các dữ kiện trên, hãy xác định năng lượng, momen động lượng và tính chẵn lẻ của mức kích thích trong hạt nhân hợp phần. Các đơteron sóng riêng phần ($s, p, d, \ldots$) nào có hiệu quả để tạo thành mức kích thích ấy (hãy giải thích).

(*Columbia*)

Lời giải:

Năng lượng kích thích của hạt nhân hợp phần ^{8}Be* ở phản ứng $d + ^6Li \to ^8Be^*$ là

$$E(^8Be^*) = [m(^2H) + m(^6Li) - m(^8Be)] + E_d \frac{m(^6Li)}{m(^6Li) + m(^2H)}$$

$$= (2,0147 + 6,0170 - 8,0079) \times 938,2 + 0,6 \times \frac{6}{8} = 22,779 \text{ MeV}.$$

Trong phân rã $^8Be^* \to \alpha + \alpha$, do J^π của hạt α là 0^+, sự đối xứng của hàm sóng toàn phần của trạng thái cuối cùng đòi hỏi là l_f, momen động lượng tương đối của 2 hạt α phải chẵn và sự phân rã là một tương tác mạnh, bảo toàn tính chẵn lẻ, tính chẵn lẻ của $^8Be^*$ là $\pi(^8Be^*) = (-1)^{l_f}(+1)^2 = +1$.

Do phân bố góc của các hạt α ở trạng thái cuối cùng không phải là đối xứng cầu, nhưng tương ứng với $l_f = 2$, ta có

$$J^\pi(^8Be^*) = 2^+ .$$

Vì vậy, momen động lượng toàn phần của $d + ^6Li$ ở thời điểm khởi đầu cũng là $J_i = 2$. Do $\mathbf{J}_i = \mathbf{J}_d + \mathbf{J}_{Li} + \mathbf{l}_i = \mathbf{1} + \mathbf{1} + \mathbf{l}$, và vì

$$\mathbf{1} + \mathbf{1} = \begin{cases} 0 \\ 1, \\ 2 \end{cases} \quad \text{các giá trị có thể của } l_i \text{ là } 0,1,2,3,4.$$

Tuy nhiên, tính chẵn lẻ ở trạng thái cơ bản của ^{6}Li và d đều dương, do đó l_i phải là số chẵn. Do phân bố góc của trạng thái cuối cùng không đẳng hướng, $l_i \neq 0$ và các giá trị có thể của l_i là 2,4. Vì thế sóng d có ảnh hưởng lớn đến hiệu ứng chính.

2116

Các nơtron nhanh va chạm lên vật mẫu dày 10 cm có chứa 10^{21} nguyên tử ^{53}Cr /cm^3. 1/10 của 1% số nơtron bị bắt giữ vào trạng thái kích thích có spin

- chẵn lẻ $J^\pi = 0$ ở ^{54}Cr. Tiết diện bắt giữ nơtron ở trạng thái này là bao nhiêu? ^{54}Cr bị kích thích thỉnh thoảng phân rã γ như được chỉ ra ở hình 2.39. Giá trị J^π đúng nhất đối với trạng thái kích thích ở 9,2 MeV là bao nhiêu? Tính đa phân cực của các tia γ như thế nào?

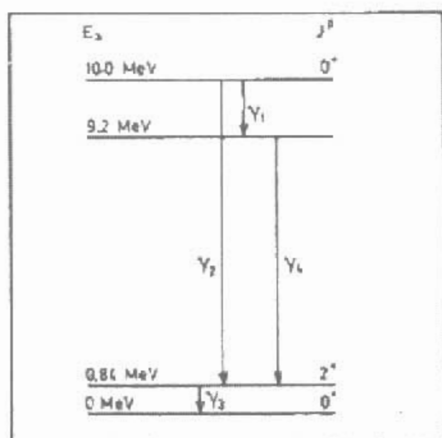
(*Wisconsin*)

Lời giải:

Gọi số nơtron đập lên trên vật mẫu là n và tiết diện bắt giữ nơtron để tạo thành trạng thái 0^+ là σ. Khi đó $10 \times 10^{21} n\sigma = 10^{-3}\ n$, hay

$$\sigma = 10^{-25}\ \text{cm}^2 = 0,1\ b\,.$$

Giả thiết spin - chẵn lẻ của mức 9,2 MeV là J^p. Do ^{54}Cr chỉ thỉnh thoảng phân rã γ, chuyển dời hầu như không ở mức $E1$ nhưng tương ứng với bậc nhỏ nhất tiếp theo. Xem rằng $0^+ \to J^p$. Nếu $\Delta J = 2$, trường đa cực điện có tính chẵn lẻ $(-1)^{\Delta J} = +$, tức là $J^p = 2^+$, và chuyển dời là loại $E2$. Các chuyển dời γ_2, γ_3 thường giữa trạng thái 0^+ và 2^+, vì vậy chúng cũng có thể là loại $E2$. Với $\gamma_4 : 2^+ \to 2^+$, ta có $\Delta L = 1, 2, 3$ hay 4. Với trường hợp tính chẵn lẻ không đổi giữa trạng thái đầu và cuối, γ_4 phải là $E2$, $E4$ hoặc $M1$, $M3$. Vì vậy, quá trình duy nhất có thể xảy ra là $\gamma_4 = E2$, hoặc $M1$, hoặc cả hai.



Hình 2.39

2117

Bề mặt của một đầu dò được phủ một lớp mỏng hạt nhân nặng phân hạch tự nhiên. Diện tích đầu dò là 2 cm^2 và thời gian sống trung bình của chất đồng

vị phân hạch là $\frac{1}{3} \times 10^9$ năm (1 năm= 3×10^7 s.). Có 20 phân hạch được phát hiện mỗi giây. Sau đó đầu dò được đặt trong thông lượng nơtron đều 10^{11} nơtron/cm^2/s. Số lượng phân hạch phát hiện mỗi giây là 120/s. Tiết diện hiệu dụng cho sự phân hạch do nơtron gây ra là bao nhiêu?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Gọi số hạt nhân nặng là N. Thì lượng phân hạch tự nhiên trong mỗi s là

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \approx -\lambda N_0 ,$$

trong đó $N_0 = N|_{t=0}$, do $\lambda = \frac{1}{\frac{1}{3}\times 10^9 \times 3 \times 10^7} = 10^{-16} \ll 1$.

Lượng phân hạch cảm ứng mỗi giây là $\sigma N\phi \approx \sigma N_0\phi$, trong đó ϕ là thông lượng nơtron, σ là tiết diện của phản ứng phân hạch do nơtron gây ra. Do

$$\frac{\sigma N_0 \phi + \lambda N_0}{\lambda N_0} = \frac{120}{20} ,$$

hay

$$\frac{\sigma\phi}{\lambda} = \frac{100}{20} = 5 ,$$

ta có

$$\sigma = \frac{5\lambda}{\phi} = \frac{5 \times 10^{-16}}{10^{11}} = 5 \times 10^{-27} \text{ cm}^2 = 5 \text{ mb} .$$

2118

(a) Bạn chờ đón tiết diện tán xạ đàn hồi nơtron phụ thuộc như thế nào vào năng lượng đối với các nơtron có năng lượng rất thấp.

(b) Xét sự tán xạ không cộng hưởng, hãy ước lượng tiết diện tán xạ đàn hồi nơtron nhiệt đối với ^{3}He.

(c) Sử dụng thông tin trong sơ đồ mức riêng đối với $A = 4$ được chỉ ra ở hình 2.40 để ước lượng tiết diện hấp thụ nơtron nhiệt đối với ^{3}He.

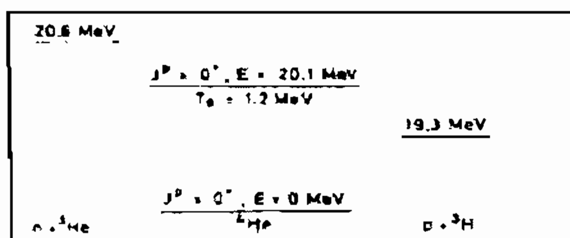
Tán xạ cộng hưởng có thể quan trọng ở đây.

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Với các nơtron nhiệt năng lượng thấp, tiết diện hiệu dụng tán xạ đàn hồi của các hạt nhân nhẹ không phụ thuộc vào năng lượng của nơtron và

không đổi với biên độ năng lượng lớn. Nhưng với hạt nhân nặng hơn, sự tán xạ cộng hưởng có thể xảy ra ở vài trường hợp với nơtron có năng lượng rất thấp. Ví dụ tán xạ cộng hưởng xảy ra với ^{157}Gd tại $E_n = 0,044$ eV.



Hình 2.40

(b) Tiết diện tán xạ đàn hồi không cộng hưởng của nơtron nhiệt với các hạt nhân vào khoảng $4\pi R_0^2$, trong đó R_0 là bán kính kênh, bằng tổng của bán kính các hạt tới và hạt nhân bia. Lấy bán kính hạt nhân như sau

$$R \approx 1,5 \times 10^{-13}\ A^{1/3},$$

tiết diện hiệu dụng của tán xạ đàn hồi hạt nhân ^{3}He đối với nơtron nhiệt là

$$\sigma = 4\pi R_0^2 \approx 4\pi[1,5 \times 10^{-13}(3^{1/3} + 1)]^2 = 1,7 \times 10^{-24}\ \text{cm}^2 = 1,7\ b\,.$$

(c) Công thức Breit-Wigner

$$\sigma_{nb} = \pi\bar{\lambda}^2 \frac{\Gamma_n \Gamma_b}{(E' - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$

có thể được dùng để tính tiết diện hiệu dụng bắt giữ hạt nơtron đối với ^{3}He ở lân cận của một cộng hưởng đơn. Ở đây $\bar{\lambda}$ là bước sóng rút gọn của hạt tới, E' là năng lượng và E_0 là năng lượng tại đỉnh cộng hưởng của hạt nhân hợp phần $A = 4$, Γ_n và Γ_b tương ứng là độ rộng riêng của trạng thái cộng hưởng để hấp thụ nơtron và sự bức xạ của b, và Γ là độ rộng mức toàn phần.

Đối với các nơtron nhiệt phòng thí nghiệm, $E_n \approx 0,025\ eV$,

$$\bar{\lambda} = \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu E_n}} = \frac{\hbar}{\sqrt{\frac{2m_n m_{He}}{m_n + m_{He}} E_n}} = \frac{\hbar c}{\sqrt{\frac{3}{2} E_n m_n c^2}}$$
$$= \frac{197 \times 10^{-13}}{\sqrt{\frac{3}{2} \times 2,5 \times 10^{-8} \times 940}} = 3,3 \times 10^{-9}\ \text{cm}\,.$$

Do cả hai trạng thái kích thích đầu tiên và trạng thái cơ bản của ^{4}He có 0^+, $\Gamma_\gamma = 0$, và chỉ có kênh ra cho trạng thái kích thích của ^{4}He phát xạ một proton. Độ rộng toàn phần $\Gamma = \Gamma_n + \Gamma_p$. Với $\Gamma_n \approx 150\ eV$, $\Gamma \approx \Gamma_p = 1,2$ MeV, $E' = 20,6$ MeV, $E = 20,1$ MeV, ta thu được

$$\sigma = \pi\bar{\lambda}^2 \frac{\Gamma_n \Gamma_p}{(E' - E_0)^2 + \Gamma^2/4} = 1 \times 10^{-20}\ \text{cm}^2 = 1 \times 10^4\ b\,.$$

2119

Tiết diện đặc thù đối với quá trình tán xạ hạt nhân – nơtron năng lượng thấp là 10^{-16}, 10^{-24}, 10^{-32}, 10^{-40} cm^2.

(*Columbia*)

Lời giải:

10^{-24} cm^2. Bán kính của hình cầu tác dụng của lực hạt nhân là $\sim 10^{-12}$ – 10^{-13} cm, và tiết diện đặc thù có thể xem như cùng bậc độ lớn với diện tích tiết diện thẳng của nó.

2120

Trong thí nghiệm về phản ứng ^{21}Ne(d, ^{3}He)^{20}F với đơteron có năng lượng 26 MeV, nhiều trạng thái của ^{20}F được kích thích. Sự phân bố góc là đặc trưng của cơ chế phản ứng trực tiếp và vì thế dễ dàng được phân loại thành nhóm mà theo đó momen động lượng của proton được trao đổi là $l_p = 0$ hay 1 hay 2.

Mức năng lượng thấp nhất của ^{21}Ne và trạng thái chẵn lẻ âm của ^{20}F dưới 4 MeV được chỉ ra như ở hình 2.41 (nhiều trạng thái kích thích có tính chẵn lẻ dương của ^{20}F bị loại đi).

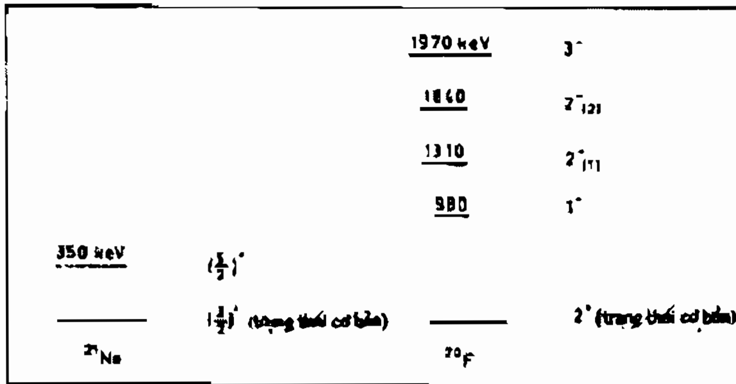
Độ lớn tương đối $l_p = 1$ $S(J^\pi)$ được quan sát ở phản ứng (d, ^{3}He) có xấp xỉ

$$S(1^-) = 0,84\,,$$

$$S(2_1^-) = 0,78\,,$$

$$S(2_2^-) = 0,79\,,$$

$$S(3^-) = 0,00\,.$$



Hình 2.41

(a) Nếu hạt nhân bia ^{21}Ne và một trạng thái khác ^{20}F cả hai đều có cấu hình là (1s-0d), thì chúng cả hai đều có tính chẵn lẻ dương và vì thế có thể chờ đón một số chuyển dời $l_p = 0$ hay $l_p = 2$. Mặt khác, trạng thái cân bằng của ^{20}F khi hướng âm được kích thích bởi $l_p = 1$. Giải thích.

(b) Để giải thích trạng thái chẵn lẻ âm được quan sát của ^{20}F, người ta có thể thử mô hình cặp đôi của một lỗ trống liên kết yếu với trạng thái của ^{21}Ne. Với mô hình này của một hạt nhân ^{21}Ne với một proton biến mất hợp lý và sơ đồ mức được cho như trên đây, hãy chỉ ra cách mà ta có thể tính được các trạng thái chẵn lẻ âm trong ^{20}F.

(c) Trong giới hạn của mô hình liên kết yếu, không có sự tương tác dư giữa lỗ trống và các hạt. Tính năng lượng tương đối trạng thái chẵn lẻ âm.

(d) Nếu như sự tương tác hạt lỗ trống yếu xảy ra thì sẽ có tác động như thế nào? Trọng tâm thích ứng của năng lượng được chỉ ra ở trạng thái 1^-, 2^-, 2^-, 3^- có tuân theo quy luật này không?

(e) Mẫu liên kết yếu và lý thuyết các phản ứng trực tiếp dẫn đến dự đoán các tiết diện tương đối cho các trạng thái cuối cùng khác. So sánh các dự đoán này với các yếu tố S cho ở trên. Hãy chỉ ra cách mà điều đó có thể sử dụng để được sự phù hợp tốt hơn với các dự đoán ở phần (d).

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Các phản ứng là tương tác mạnh, trong đó trạng thái chẵn lẻ được bảo toàn. Vì thế tính chẵn lẻ thay đổi từ trạng thái ban đầu đến trạng thái cuối

cùng phải bằng tính chẵn lẻ của hạt proton bị phát ra như phần của ^{3}He

$$P(^{21}Ne) = P(^{20}F)P(p) = P(^{20}F)(-1)^{l_p}\,.$$

Khi cả ^{20}F và ^{21}Ne đều có tính chẵn lẻ là chẵn, $(-1)^{l_p} = 1$ và vì thế $l_p = 0, 2\cdots$. Do sự bảo toàn momen động lượng toàn phần đòi hỏi l_p phải là 0, 1, 2 ta có $l_p = 0, 2$. Tương tự với trạng thái chẵn lẻ âm của ^{20}F, momen động lượng mà proton lấy đi chỉ có thể là các giá trị $1, 3\cdots$. Cụ thể ở trạng thái 1^- và 2^- của ^{20}F, $l_p = 1$.

(b) Trong mô hình liên kết yếu, ^{20}F có thể xem như bao gồm một hạt nhân ^{21}Ne và một lỗ trống proton (p^-). J^p của ^{20}F từ đó, được xác định bởi 1 nơtron ở $1d_{3/2}$, $1d_{5/2}$, hoặc $2s_{1/2}$ và một lỗ trống proton ở mức $1p_{1/2}$, $1p_{3/2}$ hoặc $2s_{1/2}$, v.v, nằm ngoài các vỏ lấp đầy (hình 2.16). Ví dụ, trạng thái 1^- của ^{20}F có thể được kí hiệu như sau

$$\begin{aligned}|1M\rangle &= |1p_{1/2}^{-1},\ 1d_{3/2};\ 1, M\rangle \\ &= \sum_{m_1,m_2}\left\langle \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, m_1, m_2 \middle| 1, M\right\rangle \psi_{1/2m}\psi_{3/2m}\,.\end{aligned}$$

trong đó $^1p_{1/2}^{-1}$ có nghĩa là một lỗ trống proton ở trạng thái $1p_{1/2}$, $1d_{3/2}$ có nghĩa là một nơtron ở trạng thái $1d_{3/2}$. Một cách tương tự, ở trạng thái 2^- được biểu diễn như sau

$$|1p_{1/2}^{-1}, 1d_{3/2}; 2, M\rangle \quad \text{và} \quad |1p_{1/2}^{-1}, 1d_{5/2}; 2, M\rangle\,,$$

Trạng thái 3^- được biểu diễn như sau

$$|1p_{1/2}^{-1}, 1d_{5/2}; 3, M\rangle\,.$$

(c) Ta có $H = H_p + H_h + V_{ph}$, trong đó H_p và H_h tương ứng là Hamintonian của tâm hạt nhân và lỗ trống, và V_{ph} là thế năng do sự tương tác giữa lỗ trống và tâm hạt nhân. Ở giới hạn của liên kết yếu ta có,

$$\begin{aligned}V_{ph} &= 0\,,\\ H_p\psi(a_1, j_1, m_1) &= E_{a_1,j_1,m_1}\psi(a_1, j_1, m_1)\,,\\ H_h\phi(a_2, j_2, m_2) &= E_{a_2,j_2,m_2}\phi(a_2, j_2, m_2)\,.\end{aligned}$$

Khi đó, đối với bốn trạng thái chẵn lẽ - âm chúng ta có

$$3^- : E_{3^-} = E_p(1d_{5/2}) + E_h(1p_{1/2}),$$

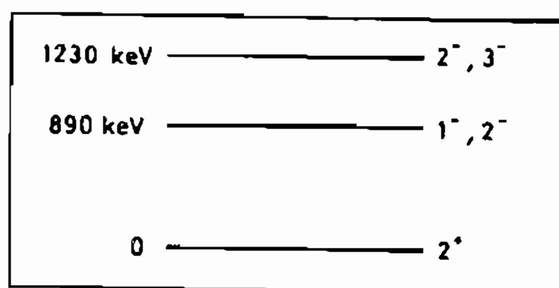
$$2_1^- : E_{2_1^-} = E_p(1d_{5/2}) + E_h(1p_{1/2}),$$

$$2_2^- : E_{2_2^-} = E_p(1d_{3/2}) + E_h(1p_{1/2}),$$

$$1^- : E_{1^-} = E_p(1d_{3/2}) + E_h(1p_{1/2}).$$

Như thế $E_{3^-} = E_{2_1^-}$, $E_{2_2^-} = E_{1^-}$, như được chỉ ra trên hình 2.42, với giá trị

$$E_{3^-} = E_{2_1^-} = 1230 \text{ keV}, \qquad E_{2_2^-} = E_{1^-} = 890 \text{ keV}.$$



Hình 2.42

(d) Nếu $V_{ph} \neq 0$, tức là liên kết có tồn tại, khi đó

$$E_{3^-} = H_p(1d_{5/2}) + H_h(1p_{1/2}) + \langle 1p_{1/2}^{-1}, 1d_{5/2}, 3|V_{ph}|1p_{1/2}^{-1}, 1d_{5/2}, 3\rangle,$$

$$E_{1^-} = H_p(1d_{3/2}) + H_h(1p_{1/2}) + \langle 1p_{1/2}^{-1}, 1d_{3/2}, 1|V_{ph}|1p_{1/2}^{-1}, 1d_{3/2}, 1\rangle.$$

Do

$$\langle 1p_{1/2}^{-1}, 1d_{5/2}, 3^-|V_{ph}|1p_{1/2}^{-1}, 1d_{5/2}, 3^-\rangle \approx 0,7 \text{ MeV},$$

$$\langle 1p_{1/2}^{-1}, 1d_{3/2}, 1^-|V_{ph}|1p_{1/2}^{-1}, 1d_{3/2}, 1^-\rangle \approx 0,1 \text{ MeV},$$

$$\langle 1p_{1/2}^{-1}, 1d_{5/2}, 2^-|V_{ph}|1p_{1/2}^{-1}, 1d_{5/2}, 2^-\rangle = 0,45 \text{ MeV},$$

$$\langle 1p_{1/2}^{-1}, 1d_{3/2}, 2^-|V_{ph}|1p_{1/2}^{-1}, 1d_{3/2}, 2^-\rangle = 0,25 \text{ MeV},$$

$$\langle 1p_{1/2}^{-1}, 1d_{5/2}, 2^- | V_{ph} | 1p_{1/2}^{-1}, 1d_{3/2}, 2^- \rangle$$

$$= \langle 1p_{1/2}^{-1}, 1d_{3/2}, 2^- | V_{ph} | 1p_{1/2}^{-1}, 1d_{5/2}, 2^- \rangle$$

$$= 0,3 \text{ MeV}.$$

biểu thức trên cho ta

$$E'_{3^-} = 0,9 + 0,35 + 0,7 = 1,95 \text{ MeV}$$

$$E'_{1^-} = 0,9 + 0,1 = 1,0 \text{ MeV}.$$

$E'_{2_1^-}$ và $E'_{2_2^-}$ là những trị riêng của ma trận

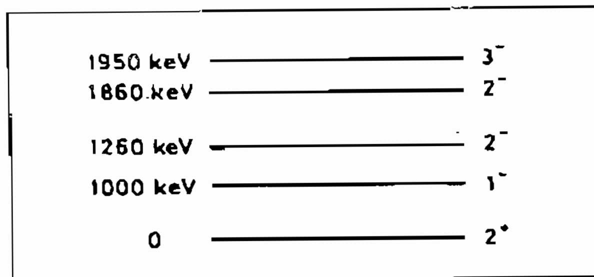
$$\begin{pmatrix} \langle 1p_{1/2}^{-1}; 1d_{5/2}, 2^- | H | 1p_{1/2}^{-1}, 1d_{5/2}, 2^- \rangle & \langle 1p_{1/2}^{-1}; 1d_{5/2}, 2^- | H | 1p_{1/2}^{-1}, 1d_{3/2}, 2^- \rangle \\ \langle 1p_{1/2}^{-1}; 1d_{3/2}, 2^- | H | 1p_{1/2}^{-1}, 1d_{5/2}, 2^- \rangle & \langle 1p_{1/2}^{-1}; 1d_{3/2}, 2^- | H | 1p_{1/2}^{-1}, 1d_{3/2}, 2^- \rangle \end{pmatrix}$$

Phương trình đặc trưng

$$\begin{pmatrix} \lambda - 1,95 & -0,3 \\ -0,3 & \lambda - 1,1 \end{pmatrix} = 0$$

cho ta $E'_{2_1^-} = \lambda_1 = 1,80$ MeV, $E'_{2_2^-} = \lambda_2 = 1,26$ MeV.

Các mức năng lượng được chỉ ra trên Hình 2.43



Hình 2.43

(e) Cường độ tương đối của các trạng thái cuối như được chỉ ra bởi các lý thuyết khác nhau được so sánh ở bảng dưới đây

	Mẫu Nilson	PHF	Mẫu vỏ	Thực nghiệm
$S(1^-)$	0,70	0,76	0,59	0,84
$S(2_1^-)$	0,93	0,20	0,72	0,78
$S(2_2^-)$	0,28	0,20	0,23	0,79
$S(3^-)$			0,002	0,00

Nói riêng, điều được lưu ý ở đây là đối với $S(2_2^-)$, các giá trị lý thuyết nhỏ hơn nhiều so với giá trị thực nghiệm.

PHẦN III

VẬT LÝ HẠT CƠ BẢN

1. CÁC LOẠI TƯƠNG TÁC VÀ CÁC DẠNG ĐỐI XỨNG (3001–3037)

3001

Tương tác giữa các hạt cơ bản được phân loại chủ yếu theo thứ tự giảm dần về cường độ như tương tác mạnh, điện từ, yếu và hấp dẫn.

(a) Giải thích một cách chính xác và định lượng nhất có thể được đối với ý nghĩa của từ "cường độ" trong phát biểu trên. So sánh cường độ tương đối của các tương tác này như thế nào.

(b) Đối với ba loại tương tác đầu tiên những định luật bảo toàn nào được nghiệm đúng? Hãy chứng minh câu trả lời bằng các bằng chứng thực nghiệm.

(*Columbia*)

Lời giải:

(a) Các tương tác này có thể được phân loại theo giá trị của một hằng số vô hướng đặc trưng liên hệ với tiết diện tương tác và thời gian tương tác thông qua một hằng số liên kết. Tương tác càng mạnh thì tiết diện tương tác càng lớn và thời gian tương tác càng nhỏ.

Tương tác mạnh: Phạm vi của tương tác cỡ $\sim 10^{-13}$ cm. Ví dụ thế năng tương tác giữa hai hạt nhân có dạng

$$V(r) = \frac{g_h}{r} \exp\left(-\frac{r}{R}\right),$$

trong đó $R \approx h/m_\pi c$ là bước sóng Compton của hạt pion. Chú ý rằng hàm e mũ chỉ khoảng tương tác ngắn. Hằng số vô hướng

$$g_h^2/hc \approx 1 \sim 10$$

cho cường độ tương tác.

Tương tác điện từ: Thế năng tương tác giữa hai hạt mang điện e ở cách nhau một khoảng r có dạng

$$V_e(r) = e^2/r\,.$$

Hằng số vô hướng đặc trưng cho cường độ tương tác là hằng số cấu trúc tinh tế

$$\alpha = e^2/hc \approx 1/137\,.$$

Tương tác yếu: Phạm vi tương tác ngắn, độ mạnh của nó được biểu diễn bằng hằng số tương tác Fermi đối với phân rã β

$$G_F = 1,4 \times 10^{-49} \text{ ec cm}^3 .$$

Thế năng của tương tác yếu có dạng

$$V_w(r) = \frac{g_w}{r} \exp\left(-\frac{r}{R_w}\right),$$

trong đó nó chấp nhận $R_w \approx 10^{-16}$ cm. Hằng số đặc trưng cho độ mạnh của tương tác là

$$g_w^2/\hbar c = G_F m_p^2 c/\hbar^3 \approx 10^{-5} .$$

Tương tác hấp dẫn: Ví dụ thế năng tương tác giữa hai hạt proton có dạng

$$Gm_p^2/r .$$

Hằng số vô hướng là

$$Gm_p^2/\hbar c \approx 6 \times 10^{-39} .$$

Do các hằng số là vô hướng thì chúng có thể được sử dụng để so sánh cường độ tương tác một cách trực tiếp. Ví dụ tỉ lệ về cường độ của tương tác hấp dẫn và tương tác điện từ giữa hai hạt proton là

$$Gm_p^2/e^2 \approx 10^{-36} .$$

Bởi vì cường độ của tương tác hấp dẫn rất nhỏ so với tương tác điện từ nên có thể bỏ qua lực hấp dẫn trong vật lý hạt. Các đặc trưng của bốn loại tương tác được liệt kê trong bảng 3.1.

Tương tác	Hằng số đặc trưng	Cường độ	Phạm vi tương tác	Tiết diện đặc trưng	T. gian sống đặc trưng
Mạnh	$\frac{g_h^2}{\hbar c}$	$1 \sim 10$	10^{-13} cm	10^{-26} cm^2	10^{-23} s
Điện từ	$\frac{e^2}{\hbar c}$	$\frac{1}{137}$	∞	10^{-29} cm^2	10^{-16} s
Yếu	$\frac{g_w^2}{\hbar c} = \frac{G_F m_p^2 c}{\hbar^3}$	10^{-5}	10^{-16} cm	10^{-38} cm^2	10^{-10} s
Hấp dẫn	$\frac{Gm_p^2}{\hbar c}$	10^{-39}	∞		

Bảng 3.3

Đại lượng	E	J	P	Q	B	$L_e(L_\mu)$	I
	I_3	S	P	C	T	CP	G
Mạnh	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y
	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y
Điện từ	Y	Y	Y	Y	Y	Y	N
	Y	Y	Y	Y	Y	Y	N
Yếu	Y	Y	Y	Y	Y	Y	N
	N	N	N	N	N	N	N

Bảng 3.4

(b) Các định luật bảo toàn nghiệm đúng đối với các tương tác mạnh, điện từ, yếu được liệt kê trong bảng 3.2, trong đó y = bảo toàn, N = không bảo toàn.

Các đại lượng liệt kê ở trên đều được bảo toàn trong tương tác mạnh. Điều này phù hợp với thực nghiệm. Ví dụ tiết diện tán xạ của nucleon-hạt nhân và pion-hạt nhân được tính toán bằng cách sử dụng phương pháp liên kết spin đồng vị phù hợp rất tốt với các quan sát thực nghiệm.

Trong tương tác điện từ, I không bảo toàn, ví dụ $\Delta I = 1$ trong phân rã điện từ Σ^0 ($\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$).

Trong tương tác yếu I, I_3, S, P, C, T, PC không bảo toàn, ví dụ phân rã 2π của K_L^0. Quá trình $K_L^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$ vi phạm bảo toàn PC. Do PCT được bảo toàn, bất biến thời gian đảo cũng bị vi phạm. Tất cả những điều này phù hợp với thực nghiệm.

3002

Lực tĩnh điện giữa trái đất và mặt trăng có thể được bỏ qua

(a) vì nó nhỏ hơn rất nhiều so với lực hấp dẫn.

(b) vì các vật thể đó đều trung hòa về điện.

(c) vì hiệu ứng thủy triều.

(*CCT*)

Lời giải:

Đối với các tương tác tĩnh điện các vật buộc phải mang điện. Vì trái đất và

mặt trăng đều trung hòa về điện nên chúng không thể có tương tác tĩnh điện. Do đó câu trả lời là (b).

3003

(a) Giải thích ý nghĩa của các thuật ngữ: boson, fecmion, hadron, lepton, baryon,

(b) Đối với mỗi trường hợp nêu trên hãy lấy một hạt làm ví dụ.

(c) Có thể xếp photon thuộc nhóm hạt nào và không thuộc nhóm hạt nào nói trên?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Fecmion: Gồm tất cả các hạt có spin bán nguyên.

Boson: Gồm tất cả các hạt có spin nguyên.

Hadron: Những hạt tham gia tương tác mạnh gọi là các hạt hadron.

Lepton: Những hạt không tham gia tương tác mạnh nhưng tham gia tương tác yếu gọi là các hạt lepton.

Baryon: Các hạt hardron có spin bán nguyên gọi là các hạt baryon.

(b) Boson: meson π;

Fecmion: proton;

Hadron: proton;

Lepton: nơtrino;

Baryon: proton;

(c) Photon thuộc nhóm hạt boson và không thuộc các nhóm hạt còn lại.

3004

Tại sao các hạt proton có tính chẵn lẻ còn các hạt muyon thì không? Bởi vì:

(a) Tính chẵn lẻ không được bảo toàn trong điện từ trường.

(b) Proton được nghiên cứu kĩ hơn.

(c) Tính chẵn lẻ được xác định từ các phản ứng tương quan với nhau. Do đó nó có nghĩa đối với các hạt proton nhưng không có nghĩa đối với các hạt

muyon.

(*CCT*)

Lời giải:

Đáp án là (c).

3005

Toán tử chẵn lẻ G như thế nào và tại sao lại được đưa vào trong vật lý hạt? Xác định trị riêng của toán tử G đối với các hạt pion mang điện tích khác nhau và đối với trạng thái n hạt pion?

Tính các giá trị G đối với các hạt meson ρ, ω, ϕ, và η?

(*Buffalo*)

Lời giải:

Toán tử G được định nghĩa là $G = Ce^{i\pi I_2}$ trong đó I_2 là thành phần thứ hai của spin đồng vị I, và C là toán tử liên hợp điện tích.

Vì toán tử C chỉ có trị riêng đối với các hạt photon, các hạt meson trung hòa và các hệ thống của chúng nên rất hữu ích khi có thể mở rộng toán tử cho trường hợp các hạt mang điện. Toán tử chẵn lẻ G được định nghĩa như trên thì các hạt mang điện cũng có thể trở thành các trạng thái riêng của nó. Vì tương tác mạnh bất biến đối với sự quay spin đồng vị và sự liên hợp điện tích nên tính chẵn lẻ G được bảo toàn trong tương tác mạnh, điều này chỉ ra rằng tồn tại một đối xứng nào đó trong tương tác mạnh. Điều này có thể được sử dụng như là một quy tắc lựa chọn cho các hệ hạt tích điện.

Đối với một đa bội spin đồng vị chứa một hạt trung hòa thì trị riêng của toán tử G là

$$G = C(-1)^I ,$$

trong đó C là trị riêng của toán tử C của hạt trung hòa, I là spin đồng vị. Đối với hạt meson π, $C(\pi^0) = +1$, $I = 1$, do đó $G = -1$; đối với một hệ n hạt meson π, $G(n\pi) = (-1)^n$. Một cách tương tự đối với các hạt

$$\rho: \; C(\rho^0) = -1, \quad I(\rho) = 1, \quad G(\rho) = +1 ;$$

$$\omega: \; C(\omega^0) = -1, \quad I(\omega^0) = 0, \quad G(\omega) = -1 ;$$

$$\phi: \; C(\phi) = -1, \quad I(\phi) = 0, \quad G(\phi) = -1 ;$$

$$\eta^0: \; C(\eta^0) = +1, \quad I(\eta^0) = 0, \quad C(\eta^0) = +1 .$$

ρ, ω, ϕ phân rã bởi tương tác mạnh. Vì chẵn lẻ G được bảo toàn trong tương tác mạnh, chẵn lẻ G của những hạt này có thể rút ra được từ các phản ứng phân rã. Do đó ta có

$$\rho^0 \to \pi^+\pi^- , \qquad G(\rho) = (-1)^2 = 1 ;$$
$$\omega \to 3\pi , \qquad G(\omega) = (-1)^3 = -1 ;$$
$$\phi \to 3\pi , \qquad G(\phi) = (-1)^3 = -1 .$$

Chú ý rằng η^0 bị phân rã bởi tương tác điện từ trong đó chẵn lẻ G không được bảo toàn nên chẵn lẻ G của nó không thể suy ra từ phản ứng phân rã được.

3006

Dưới đây là một danh sách các định luật bảo toàn (hoặc tính đối xứng) cho tương tác giữa các hạt. Mỗi loại tương tác được kí hiệu bởi S, E, W tương ứng thuộc lớp các tương tác — mạnh, điện từ, yếu — đối với tương tác nào thì chưa thấy có sự vi phạm về tính đối xứng hay các định luật bảo toàn? Hãy chỉ ra một thí nghiệm cho thấy sự vi phạm một định luật bảo toàn bất kì nào dưới đây.

(a) Bảo toàn spin I

(b) Bảo toàn I_3

(c) Bảo toàn số lạ

(d) Bất biến CP

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Bảo toàn spin I — S.

(b) Bảo toàn I_3 — S, E.

(c) Bảo toàn số lạ — S, E.

(d) Bất biến CP — S, E, và W nói chung. Vi phạm CP trong tương tác yếu chỉ được tìm thấy trong phân rã K_L. Sự không bảo toàn spin đồng vị có thể quan sát được trong phân rã điện từ $\Sigma^0 \to \Lambda^0 + \gamma$. Sự không bảo toàn I_3 quan sát được trong phân rã yếu $\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$.

Sự không bảo toàn số lạ được tìm thấy trong phân rã yếu của các hạt lạ. Ví dụ, trong $\Lambda^0 \to \pi^- + p$, $S = -1$ đối với trạng thái đầu, $S = 0$ đối với trạng thái cuối, và do đó $\Delta S = -1$.

Trường hợp quan sát được duy nhất cho sự vi phạm CP là phân rã K_L^0,

trong đó các kiểu phân rã 3π và 2π có tỉ lệ

$$\eta = \frac{B(K_L^0 \to \pi^+\pi^-)}{B(K_L^0 \to \text{tất cả các hạt tích điện})} \approx 2 \times 10^{-3}$$

Nó chỉ ra rằng bảo toàn CP bị vi phạm trong phân rã K_L^0, nhưng chỉ với một phạm vi rất hẹp.

3007

Một trạng thái chỉ chứa một hạt lạ

(a) có thể phân hủy thành một trạng thái có số lạ bằng 0.

(b) có thể được tạo thành một cách chắc chắn từ một trạng thái có số lạ bằng 0.

(c) không thể tồn tại.

(CCT)

Lời giải:

Các hạt lạ được sinh ra trong tương tác mạnh nhưng bị phân hủy trong tương tác yếu, và số lạ được bảo toàn trong tương tác mạnh nhưng không được bảo toàn trong tương tác yếu. Do đó câu trả lời là (a).

3008

Một hạt và phản hạt của nó

(a) phải có cùng khối lượng.

(b) phải khác nhau.

(c) luôn có thể hủy lẫn nhau tạo thành hai photon.

(CCT)

Lời giải:

Tính đối xứng đòi hỏi một hạt và phản hạt của nó phải có cùng khối lượng.

Do đó câu trả lời là (a).

3009

Thảo luận ngắn gọn bốn trong số các mục sau:

(1) Hạt J/ψ.

(2) Hệ meson K trung hòa, bao gồm sự tái sinh của K_s.

(3) Hai loại nơtrino.

(4) Momen lưỡng cực điện nơtron.

(5) Sự sinh hạt kèm theo.

(6) Lý thuyết Fermi về phân rã beta.

(7) Momen từ kì dị của hạt muyon.

(*Columbia*)

Lời giải:

(1) Hạt J/ψ . Năm 1974, C. C. Ting, B. Richter và những người khác bằng các phương pháp khác nhau đã phát hiện ra một hạt meson nặng có khối lượng $M = 3,1$ GeV/c^2. Thời gian sống của nó gấp $3 \sim 4$ lần bậc độ lớn thời gian sống của các hạt meson cùng khối lượng, điều này khiến nó trở thành hạt đặc biệt trong vật lý hạt. Được đặt tên là hạt J/ψ, sau này người ta đã chỉ ra rằng nó là trạng thái liên kết của một loại quac mới, gọi là quac duyên, và phản quac của nó. Hạt J/ψ phân rã thành thành các hạt không duyên theo quy tắc OZI hoặc thành một cặp lepton theo tương tác điện từ, và do đó có thời gian sống dài. Một vài số lượng tử của nó là

$$m(J/\psi) = (3096,9 \pm 0,1) \text{ MeV}/c^2, \qquad \Gamma = (63 \pm 9)\text{keV},$$

$$I^G(J^P)C = 0^-(1^-) - .$$

Mọi kênh phân rã của nó đã được nghiên cứu đầy đủ. Hạt $J/4$ và các hạt meson duyên khác cùng với các hạt baryon tạo thành họ các hạt duyên, điều này rất ý nghĩa đối với nội dung của vật lý hạt.

(2) *Các hạt meson K trung hòa* Thảo luận chi tiết được trình bày trong **các bài toán 3056–3058**.

(3) *Hai loại nơtrino*. Các thí nghiệm đã chỉ ra rằng có hai loại nơtrino: một (ν_e) đi kèm với electron (như trong phân rã β), loại kia (ν_μ) đi kèm muyon (như trong phân rã $\pi \to \mu$). Nơtrino và phản nơtrino là các hạt khác nhau.

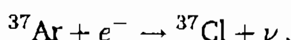
Sự tán xạ của các hạt nơtrino năng lượng cao có thể dẫn tới các phản ứng sau đây

$$\nu_e + n \rightarrow p + e^-, \qquad \bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+,$$

$$\nu_\mu + n \rightarrow p + \mu^-, \qquad \bar{\nu}_\mu + p \rightarrow n + \mu^+.$$

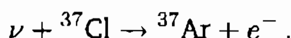
Giả sử một dòng hạt nơtrino từ một nguồn nào đó bị tán xạ và nó chứa $\nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)$. Nếu $\nu_e(\bar{\nu}_e)$ và $\nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)$ là giống nhau, thì một cách gần đúng các số giống nhau của $e^\mp$ and $\mu^\mp$ phải quan sát được bằng thực nghiệm. Nếu chúng không giống nhau, thì các phản ứng tạo ra $e^\mp$ bị cấm và sẽ không quan sát được bất kì hạt electron nào. Một thí nghiệm tiến hành năm 1962, sử dụng một dòng hạt proton có năng lượng > 20 GeV bắn phá một bia proton để tạo ra các hạt năng lượng cao pion và kaon. Hầu hết các hạt thứ cấp được phát ra trong một hình nón có góc mở rất hẹp và bị phân rã với các hạt nơtrino trong sản phẩm cuối cùng. Một màn chắn nặng có khả năng hấp thụ tất cả các hạt (ngoại trừ nơtrino được sử dụng). Dòng hạt nơtrino sinh ra (98–99% ν_μ, 1–2% ν_e) được sử dụng để bắn phá các hạt proton để tạo ra các hạt muyon hoặc electron. Thực nghiệm quan sát được 51 muyon nhưng không có chắc chắn một electron nào. Điều này chứng tỏ $\nu_e(\bar{\nu}_e)$ và $\nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)$ là các hạt khác nhau.

Sự khác nhau giữa ν và $\bar{\nu}$ có thể được chứng minh bằng cách đo tiết diện phản ứng đối với các nơtrino trong ^{37}Cl. Coi quá trình bắt giữ electron như sau



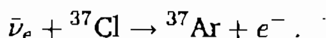
$$^{37}\mathrm{Ar} + e^- \rightarrow {}^{37}\mathrm{Cl} + \nu .$$

Quá trình ngược lại cũng có thể xuất hiện



$$\nu + {}^{37}\mathrm{Cl} \rightarrow {}^{37}\mathrm{Ar} + e^- .$$

Nếu $\bar{\nu}$ và ν giống nhau thì quá trình sau đây cũng có thể xảy ra

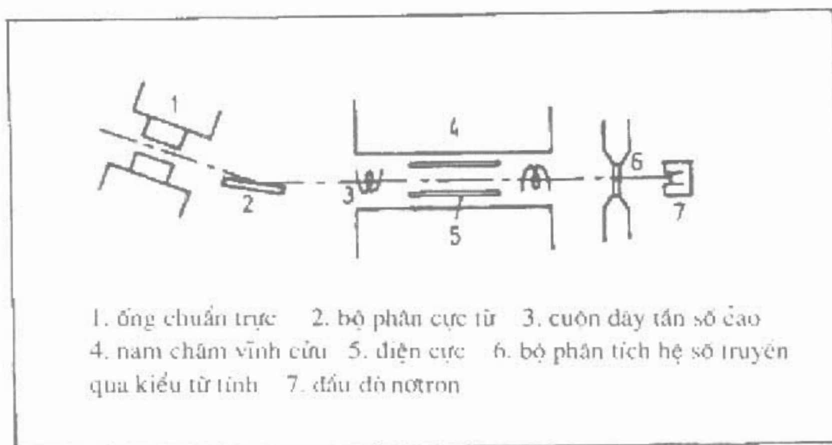


$$\bar{\nu}_e + {}^{37}\mathrm{Cl} \rightarrow {}^{37}\mathrm{Ar} + e^- .$$

Trong một thí nghiệm thực hiện bởi R. Davis và các đồng nghiệp, 4000 lít CCl_4 được đặt cạnh một lò phản ứng hạt nhân phát ra $\bar{\nu}$. Sự hấp thụ phản nơtrino bởi ^{37}Cl để tạo thành khí ^{37}Ar được tách ra từ CCl_4 và mức độ phóng xạ trong bắt giữ K của nó đã được đo đạc. Tiết diện phản ứng đo được nhỏ hơn rất nhiều giá trị lý thuyết mong đợi $\sigma \approx 10^{-43}$ cm^2 nếu ν_e và $\bar{\nu}_e$ như nhau. Điều này chứng tỏ $\bar{\nu}$ khác với ν.

(4) *Momen lưỡng cực điện của nơtron*

Việc đo đạc momen lưỡng cực điện của nơtron được khá quan tâm trong một thời gian dài do nó được coi như là một phương tiện để kiểm tra trực tiếp sự bất biến đảo thời gian. Một phương pháp để thực hiện mục đích này được mô tả trong hình 3.1, sử dụng cộng hưởng từ hạt nhân và sự lệch tĩnh điện.



1. ống chuẩn trực 2. bộ phân cực từ 3. cuộn dây tần số cao 4. nam châm vĩnh cửu 5. điện cực 6. bộ phân tích hệ số truyền qua kiểu từ tính 7. đầu dò nơtron

Hình 3.1

Nó cho ta $P_n = eD$, ở đây $D = (-1 \pm 4) \times 10^{-21}$ cm là độ dài hiệu dụng của momen lưỡng cực và e là điện tích electron. Sau đó, một thí nghiệm về nơtron lạnh cho ta $D = (0,4 \pm 1,1) \times 10^{-24}$ cm. Điều này có nghĩa là, trong phạm vi sai số thực nghiệm, không có momen lưỡng cực điện nào được quan sát thấy đối với nơtron.

(5) *Sự sinh hạt kèm theo*

Rất nhiều hạt mới được phát hiện trong các tia vũ trụ vào những năm 1950, chủ yếu thuộc hai loại chính – meson và baryon. Một tính chất kì dị của các hạt này là chúng được sinh ra trong tương tác mạnh (thời gian tương tác $\sim 10^{-23}$ s) nhưng lại phân rã trong tương tác yếu ($\tau \sim 10^{-10} \sim 10^{-8}$ s). Chúng cũng thường được sinh ra theo cặp. Hiện tượng này được gọi là sự sinh hạt kèm theo và các hạt đó được gọi là các hạt lạ. Để giải thích cho cách cư xử "kì lạ" của các hạt này, một số lượng tử bổ sung mới gọi là số lạ được gán cho tất cả các hạt hadron và các photon. Số lạ S bằng không đối với γ và các hạt "bình thường", và là một số nguyên âm hoặc dương nhỏ đối với các hạt lạ K, Λ, Σ. Một hạt và phản hạt của nó có số lạ đối nhau. S được bảo toàn đối với tương tác mạnh và tương tác điện từ nhưng không được bảo toàn với tương tác yếu. Do đó trong sản phẩm tạo ra bởi tương tác mạnh từ các hạt thông thường, hai hoặc nhiều hơn các hạt lạ phải được sinh ra với nhau để

bảo toàn S. Điều này giải thích cho hiện tượng sinh hạt kèm theo. Phân rã của một hạt lạ thành các hạt bình thường phải được tiến hành bởi tương tác yếu vì S không bảo toàn. Lý do cơ bản cho cách cư xử kì lạ của các hạt này là chúng chứa các quac lạ và phản quac.

(6) *Lý thuyết Fermi về phân rã β*

Fermi khởi xướng một lý thuyết về phân rã β vào năm 1934, tương tự như lý thuyết về sự chuyển dời điện từ. Ý tưởng cơ bản là khi tia γ được phát ra từ một nguyên tử hay hạt nhân trong một sự chuyển dời điện từ thì một electron và một nơtrino được tạo thành trong quá trình phân rã. Khi đó phổ năng lượng của các electron phát xạ có thể được suy ra bằng cách đơn giản như sau

$$\left[\frac{dI(p_e)}{p_e^2 F dp_e}\right]^{1/2} = C|M_{ij}|^2(E_0 - E_e)\,,$$

trong đó $dI(p_e)$ là xác suất phát xạ một electron có động lượng nằm trong khoảng p_e và $p_e + dp_e$, E_e là động năng tương ứng với p_e, E_0 là động năng cực đại của các electron, C là một hằng số, M_{ij} là phần tử ma trận cho sự chuyển pha tương tác yếu, $F(Z, E_e)$ là một thừa số giải thích cho ảnh hưởng của trường Coulomb của hạt nhân lên sự phát xạ electron. Lý thuyết giải thích tốt cho hiện tượng phân rã β, đã được sử dụng cho quá trình tương tác yếu đến khi sự không bảo toàn tính chẵn lẻ của tương tác yếu được phát hiện, khi đó nó được thay thế bởi một phiên bản mới đã được xem xét lại nhưng vẫn gần với bản gốc. Do đó lý thuyết Fermi được xem như là lý thuyết cơ bản để mô tả quá trình tương tác yếu.

(7) *Mô men từ dị thường của hạt muyon*

Theo lý thuyết của Dirac, một hạt Dirac chính xác tích điện đơn có spin J và khối lượng m sẽ có momen từ cho bởi

$$\mu = \frac{\mathbf{J}}{me} = g\frac{\mathbf{J}}{2mc}\,,$$

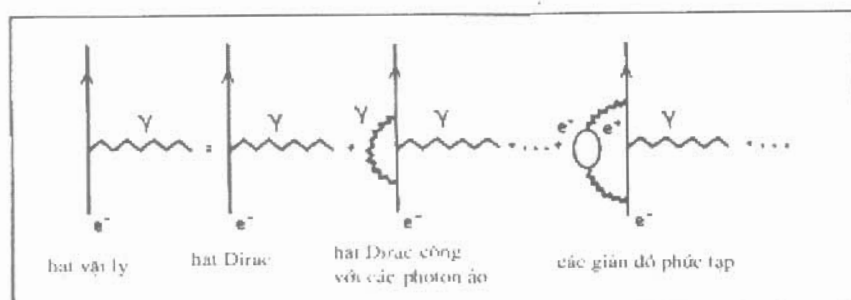
trong đó $g = -2$ đối với hạt muyon. Tuy nhiên muyon không phải là một hạt Dirac chính xác, thừa số g của nó cũng không chính xác bằng -2. Nó được cho rằng có một momen từ kì dị mà giá trị của nó có thể tính được bằng cách sử dụng điện động học lượng tử (QED) cùng với giản đồ Feynman được chỉ ra trong hình 3.2. Lấy $\alpha = \frac{|g|-2}{2}$. QED cho ta

$$\begin{aligned}\alpha_\mu^{\text{th}} &= \alpha/(2\pi) + 0,76578(\alpha/\pi)^2 + 2,55(\alpha/\pi)^3 + \cdots \\ &= (116592,1 \pm 1,0) \times 10^{-8}\,,\end{aligned}$$

trùng hợp tuyệt vời với giá trị thực nghiệm

$$\alpha_\mu^{exp} = (116592,2 \pm 0,9) \times 10^{-8}.$$

Điều này được coi như thành tựu sáng giá nhất của QED.



Hình 3.2

3010

Thời gian sống của hạt muyon là 10^9, 10^2, 10^{-2}, 10^{-6} giây.

(*Columbia*)

Lời giải:

10^{-6} s (chính xác hơn $\tau_\mu = 2,2 \times 10^{-6}$ s).

3011

Liệt kê tất cả các hạt lepton đã biết. μ^+ phân rã như thế nào? Xem xét phân rã này và biết rằng phản ứng $\nu_\mu + n \to e^- + p$ bị cấm, hãy thảo luận những số lượng tử lepton có thể được phép sao cho thỏa mãn các định luật bảo toàn số lượng tử bổ sung. Làm thế nào để ν_μ sinh ra được một hạt lepton "nặng" mang điện mới?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Cho tới nay có 10 loại lepton đã được tìm thấy. Chúng là e^-, ν_e, μ^-, ν_μ, τ và các phản hạt của chúng e^+, $\bar{\nu}_e$, μ^+, $\bar{\nu}_\mu$, τ^+, ν_τ hạt ν_τ được tiên đoán bởi lý thuyết là tồn tại nhưng vẫn chưa quan sát trực tiếp được.

μ^+ phân rã theo phương trình $\mu^+ \to e^+ + \nu_e + \nu_\mu$. Từ đó có phản ứng tiếp theo $\bar{\nu}_e + \mu^- \to e^+ + \bar{\nu}_\mu$. Mặt khác phản ứng $\nu_\mu + n \to e^- + p$ bị cấm. Từ

hai phản ứng này ta thấy rằng đối với tất cả các phản ứng được phép mà liên quan tới các hạt lepton, nếu có một hạt lepton trong trạng thái đầu thì phải có một hạt lepton tương ứng ở trạng thái cuối. Từ đó ta có thể định nghĩa một số lepton electron L_e và một số lepton muyon L_μ như sau

$$L_e = 1 \qquad \text{với} \quad e^-, \nu_e\,,$$

$$L_\mu = 1 \qquad \text{với} \quad \mu^-, \nu_\mu\,,$$

với các số lepton của phản hạt có dấu ngược lại, đồng thời đưa vào một quy tắc bảo toàn bổ sung là số lepton electron và số lepton muyon phải được bảo toàn một cách riêng rẽ trong từng phản ứng.

Suy từ một quy tắc tương tự là để tạo ra một hạt lepton nặng mang điện thì phản ứng phải bảo toàn số lepton tương ứng. Do đó một "lepton nặng" tích điện mới A^+ có thể được sinh ra từ phản ứng sau

$$\nu_\mu + n \to A^+ + \nu_A + \mu^- + X\,,$$

trong đó ν_A là nơtrino tương ứng với A^+, X là hạt baryon. Ví dụ, $A^+ = \tau^+$, $\nu_A = \nu_\tau$.

3012

Cho kiểu phân rã không tầm thường (tỉ lệ phân rã trên 5%) đối với mỗi hạt liệt kê dưới đây. Nếu tính đến cả các hạt nơtrino là trạng thái cuối cùng, hãy chỉ rõ loại chúng thuộc loại nào.

$$n \to, \pi^+ \to, \rho^0 \to, K^0 \to, \Lambda^0 \to, \Delta^{++} \to, \mu^- \to, \phi \to, \Omega^- \to, J/\Psi \to\,.$$

(*Wisconsin*)

Lời giải:

$n \to pe^-\bar{\nu}_e$; $\pi^+ \to \mu^+\nu_\mu$; $\rho^0 \to \pi^+\pi^-$; $K^0 \to \pi^+\pi^-$, $\pi^0\pi^0$, $\pi^0\pi^0\pi^0$, $\pi^+\pi^-\pi^0$, $\pi^\pm\mu^\mp\nu_\mu$, $\pi^0\mu^\pm e^\mp\nu_e$; $\Lambda^0 \to p\pi^-$, $n\pi^0$; $\Delta^{++} \to p\pi^+$; $\mu^- \to e^-\bar{\nu}_e\nu_\mu$; $\phi \to K^+K^-$, $K_L^0K_S^0$, $\pi^+\pi^-\pi^0$; $\Omega^- \to \Lambda K^-$, $\Xi^0\pi^-$, $\Xi^-\pi^0$; $J/\psi \to e^+e^-$, $\mu^+\mu^-$, hadron.

3013

Xem xét các phản ứng năng lượng cao hoặc các phân rã hạt dưới đây:

(1) $\pi^- + p \to \pi^0 + n$

(2) $\pi^0 \to \gamma + \gamma + \gamma$

(3) $\pi^0 \to \gamma + \gamma$

(4) $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$

(5) $\pi^+ \to \mu^+ + \bar{\nu}_\mu$

(6) $p + \bar{p} \to \Lambda^0 + \Lambda^0$

(7) $p + \bar{p} \to \gamma$.

Hãy chỉ ra đối với mỗi trường hợp:

(a) được phép hoặc bị cấm,

(b) lý do bị cấm,

(c) loại tương tác, nếu được phép (nghĩa là tương tác mạnh, yếu, điện từ, v.v.)

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(1) $\pi^- + p \to \pi^0 + n$: Mọi số lượng tử được bảo toàn, phản ứng được phép bởi tương tác mạnh.

(2) $\pi^0 \to \gamma + \gamma + \gamma : C(\pi^0) = +1$, $C(3\gamma) = (-1)^3 \neq C(\pi^0)$, bị cấm vì chẵn lẻ C không được bảo toàn.

(3) $\pi^0 \to \gamma + \gamma$: phân rã điện từ được phép.

(4) $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$: phân rã yếu được phép.

(5) $\pi^+ \to \mu^+ + \bar{\nu}_\mu$: vế bên trái $L_\mu = 0$, vế bên phải $L_\mu = -2$, phản ứng bị cấm vì số lepton μ không được bảo toàn.

(6)

	$p+$	$\bar{p} \to$	Λ^0+	Λ^0	
B	1	-1	1	1	$\Delta B = +2$
S	0	0	-1	-1	$\Delta S = -2$

bị cấm vì số baryon không được bảo toàn.

(7) $p + \bar{p} \to \gamma$ bị cấm vì momen động lượng và tính chẵn lẻ đều không được bảo toàn. Cả momen động lượng lẫn năng lượng đều không được bảo toàn vì

$W^2(p, \bar{p}) = (E_p + E_{\bar{p}})^2 - (\mathbf{p}_p + \mathbf{p}_{\bar{p}})^2 = m_p^2 + m_{\bar{p}}^2 + 2(E_p E_{\bar{p}} - \mathbf{p}_p \cdot \mathbf{p}_{\bar{p}}) \geq 2m_p^2 > 0$, do $E^2 = p^2 + m^2$, $E_p E_{\bar{p}} \geq p_p p_{\bar{p}} \geq \mathbf{p}_p \cdot \mathbf{p}_{\bar{p}}$, $W^2(\gamma) = E_\gamma^2 - p_\gamma^2 = E_\gamma^2 - E_\gamma^2 = 0$,

và như thế $W(p,\bar{p}) \neq W^2(\gamma)$.

3014

Đối với mỗi phân rã liệt kê sau đây hãy chỉ ra một định luật bảo toàn bị vi phạm:

$$n \to p + e^-$$

$$n \to \pi^+ + e^-$$

$$n \to p + \pi^-$$

$$n \to p + \gamma$$

(*Wisconsin*)

Lời giải:

$n \to p + e^-$: định luật bảo toàn momen động lượng và định luật bảo toàn số lepton bị vi phạm.

$n \to \pi^+ + e^-$: định luật bảo toàn số baryon và định luật bảo toàn số lepton bị vi phạm.

$n \to p + \pi^-$: định luật bảo toàn năng lượng bị vi phạm.

$n \to p + \gamma$: bảo toàn điện tích bị vi phạm.

3015

Những định luật bảo toàn, những nguyên lý bất biến hay những cơ chế nào giải thích cho sự bị cấm của các quá trình dưới đây?

(1) $p + n \to p + \Lambda^0$

(2) $K^+ \to \pi^+ + \pi^- + \pi^+ + \pi^- + \pi^+ + \pi^0$

(3) $\bar{K}^0 \to \pi^- + e^+ + \nu_e$

(4) $\Lambda^0 \to K^0 + \pi^0$

(5) $\pi^+ \to e^+ + \nu_e$ (so với $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$)

(6) $K_L^0 \to e^+ + e^-$

(7) $K^- \to \pi^0 + e^-$

(8) $\pi^0 \to \gamma + \gamma + \gamma$

(9) $K_L^0 \to \pi^+ + \pi^-$

(10) $K^+ \to \pi^+ + \pi^+ + \pi^0$

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(1) Định luật bảo toàn số lạ và định luật bảo toàn spin đồng vị bị vi phạm.

(2) Định luật bảo toàn năng lượng bị vi phạm.

(3) $\Delta S = 1$, $\Delta Q = 0$, quy luật mà nếu $|\Delta S| = 1$ trong tương tác yếu thì, ΔS phải bằng ΔQ, bị vi phạm

(4) Định luật bảo toàn số baryon bị vi phạm.

(5) Quá trình này trải qua tương tác yếu và tỉ lệ tốc độ là **(Bài tập 3040)**

$$\frac{\Gamma(\pi^+ \to e^+ + \nu_e)}{\Gamma(\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu)} = \left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2 \left(\frac{m_\pi^2 - m_e^2}{m_\pi^2 - m_\mu^2}\right)^2 = 1,2 \times 10^{-4}$$

Do đó kiểu $\pi \to e\nu$ là không đáng kể.

(6) $\Delta S = -1$, $\Delta Q = 0$, cùng lý do với (3).

(7) Định luật bảo toàn số lepton bị vi phạm.

(8) Định luật bảo toàn chẵn lẻ C bị vi phạm.

(9) Định luật bảo toàn chẵn lẻ CP bị vi phạm.

(10) Định luật bảo toàn điện tích bị vi phạm.

3016

Trong các phản ứng dưới đây, phản ứng nào vi phạm một định luật bảo toàn?

Nếu vi phạm thì định luật bảo toàn nào bị vi phạm.

$\mu^+ \to e^+ + \gamma$

$e^- \to \nu_e + \gamma$

$p + p \to p + \Sigma^+ + K^-$

$p \to e^+ + \nu_e$

$p \to e^+ + n + \nu_e$

$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$

$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$

(*Buffalo*)

Lời giải:

$\mu^+ \to e^+ + \gamma$ bị cấm vì phản ứng vi phạm định luật bảo toàn số lepton mà định luật này luôn đúng với mọi loại tương tác.

$e^- \to \nu_e + \gamma$, $p + p \to p + \Sigma^+ + K^-$ bị cấm vì chúng vi phạm định luật bảo toàn điện tích.

$p \to e^+ + \nu_e$ bị cấm vì vi phạm định luật bảo toàn số baryon.

$p \to e^+ + n + \nu_e$ bị cấm vì vi phạm định luật bảo toàn năng lượng.

$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$, $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$ được phép.

3017

(a) Giải thích tại sao các phản ứng sau đây không quan sát được, thậm chí nếu động năng của proton thứ nhất là vài BeV:

(1) $p + p \to K^+ + \Sigma^+$

(2) $p + n \to \Lambda^0 + \Sigma^+$

(3) $p + n \to \Xi^0 + p$

(4) $p + n \to \Xi^- + K^+ + \Sigma^+$

(b) Giải thích tại sao các quá trình phân rã sau dây không quan sát được:

(1) $\Xi^0 \to \Sigma^0 + \Lambda^0$

(2) $\Sigma^+ \to \Lambda^0 + K^+$

(3) $\Xi^- \to n + \pi^-$

(4) $\Lambda^0 \to K^+ + K^-$

(5) $\Xi^0 \to p + \pi^-$

(*Columbia*)

Lời giải:

(a) Các phản ứng chỉ liên quan đến các hạt tương tác mạnh và đều phải tuân theo tất cả các định luật bảo toàn. Nếu có định luật bị vi phạm thì quá trình đó sẽ bị cấm và không quan sát được. Một số các dữ liệu liên quan và các số lượng tử được cho trong bảng 3.3. (1) $p + p \to K^+ + \Sigma^+$, số baryon, spin đồng vị và thành phần thứ ba của nó không được bảo toàn.

(2) $p + n \to \Lambda^0 + \Sigma^+$, số lạ ($\Delta S = -2$) và thành phần thứ ba của spin đồng vị không được bảo toàn.

Hạt	Thời gian sống(s)	Khối lượng (MeV/c^2)	Spin J	Số lạ S	Đồng vị spin I
$\pi^{\pm}$	$2{,}55\times10^{-8}$	139,58	0	0	1
K	$1{,}23\times10^{-8}$	493,98	0	±1	1/2
p	bền	938,21	1/2	0	1/2
n	$1,0\times10^{3}$	939,51	1/2	0	1/2
Λ^0	$2,52\times10^{-10}$	1115,5	1/2	-1	0
Σ^+	$0,81\times10^{-10}$	1189,5	1/2	-1	1
Σ^0	$< 10^{-14}$	1192,2	1/2	-1	1
Ξ^-	$1,7\times10^{-10}$	1321	1/2	-2	1/2
Ξ^0	$2,9\times10^{-10}$	1315	1/2	-2	1/2

Bảng 3.5

(3) $p+n\to\Xi^0+p$, cùng lý do với quá trình (2).

(4) $p+n\to\Xi^-+K^++\Sigma^+$, cùng lý do với quá trình (2).

(b) Mọi phân rã đều là các phân rã yếu không tạo ra lepton của các hạt lạ, trong đó sự thay đổi số lạ S, spin đồng vị I và thành phần thứ 3 của nó I_3 phải tuân theo quy tắc $|\Delta S|=1$, $|\Delta I_3|=1/2$, $|\Delta I|=1/2$.

(1) $\Xi^0\to\Sigma^0+\Lambda^0$, năng lượng và số baryon không bảo toàn.

(2) $\Sigma^+\to\Lambda^0+K^+$, năng lượng không bảo toàn.

(3) $\Xi^-\to n+\pi^-$, $|\Delta S|=2>1$, $|\Delta I_3|=1>1/2$.

(4) $\Lambda^0\to K^++K^-$, số baryon không bảo toàn.

(5) $\Xi^0\to p+\pi^-$, $|\Delta S|=2>1$, $|\Delta I_3|=1>1/2$.

3018

Liệt kê dưới đây là các quá trình phân rã.

(a) Quá trình nào không xuất hiện trong tự nhiên? Đối với mỗi quá trình đó hãy chỉ ra định luật bảo toàn nào cấm sự xuất hiện của nó.

(b) Sắp xếp các phân rã còn lại theo thứ tự tăng dần của thời gian sống. Đối với mỗi trường hợp chỉ ra tương tác chi phối phân rã và đưa ra một ước lượng về bậc của thời gian sống. Giải thích ngắn gọn về sự lựa chọn đó.

$p\to e^++\pi^0$

$\Omega^-\to\Xi^0+K^-$

$\rho^0 \to \pi^+ + \pi^-$

$\pi^0 \to \gamma + \gamma$

$D^0 \to K^- + \pi^+$

$\Xi^- \to \Lambda^0 + \pi^-$

$\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$

hạt	khối lượng (MeV/c²)	J	B	L	I	S	G
γ	0	1	0	0	0	0	0
ν_e	0	1/2	0	1	0	0	0
ν_μ	0	1/2	0	1	0	0	0
e^-	0.5	1/2	0	1	0	0	0
μ^-	106	1/2	0	1	0	0	0
π^0	135	0	0	0	1	0	0
κ^-	494	0	0	0	1/2	-1	0
ρ^0	770	1	0	0	1	0	0
p	938	1/2	1	0	1/2	0	0
Λ^0	1116	1/2	1	0	0	-1	0
Ξ^-	1321	1/2	1	0	1/2	-2	0
Ω^-	1672	3/2	1	0	0	-3	0
D^0	1865	0	0	0	1/2	0	1

Bảng 3.6

(*Columbia*)

Lời giải:

(a) $p \to e^+ + \pi^0$, bị cấm vì số lepton và số baryon không được bảo toàn.

$\Omega^- \to \Xi^0 + K^-$, bị cấm vì năng lượng không được bảo toàn $m_\Omega < (m_\Xi + m_K)$.

(b) Các phân rã được phép được sắp xếp theo thứ tự tăng dần của thời gian sống như sau:

$\rho^0 \to \pi^+ + \pi^-$, thời gian sống $\approx 10^{-24}$ s, phân rã mạnh,

$\pi^0 \to \gamma + \gamma$, thời gian sống $\approx 10^{-16}$ s, phân rã điện từ,

$D^0 \to K^- + \pi^+$, thời gian sống $\approx 10^{-13}$ s, phân rã yếu,

$\Xi^- \to \Lambda^0 + \pi^-$, thời gian sống $\approx 10^{-10}$ s, phân rã yếu,

$\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$, thời gian sống $\approx 10^{-6}$ s, phân rã yếu.

Hai phân rã đầu tiên đặc trưng cho phân rã mạnh và phân rã điện từ, phân

rã thứ ba và thứ tư là các phân rã yếu trong đó số lạ và số duyên thay đổi, trong khi đó phân rã cuối cùng là phân rã yếu của một hạt không lạ.

3019

Một thí nghiệm được thực hiện để tìm bằng chứng về phản ứng $pp \to HK^+K^+$.

(a) Xác định điện tích, số lạ và số baryon của hạt H? H chứa bao nhiêu hạt quac?

(b) Một tính toán lý thuyết đối với khối lượng của hạt H ở trạng thái này cho giá trị dự kiến là $m_H = 2150$ MeV.

Giá trị nhỏ nhất cần thiết của động lượng của chùm proton tới để sinh ra trạng thái này là bao nhiêu? (Giả sử rằng các proton bia đứng yên)

(c) Nếu khối lượng dự kiến nêu trên là đúng thì có thể nói gì về khả năng xảy ra các kiểu phân rã của H? Xem xét cả hai trường hợp phân rã mạnh và phân rã yếu.

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Vì K^+ có $S = 1$, $B = 0$, nên H được dự đoán là có điện tích $Q = 0$, số lạ $S = -2$, số baryon $B = 2$. Để thỏa mãn những yêu cầu này, H phải chứa ít nhất 6 quac (uu dd ss).

(b) Khi năng lượng tới nhỏ nhất, các hạt sinh ra sẽ đứng yên ở hệ quy chiếu khối tâm. Vì $(\Sigma E)^2 - (\Sigma \mathrm{p})^2$ là bất biến nên ta có

$$(E_0 + m_p)^2 - p_0^2 = (m_H + 2m_K)^2 ,$$

rút ra

$$E_0 = \frac{(m_H + 2m_K)^2 - 2m_p^2}{2m_p}$$
$$= \frac{(2,15 + 2 \times 0,494)^2 - 2 \times 0,938^2}{2 \times 0,938} = 4,311 \text{ GeV},$$

và do đó động lượng tới nhỏ nhất là

$$p_0 = \sqrt{E_0^2 - m_p^2} = 4,208 \text{ GeV}/c .$$

(c) Vì đối với phân rã mạnh, $\Delta S = 0$, $\Delta B = 0$, nên các kênh phân rã có thể là $H \to \Lambda^0\Lambda^0$, $\Lambda^0\Sigma^0$, $\Xi^- p$, $\Xi^0 n$.

Tuy nhiên tất cả đều vi phạm định luật bảo toàn năng lượng, do đó đều bị cấm. Xem xét các phân rã yếu khả dĩ. Các phân rã có thể là các phân rã không sinh lepton $H \to \Lambda + n$, $\Sigma^0 + n$, $\Sigma^- + p$, và các phân rã sinh hạt bán lepton

$$H \to \Lambda + p + e^- + \bar{\nu}, \quad \Sigma^0 + p + e^- + \bar{\nu}.$$

3020

Với một năng lượng tự do 4,5 GeV, có thể tạo ra đồng vị nặng nhất nào một cách lý thuyết từ không gì cả?

(a) ^{2}D.

(b) ^{3}He.

(c) ^{3}T.

(*CCT*)

Lời giải:

Với một năng lượng tự do 4,5 GeV, có thể tạo ra các baryon với năng lượng thấp hơn 2,25 GeV (Để bảo toàn số baryon, cùng một lượng baryon và phản baryon phải được tạo ra với nhau. Do đó chỉ được phép dùng một nửa năng lượng cho sự tạo baryon). Trong ba hạt kể trên chỉ có ^{2}D là có năng lượng nghỉ thấp hơn năng lượng cần thiết nói trên. Do đó câu trả lời là (a).

3021

(i) Phân rã $K \to \pi\gamma$ bị cấm tuyệt đối bởi một định luật bảo toàn nào đó mà định luật này được tin tưởng là chính xác. Đó là định luật nào?

(ii) Không có hạt meson đã biết nào có điện tích là 2. Hãy giải thích đơn giản nhận định này.

(iii) Giải thích làm thế nào tính chẵn lẻ của pion có thể đo được bằng cách quan sát sự phân cực của các photon trong phản ứng $\pi^0 \to \gamma\gamma$.

(iv) Với một độ chính xác rất cao, tiết diện phản ứng đối với tán xạ $e^- p$ bằng tiết diện phản ứng đối với tán xạ $e^+ p$. Đẳng thức này có phải là kết quả của một định luật bảo toàn nào đó không? Nếu phải thì đó là định luật nào? Nếu không hãy giải thích sự bằng nhau mà ta quan sát được. Theo bạn đẳng

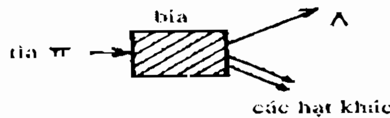
thức này bị vi phạm (nếu có) tới mức nào?

(v) Gần đây người ta đã quan sát thấy rằng trong bất cứ quá trình sinh hạt Λ nào (hình 3.3), ví dụ $\pi p \to \Lambda +$ sản phẩm nào đó, hạt Λ được sinh ra có một độ phân cực cao đáng ngạc nhiên. Theo bạn sự phân cực này là

(a) cùng chiều (hay ngược chiều) với chiều của dòng hạt tới,

(b) cùng chiều (hay ngược chiều) với chiều chuyển động của hạt sinh ra Λ, hay

(c) vuông góc với cả hai?



Hình 3.3

(*Princeton*)

Lời giải:

(i) Phân rã bị cấm bởi định luật bảo toàn số lạ, định luật này luôn đúng trong tương tác điện từ.

(ii) Theo lý thuyết đang phổ biến thì một hạt meson chứa một quac và một phản quac. Giá trị tuyệt đối của điện tích của một quac không lớn hơn 2/3. Do đó không thể có điện tích của một hạt meson gồm hai quac lại bằng 2.

(iii) Gọi vectơ sóng của hai photon là $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, chiều phân cực của điện trường của chúng là $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, và đặt $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$. Do spin của π^0 là 0, các dạng có thể được phép của biên độ phân rã là $A\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2$ và $B\mathbf{k} \cdot (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)$, mà dưới phép đảo không gian sẽ tương ứng là không đổi và đổi dấu. Do đó dạng đầu tiên sẽ có tính chẵn lẻ chẵn và dạng sau sẽ có tính chẵn lẻ lẻ. Hai trường hợp này ứng với hai sự phân cực tương đối khác nhau của photon. Dạng đầu tiên mô tả chủ yếu sự phân cực song song trong khi đó dạng thứ hai chủ yếu mô tả sự phân cực vuông góc giữa hai photon. Rất khó để đo được sự phân cực của các photon năng lượng cao ($E \sim 70$ MeV) một cách trực tiếp. Nhưng trong các phân rã π^0, trong một phần α^2 của trường hợp hai photon biến đổi trực tiếp thành hai cặp electron – positron. Đối với trường hợp đó, sự phân cực tương đối giữa hai photon có thể xác định được bằng cách đo góc giữa hai cặp electron – positron. Kết quả thực nghiệm thiên về sự phân cực vuông góc. Do tính chẵn lẻ được bảo toàn trong tương tác điện từ nên tính chẵn lẻ của π^0 là

lẻ.

(iv) Không. Với độ chính xác bậc một, xác suất của tương tác điện từ không liên quan tới dấu của điện tích của hạt tới. Chỉ khi cấp chính xác bậc cao hơn được xem xét thì dấu của điện tích mới có vai trò. Khi độ mạnh của mỗi tương tác điện từ bậc cao hơn giảm bởi một hệ số α^2, thì sự bằng nhau này sẽ bị vi phạm bởi một thừa số $\alpha^2 \approx 5,3 \times 10^{-5}$.

(v) Sự phân cực σ của Λ vuông góc với mặt phẳng tương tác. Vì tính chẵn lẻ được bảo toàn trong tương tác mạnh nên σ vuông góc với mặt phẳng của các sản phẩm tạo thành, nghĩa là

$$\sigma \propto \mathbf{p}_\pi \times \mathbf{p}_\Lambda.$$

3022

Một chấn động gần đây là sự kiện phát hiện ra phân rã $\mu^+ \to e^+ + \gamma$ tại tỉ lệ phân nhánh cỡ $\sim 10^{-9}$.

(a) Nguyên lý tổng quát nào được cho là chịu trách nhiệm về sự triệt phân rã này?

(b) Thiết bị thí nghiệm gồm một dòng hạt dừng μ^+ và hai tinh thể NaI đáp ứng với năng lượng toàn phần của các positron hay của các tia gama. Bạn sẽ xếp các tinh thể tương đối với bia đứng yên và chùm hạt như thế nào và dấu hiệu nào trong các tinh thể sẽ chỉ ra một hiện tượng như là phân rã μ nói trên?

(c) Các hiện tượng cơ sở là các phân rã $\mu^+ \to e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu + \gamma$ với các hạt nơtrino không được phát hiện. Hãy mô tả định tính làm thế nào để phân biệt được hiện tượng thuộc loại này với các hiện tượng $\mu^+ \to e^+ + \gamma$ đang được quan tâm.

(*Wisconsin*)

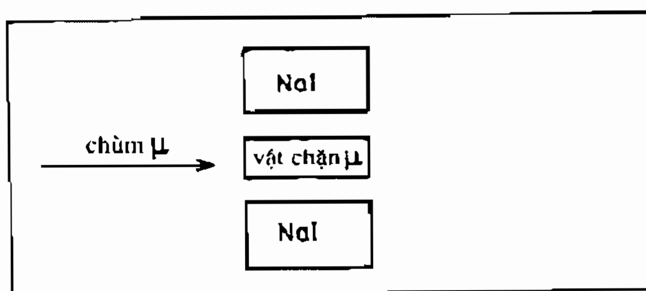
Lời giải:

(a) Phân rã này bị triệt bởi sự bảo toàn riêng rẽ số lepton electron và số lepton μ,

(b) $\mu^+ \to e^+ + \gamma$ là một phân rã hai sản phẩm. Khi hạt muyon đứng yên phân rã thành e^+ và γ, ta có $E_e \approx E_\gamma = \frac{m_\mu c^2}{2}$. Vì e^+ và γ được phát ra theo hai chiều ngược nhau nên hai tinh thể phải được đặt đối diện nhau. Để giảm tối thiểu ảnh hưởng của bất kì hạt meson tới trực tiếp nào, hai tinh thể này nên được đặt vuông góc với dòng hạt μ (xem hình 3.4). Sự trùng nhau của

các tín hiệu e^+ và γ cho ta hiện tượng phân rã μ, bao gồm cả hiện tượng cơ sở sẽ được đề cập ở câu (c).

(c) $\mu^+ \to e^+ + \gamma$ là một phân rã hai sản phẩm và $\mu^+ \to e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu + \gamma$ là một phân rã bốn sản phẩm. Trong phân rã đầu tiên, e^+ và γ là đơn năng lượng trong khi đó trong phân rã sau e^+ và γ có năng lượng liên tục tới một giá trị cực đại. Chúng ta có thể tách riêng chúng bằng cách khuếch đại các tín hiệu từ hai tinh thể. Đối với, $\mu^+ \to e^+ + \gamma$, $(E_e + E_\gamma) = m_\mu$, trong khi đó đối với $\mu^+ \to e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu + \gamma$, $(E_e + E_\gamma) < m_\mu$.



Hình 3.4

3023

Mô tả tính chất của các loại pion khác nhau và thảo luận chi tiết các thí nghiệm được tiến hành để xác định spin, chẵn lẻ và spin đồng vị của chúng.

(*Buffalo*)

Lời giải:

Có ba loại pion: $\pi^0, \pi^+ \pi^-$, với π^+ là phản hạt của π^- và π^0 là phản hạt của chính nó, tạo thành một bội ba spin đồng vị của $I = 1$. Các tính chất cơ bản của nó được liệt kê trong bảng 3.5.

Để xác định spin của π^+, chúng ta áp dụng nguyên lý cân bằng chi tiết đối với phản ứng thuận nghịch $\pi^+ + d \rightleftarrows p + p$, trong đó phản ứng thuận và phản ứng nghịch có phần tử ma trận dịch chuyển như nhau. Do đó

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(pp \to d\pi^+) = \frac{d\sigma}{d\Omega}(d\pi^+ \to pp) \times 2\frac{p_\pi^2(2J_\pi + 1)(2J_d + 1)}{p_p^2(2J_p + 1)^2},$$

Hạt	Khối lượng(MeV)	Spin	Chẵn lẻ	chẵn lẻ	Spin đồng vị	I_3	G
π^+	139,6	0	-		1	1	-1
π^0	135	0	-	+	1	0	-1
π^-	139,6	0	-		1	-1	-1

Bảng 3.7

trong đó p_π, p_p tương ứng là động lượng của π và p, trong hệ quy chiếu khối tâm. Tiết diện phản ứng thực nghiệm cho $2J_\pi + 1 = 1,00 \pm 0,01$, hoặc $J_\pi = 0$.

Spin của π^- có thể xác định trực tiếp từ cấu trúc siêu tinh tế của phổ nguyên tử meson π. Ngoài ra, sự đối xứng của hạt và phản hạt đòi hỏi π^+ và π^- có cùng spin. Do đó spin của π^- cũng bằng 0.

Spin của π^0 có thể xác định được bằng cách nghiên cứu phân rã $\pi^0 \to 2\gamma$. Trước tiên, chúng ta sẽ thấy rằng một hạt có spin 1 không thể phân rã thành hai hạt γ. Xem xét phân rã trong hệ khối tâm của hai hạt γ, gọi động lượng của chúng là $\mathbf{k}$ và $-\mathbf{k}$, vectơ phân cực của chúng tương ứng là ε_1 và ε_2. Vì spin của trạng thái ban đầu là 1 nên trạng thái cuối cùng phải có dạng vectơ. Vì một photon thực chỉ có phân cực ngang nên chỉ các vectơ sau đây là có thể được tạo ra từ $\mathbf{k}$, ε_1, ε_2:

$$\varepsilon_1 \times \varepsilon_2, \quad (\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2)\mathbf{k}, \quad (\varepsilon \times \varepsilon_2 \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}\,.$$

Tất cả 3 dạng vectơ đều đổi dấu khi hai hạt γ đổi vị trí cho nhau. Tuy nhiên hệ 2γ là một hệ của hai hạt boson mà nó đối xứng khi đổi chỗ và do đó không có dạng nào trong số ba dạng vectơ trên có thể là hàm sóng của hệ. Do đó spin của π^0 không thể bằng 1. Mặt khác, xem xét phản ứng $\pi^- + p \to \pi^0 + n$ sử dụng π^- năng lượng thấp (sóng s). Phản ứng bị cấm vì $J_{\pi^0} \geq 2$. Theo thực nghiệm, tiết diện của phản ứng trao đổi điện tích là rất lớn. Điều trên chứng tỏ rằng $J_{\pi^0} = 0$.

Tính chẵn lẻ của π^- có thể được xác định từ phản ứng $\pi^- + d \to n + n$, sử dụng π^- năng lượng thấp (sóng s). Như đã biết rằng $J_d^P = 1^+$, do đó $P(\pi^-) = P^2(n)(-1)^l$, l là momen động lượng quỹ đạo trong chuyển động tương đối của hai nơtron. Vì hệ n–n là một hệ fecmion và do đó nó bất đối xứng khi đổi chỗ, $l = 1$, $J = 1$, cho ta $P(\pi^-) = -1$.

Tính chẵn lẻ của π^+ có thể xác định được bằng cách nghiên cứu tiết diện của phản ứng $\pi^+ + d \to p + p$ như là hàm của π^+ tới năng lượng thấp (sóng s). Nó cho kết quả $P(\pi^+) = -1$.

Tính chẵn lẻ của π^0 có thể được xác định bằng cách đo sự phân cực của

phân rã $\pi^0 \to 2\gamma$. Vì $J(\pi^0) = 0$, và hệ 2γ ở trạng thái cuối cùng là đối xứng trao đổi nên dạng có thể của biên độ phân rã là

$$\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2, \text{ tương ứng với } P(\pi^0) = +1\,,$$

$$\mathbf{k} \cdot (\varepsilon_1 \times \varepsilon_2), \text{ tương ứng với } P(\pi^0) = -1\,.$$

trong đó **k** là động lượng của hạt γ trong hệ π^0 đứng yên. Hai dạng trên tương ứng biểu diễn trường hợp phân cực song song chiếm ưu thế và trường hợp phân cực vuông góc chiếm ưu thế của hai photon. Sau đó xem xét sản phẩm cặp electron- positron bởi hai hạt γ

$$\begin{array}{l} \pi^0 \to \gamma + \gamma \\ \qquad\quad | \qquad \to e^+ + e^- \\ \qquad\quad \to e^+ + e^- \end{array}$$

Một cặp electron – positron được sinh ra trong mặt phẳng của vectơ điện của tia γ. Vì kết quả thực nghiệm chỉ ra rằng các mặt phẳng của hai cặp này chủ yếu vuông góc với nhau nên chẵn lẻ của π^0 bằng -1.

Spin đồng vị của π có thể được xác định bằng cách nghiên cứu quá trình tương tác mạnh như sau

$$n + p \to d + \pi^0, \qquad p + p \to d + \pi^+\,.$$

Xem xét phản ứng sau. Spin đồng vị của trạng thái đầu $(p + p)$ là $|1, 1\rangle$, spin đồng vị của trạng thái cuối cũng là $|1, 1\rangle$. Vì spin đồng vị được bảo toàn, nên sự chuyển dời tới trạng thái cuối $(d + \pi^+)$ có xác xuất 100%. Trong khi đó, phản ứng đầu tiên có spin đồng vị ở trạng thái đầu là $\frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 0\rangle - |0, 0\rangle)$, trong đó chỉ có trang thái $|1, 0\rangle$ có thể chuyển thành hệ $(d + \pi^0)$ của spin đồng vị $|1, 0\rangle$. Do đó xác suất cho sự chuyển dời từ $(n + p)$ thành $(d + \pi^0)$ là 50%. Nói cách khác, nếu $I(\pi) = 1$, ta sẽ có

$$\sigma(pp \to d\pi^+) = 2\sigma(pn \to d\pi^0)\,.$$

Vì điều này trùng hợp với thực nghiệm nên $I(\pi) = 1$.

3024

Hạt baryon trung hòa về điện Σ^0 (1915) (có khối lượng 1915 MeV/c^2) có spin đồng vị $I = 1$, $I_3 = 0$. Gọi Γ_{K^-p}, $\Gamma_{\bar{K}^0 n}$, $\Gamma_{\pi^- p}$, $\Gamma_{\pi^+\pi^-}$ tương ứng là tốc

độ của các phân rã $\Sigma^0(1915) \to K^-p$, $\Sigma^0(1915) \to \bar{K}^0n$, $\Sigma^0(1915) \to \pi^-p$, $\Sigma^0(1915) \to \pi^+\pi^-$. Tìm các tỉ số

$$\frac{\Gamma_{\bar{K}^0n}}{\Gamma_{K^-p}}, \quad \frac{\Gamma_{\pi^-p}}{\Gamma_{K^-p}}, \quad \frac{\Gamma_{\pi^+\pi^-}}{\Gamma_{K^-p}}.$$

(Khối lượng của các nucleon, K^-, và meson π^- đảm bảo cho những phân rã này có thể về động học. Có thể bỏ qua sự tách khối lượng nhỏ bên trong một đa bội spin đồng vị.)

(*Chicago*)

Lời giải:

n, p tạo nên một bội hai spin đồng vị, π^+, π^0, π^- tạo nên một bội ba spin đồng vị và K^+, K^0 tạo nên một bội hai spin đồng vị. K^- và $\bar{K}^0$, phản hạt của K^+ và K^0 cũng tương ứng tạo nên một nhị tuyến spin đồng vị. Viết trạng thái spin đồng vị của $\Sigma^0(1915)$ là $|1,0\rangle$, của p và n là $|1/2, 1/2\rangle$ và $|1/2, -1/2\rangle$, tương ứng là $\bar{K}^0$ và K^- là $|1/2, 1/2\rangle$ và $|1/2, -1/2\rangle$. Vì

$$\Psi(\bar{K}^0n) = \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}(|1,0\rangle + |0,0\rangle),$$

$$\Psi(K^-p) = \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}(|1,0\rangle - |0,0\rangle),$$

$\Sigma^0(1915) \to \bar{K}^0n$ và $\Sigma^0(1915) \to K^-p$ đều là phân rã mạnh, độ rộng riêng phần là

$$\Gamma_{\bar{K}^0n} \propto |\langle\Psi(\Sigma^0)|H|\Psi(\bar{K}^0n)\rangle|^2 = \left(\frac{a_1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{a_1^2}{2},$$

$$\Gamma_{K^-p} \propto |\langle\Psi(\Sigma^0)|H|\Psi(K^-p)\rangle|^2 = \left(\frac{a_1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{a_1^2}{2},$$

trong đó $a_1 = \langle 1|H|1\rangle$. Chú ý rằng $\langle 1|H|0\rangle = 0$ và, vì tương tác mạnh là độc lập về điện tích nên, a_1 chỉ phụ thuộc vào I mà không phụ thuộc vào I_3. Do đó

$$\frac{\Gamma_{\bar{K}^0n}}{\Gamma_{K^-p}} = 1.$$

$\Sigma^0(1915) \to p\pi^-$ là một phân rã yếu ($\Delta I_3 = -\frac{1}{2} \neq 0$) và do đó

$$\frac{\Gamma_{\pi^-p}}{\Gamma_{K^-p}} \ll 1.$$

(thực tế cỡ $\sim 10^{-10}$).

Trong kiểu $\Sigma^0(1915) \to \pi^+\pi^-$ số baryon không được bảo toàn và do đó phản ứng bị cấm. Vì vậy

$$\Gamma_{\pi^+\pi^-} = 0\,,$$

hay là

$$\frac{\Gamma_{\pi^+\pi^-}}{\Gamma_{K^-p}} = 0\,.$$

3025

Trong các phản ứng dưới đây phản ứng nào được phép? Nếu bị cấm hãy đưa ra lý do.

(a) $\pi^- + p \to K^- + \Sigma^+$

(b) $d + d \to {}^4He + \pi^0$

(c) $K^- + p \to \Xi^- + K^+$

Tỉ số của tiết diện tương tác $\sigma(p+p \to \pi^+ + d)/\sigma(n+p \to \pi^0 + d)$ với cùng năng lượng khối tâm bằng bao nhiêu?

(*Chicago*)

Lời giải:

(a) Bị cấm vì $\Delta I_3 = (-1/2) + (+1) - (-1) - 1/2 = 1 \neq 0$, $\Delta S = (-1) + (-1) - 0 - 0 = -2 \neq 0$.

(b) Bị cấm vì $I(d) = I({}^4He) = 0$, $I(\pi^0) = 1$, $\Delta I = 1 \neq 0$

(c) Được phép bởi tương tác mạnh vì Q, I, I_3, và S bảo toàn.

Sự khác nhau về tiết diện tương tác giữa $pp \to \pi^+d$ và $np \to \pi^0d$ chỉ do spin đồng vị. Sử dụng biểu diễn liên kết đối với spin đồng vị và chú ý tính trực giao của hàm sóng spin đồng vị ta có

$$|pp\rangle = \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = |1, 1\rangle\,,$$

$$|\pi^+d\rangle = |1, 1\rangle\,|0, 0\rangle = |1, 1\rangle\,,$$

$$|np\rangle = \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1, 0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|0, 0\rangle\,,$$

$$|\pi^0d\rangle = |1, 0\rangle\,|0, 0\rangle = |1, 0\rangle\,.$$

Do đó yếu tố ma trận của $pp \to \pi^+ d$ là

$$\langle \pi^+ d|\hat{H}|pp\rangle \propto \langle 1,1|\hat{H}|1,1\rangle = \langle 1|\hat{H}|1\rangle = a_1 .$$

Một cách tương tự yếu tố ma trận của $np \to \pi^0 d$ là

$$\langle \pi^0 d|\hat{H}|np\rangle \propto \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1,0|\hat{H}|1,0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1,0|\hat{H}|0,0\rangle$$
$$\propto \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1,0|\hat{H}|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1|\hat{H}|1\rangle = \frac{a_1}{\sqrt{2}},$$

vì $\langle 1,0|\hat{H}|0,0\rangle = 0$ và tương tác mạnh không phụ thuộc vào I_3. Do đó,

$$\frac{\sigma(pp \to \pi^+ d)}{\sigma(np \to \pi^0 d)} = \frac{|\langle \pi^+ d|\hat{H}|pp\rangle|^2}{|\langle \pi^0 d|\hat{H}|np\rangle|^2} = \frac{a_1^2}{\frac{1}{2}a_1^2} = 2 .$$

3026

Cho hai momen động lượng $\mathbf{J}_1$ và $\mathbf{J}_2$ (ví dụ **L** và **S**) và các hàm sóng tương ứng.

(a) Tính hệ số Clebsch-Gordan cho trạng thái $\mathbf{J} = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2$, $M = m_1 + m_2$, trong đó $j_1 = 1$ và $j_2 = 1/2$, $J = 3/2$, $M = 1/2$, với các giá trị có thể của m_1 và m_2.

(b) Xét các phản ứng sau

(1) $\pi^+ p \to \pi^+ p$,

(2) $\pi^- p \to \pi^- p$,

(3) $\pi^- p \to \pi^0 n$.

Những phản ứng này bảo toàn số spin đồng vị có thể xảy ra trong trạng thái spin đồng vị $I = 3/2$ (cộng hưởng Δ) hoặc trạng thái $I = 1/2$ (cộng hưởng N^*). Tính tỉ số của các tiết diện $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3$ với năng lượng tương ứng với cộng hưởng Δ và cộng hưởng N^*. Ở một năng lượng cộng hưởng ta có thể bỏ qua hiệu ứng của trạng thái spin đồng vị khác. Chú ý rằng pion là trạng thái spin đồng vị $I_\pi = 1$ và nucleon là một trạng thái spin $I_n = 1/2$.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Trước hết xét

$$\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle = |1,1\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle .$$

Tác dụng toán tử

$$L_- = J_x - iJy = (j_{1x} - ij_{1y}) + (j_{2x} - ij_{2y}) \equiv L_-^{(1)} + L_-^{(2)}$$

lên biểu thức trên

$$L_-\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle = L_-^{(1)}|1,1\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + L_-^{(2)}|1,1\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle,$$

Do

$$L_-|J,M\rangle = \sqrt{J(J+1) - M(M-1)}|J,M-1\rangle,$$

nên ta có

$$\sqrt{3}\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{2}|1,0\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + |1,1\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle,$$

hay

$$\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|1,0\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|1,1\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle.$$

(b) Chúng ta có thể kết hợp mỗi cặp ban đầu trong không gian spin đồng vị

$$|\pi^+p\rangle = |1,1\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle,$$

$$|\pi^-p\rangle = |1,-1\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle,$$

$$|\pi^0n\rangle = |1,0\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle.$$

Do trong tương tác mạnh không phụ thuộc và diện tích nên ta có thể viết biểu thức thành

$$\left\langle\frac{3}{2},m_j|\hat{H}|\frac{3}{2},m_i\right\rangle = a_1,$$

$$\left\langle\frac{1}{2},m_j|\hat{H}|\frac{1}{2},m_i\right\rangle = a_2,$$

biểu thức này không phụ thuộc vào m. Hơn nữa tính trực giao của các hàm sóng cho ta

$$\left\langle\frac{1}{2}|\hat{H}|\frac{3}{2}\right\rangle = 0.$$

Do đó tiết diện truyền là

$$\sigma_1(\pi^+p \to \pi^+p) \propto \left|\left\langle \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right| \hat{H} \left|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle\right|^2 = |a_1|^2 ,$$

$$\sigma_2(\pi^-p \to \pi^-p) \propto \left|\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right| + \sqrt{\frac{1}{3}}\left\langle \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right|\right)\right.$$

$$\left.\hat{H}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\left|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle\right)\right|^2$$

$$= \left|\frac{2}{3}a_2 + \frac{1}{3}a_1\right|^2 ,$$

$$\sigma_3(\pi^-p \to \pi^0n) \propto \left|\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right| + \sqrt{\frac{1}{3}}\left\langle \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right|\right)\right.$$

$$\left.\hat{H}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle\right)\right|^2$$

$$= \left|-\frac{\sqrt{2}}{3}a_2 + \frac{\sqrt{2}}{3}a_1\right|^2 ,$$

Khi có cộng hưởng Δ thì ta có $|a_1| \gg |a_2|$, do vậy có thể bỏ qua ảnh hưởng của a_2. Do đó ta có

$$\sigma_1 \propto |a_1|^2 ,$$

$$\sigma_2 \propto \frac{1}{9}|a_1|^2 ,$$

$$\sigma_3 \propto \frac{2}{9}|a_1|^2 ,$$

và ta thu được tỉ số $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = 9 : 1 : 2$.

Khi cộng hưởng N^* ta có $|a_1| \ll |a_2|$, và ta có

$$\sigma_1 \approx 0 ,$$

$$\sigma_2 \propto \frac{4}{9}|a_2|^2 ,$$

$$\sigma_3 \propto \frac{2}{9}|a_2|^2 ,$$

$$\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = 0 : 2 : 1 .$$

3027

Tính tỉ số tốc độ phân rã sau đây và nói rõ đã sử dụng quy tắc lựa chọn nào ("cơ bản" hay "hiện tượng" luận). Đồng thời chỉ ra phân rã là tương tác mạnh, yếu, hay điện từ (không cần chú ý tới tỉ số). Nếu có thể, hãy trình bày câu trả lời theo các hằng số cơ bản G, α, θ_c, m_K, ... Giả thiết rằng tương tác mạnh có cường độ đơn vị (nghĩa là hằng số liên kết không thứ nguyên đơn vị).

(a) $\dfrac{K^+ \to \pi^+\pi^0}{K_s^0 \to \pi^+\pi^-}$

(b) $\dfrac{\rho^0 \to \pi^0\pi^0}{\rho^0 \to \pi^+\pi^-}$

(c) $\dfrac{K_L^0 \to \mu^+\mu^-}{K_L^0 \to \pi^0\pi^0}$

(d) $\dfrac{K^+ \to \pi^+\pi^+e^-\nu}{K^+ \to \pi^+\pi^-e^+\nu}$

(e) $\dfrac{\Omega^- \to \Sigma^-\pi^0}{\Omega^- \to \Xi^0\pi^-}$

(f) $\dfrac{\eta^0 \to \pi^+\pi^-}{\eta^0 \to \pi^+\pi^-\pi^0}$

(g) $\dfrac{\Lambda^0 \to K^-\pi^+}{\Lambda^0 \to p\pi^-}$

(h) $\dfrac{\theta^0 \to \pi^+\pi^-\pi^0}{\omega^0 \to \pi^+\pi^-\pi^0}$

(i) $\dfrac{\Sigma^- \to \Lambda^0\pi^-}{\Sigma^- \to n\pi^-}$

(j) $\dfrac{\pi^- \to e^-\nu}{K^+ \to \mu^+\nu}$

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Xét $K^+ \to \pi^+\pi^0$. Với phân rã yếu không sinh lepton $\Delta I = 1/2$. Do

$I(K) = 1/2$, nên spin đồng vị của hệ 2π phải là 0 hoặc 1. Nguyên lý Pauli tổng quát đòi hỏi hàm sóng toàn phần của hệ 2π phải đối xứng. Do spin của K là 0, sự bảo toàn phần đòi hỏi $J(2\pi) = J(K) = 0$. Khi đó, do spin của π là 0, suy ra $l(2\pi) = 0$. Như thế thành phần spin và không gian của hàm sóng của hệ 2π cả hai đều đối xứng, do đó hàm sóng đồng vị spin cũng phải đối xứng. Theo đó spin đồng vị của hệ 2π có thể có hai giá trị, 0 hoặc 2. Do vậy $I(\pi^+\pi^0) = 0$. Tuy nhiên, $I_3(\pi^+\pi^0) = 1 + 0 = 1$. Do quy tắc $I_3 \leq I$ bị vi phạm, nên phân rã bị cấm. Mặt khác, $K_s^0 \to \pi^+\pi^-$ có thể xảy ra do thỏa mãn quy tắc $\Delta I = 1/2$.

Do vậy,

$$\frac{K^+ \to \pi^+\pi^-}{K_s^0 \to \pi^+\pi^-} \ll 1\,.$$

Chú ý rằng tỉ số biên độ xác suất với $\Delta I = 1/2, 3/2$ trong phân rã K, A_0 và A_2, có thể rút gọn thành

$$\frac{\Gamma(K^+ \to \pi^+\pi^0)}{\Gamma(K_s^0 \to \pi^+\pi^-)} = \frac{3}{4}\left(\frac{A_2}{A_0}\right)^2 \approx 1,5 \times 10^{-3}\,.$$

Suy ra

$$\frac{A_2}{A_0} \approx 4,5\%\,.$$

(b) Xét kiểu phân rã $\rho^0 \to \pi^+\pi^-$, $\pi^0\pi^0$. $\rho^0 \to \pi^+\pi^-$ là một phân rã mạnh được phép, trong khi đó đối với $\rho^0 \to \pi^0\pi^0$, các hạt C là $C(\rho^0) = -1$, $C(\pi^0\pi^0) = 1$, và phân rã này bị cấm bởi định luật bảo toàn tính chẵn lẻ của C. Do vậy

$$\frac{\rho^0 \to \pi^0\pi^0}{\rho^0 \to \pi^+\pi^-} \approx 0\,.$$

(c) Do K_L^0 không phải là trạng thái riêng của CP, $K_L^0 \to \pi^0\pi^0$ có một tỉ số nhánh khác không xấp xỉ bằng $9,4 \times 10^{-4}$. Phân rã $K_L^0 \to \mu^+\mu^-$, một phân rã yếu bậc 2, có xác suất thậm chí còn thấp hơn $K_L^0 \to \pi^0\pi^0$. Nó thực tế là một phân rã dòng yếu trung hòa biến đổi vị. Do vậy ta có

$$1 \gg \frac{K_L^0 \to \mu^+\mu^-}{K_L^0 \to \pi^0\pi^0} \approx 0\,.$$

Thực nghiệm chỉ ra rằng tỉ số $\approx 10^{-8}/10^{-3} = 10^{-5}$.

(d) $K^+ \to \pi^+\pi^+e^-\bar{\nu}$ là một phân rã yếu bán lepton và do vậy ΔQ phải ΔS, trong đó ΔQ là biến thiên điện tích hadron. Do $\Delta S = 1$, $\Delta Q = -1$, nên phản ứng bị cấm. Nhưng do $K^- \to \pi^+\pi^-e^-\bar{\nu}$ lại là một phân rã được phép,

$$\frac{K^+ \to \pi^+\pi^+e^-\bar{\nu}}{K^- \to \pi^+\pi^-e^-\bar{\nu}} = 0\,.$$

(e) Trong phân rã $\Omega^- \to \Sigma^-\pi^0$, $\Delta S = 2$. Do đó nó bị cấm. Do $\Omega^- \to \Xi^0\pi^-$ là cho phép bởi tương tác yếu nên

$$\frac{\Omega^- \to \Sigma^-\pi^0}{\Omega^- \to \Xi^0\pi^-} = 0\,.$$

(f) Xét $\eta^0 \to \pi^+\pi^-$. η^0 has $J^P = 0^-$ và là phân rã điện từ ($\Gamma = 0,83$ keV). Do J^P của $\pi^\pm$ là 0^-, nên một hệ $\pi^+\pi^-$ chỉ có thể tạo ra các trạng thái $0^+, 1^-, 2^+$. Vì tính chẵn lẻ được bảo toàn trong phân rã điện từ nên phân rã này bị cấm. Mặt khác, $\eta^0 \to \pi^+\pi^-\pi^0$ là một phân rã điện từ thỏa mãn quy tắc bảo toàn nên ta có

$$\frac{\eta^0 \to \pi^+\pi^-}{\eta^0 \to \pi^+\pi^-\pi^0} = 0\,.$$

(g) $\Lambda^0 \to K^-\pi^+$ là một kiểu phân rã không sinh lepton. Do $\Delta I_3 = 1/2$, $\Delta S = 0$, nên nó bị cấm. $\Lambda^0 \to p\pi^-$ cũng là một phân rã yếu không sinh lepton thỏa mãn $|\Delta S| = 1$, $|\Delta I| = 1/2$, $|\Delta I_3| = 1/2$ nên nó được phép. Do vậy

$$\frac{\Lambda^0 \to K^-\pi^+}{\Lambda^0 \to p\pi^-} = 0\,.$$

(h) Xét $\theta^0 \to \pi^+\pi^-\pi^0$. θ^0 có các phân rã mạnh ($\Gamma = 180$ MeV) và $I^GJ^{PC} = 0^+2^{++}$. Do $G(\pi^+\pi^-\pi^0) = (-1)^3 = -1$, $G(\theta^0) = +1$, tính chẵn lẻ của G không bảo toàn và do đó kiểu phân rã này không được phép. Xét $\omega^0 \to \pi^+\pi^-\pi^0$. Do I^GJ^{PC} của ω^0 là 0^-1^{--}, nên nó được phép. Do vậy

$$\frac{\theta^0 \to \pi^+\pi^-\pi^0}{\omega^0 \to \pi^+\pi^-\pi^0} = 0\,.$$

(i) Xét $\Sigma^- \to \Lambda^0\pi^-$. Do $\Delta S = 0$, nó bị cấm. $\Sigma^- \to n\pi^-$ là một phân rã yếu không sinh lepton được phép. Do vậy

$$\frac{\Sigma^- \to \Lambda^0\pi^-}{\Sigma^- \to n\pi^-} = 0\,.$$

(j) $\pi^- \to e^-\bar{\nu}$ và $K^+ \to \mu^+\nu$ đều là phân rã hai thành phần bán lepton. Với phản ứng đầu, $\Delta S = 0$ và hằng số kết hợp là $G\cos\theta_c$, với phân rã sau $\Delta S = 1$ và hằng số kết hợp là $G\sin\theta_c$, trong đó θ_c là góc Cabbibo. Bằng cách kết hợp các vectơ theo phương bán kính ta được

$$\omega'(\varphi \to l\nu) = \frac{f_\varphi^2 m_l^2 (m_\varphi^2 - m_l^2)^2}{4\pi m_\varphi^3}\,,$$

trong đó f_φ là hằng số kết hợp. Do vậy

$$\begin{aligned}\frac{\pi^- \to e^- \bar{\nu}}{K^+ \to \mu^+ \nu} &= \frac{f_\pi^2 m_e^2 (m_\pi^2 - m_e^2)^2 m_K^3}{f_K^2 m_\mu^2 (m_K^2 - m_\mu^2)^2 m_\pi^3} \\ &= \frac{m_K^3 m_e^2 (m_\pi^2 - m_e^2)^2}{m_\pi^3 m_\mu^2 (m_K^2 - m_\mu^2)^2} \text{cotg}\, ^2\theta_c \\ &= 1,35 \times 10^{-4}\,,\end{aligned}$$

Trong đó sử dụng $\theta_c = 13,1^0$ lấy từ thực nghiệm.

3028

Σ^* là một hyperon không bền khối lượng $m = 1385$ MeV và bề rộng phân rã $\Gamma = 35$ MeV, với tỉ lệ phân nhánh theo kênh $\Sigma^{*+} \to \pi^+\Lambda$ là 88%. Nó có thể được sinh ra trong phản ứng $K^-p \to \pi^-\Sigma^{*+}$, nhưng không có phản ứng $K^+p \to \pi^+\Sigma^{*+}$.

(a) Tìm số lạ của Σ^*? Giải thích cơ sở của phản ứng đã cho.

(b) Phản ứng phân rã Σ^* là mạnh hay yếu? Giải thích.

(c) Spin đồng vị của Σ^* là bao nhiêu? Hãy giải thích dựa vào những thông tin ở trên.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Do Σ^{*+} được sinh ra trong tương tác mạnh $K^-p \to \pi\Sigma^{*+}$, phản ứng này bảo toàn số lạ, nên số lạ của Σ^{*+} bằng của K^-, và bằng, -1. Do $S(K^+) = +1$, phản ứng $K^+p \to \pi^+\Sigma^{*+}$ vi phạm định luật bảo toàn số lạ nên không thể xảy ra.

(b) Độ rộng riêng phần của phân rã $\Sigma^{*+} \to \Lambda\pi^+$ là

$$\Gamma_{\Lambda\pi} = 88\% \times 35 = 30,8 \text{ MeV}\,,$$

tương ứng với thời gian sống

$$\tau_{\Lambda\pi} \approx \frac{\hbar}{\Gamma_{\Lambda\pi}} = \frac{6,62 \times 10^{-22}}{30,8} = 2,15 \times 10^{-23}\ s\,.$$

Do bậc độ lớn của nó là đặc trưng của thời gian tương tác mạnh thông thường, nên phân rã là phân rã mạnh.

(c) Spin đồng vị là được bảo toàn trong tương tác mạnh. Phân rã mạnh $\Sigma^{*+} \to \Lambda\pi^+$ cho thấy rằng, do $I(\Lambda) = I_3(\Lambda) = 0$, nên ta có

$$I(\Sigma^*) = I(\pi) = 1 .$$

3029

Một hạt X có hai kiểu phân rã với tốc độ phân rã riêng phần là $\gamma_1(s^{-1})$ và $\gamma_2(s^{-1})$.

(a) Độ bất định vốn có của khối lượng của X là gì?

(b) Một kiểu phân rã của X là phân rã tương tác mạnh

$$X \to \pi^+ + \pi^+ .$$

Có thể kết luận gì về spin đồng vị của X?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Tốc độ phân rã toàn phần của X là

$$\lambda = \gamma_1 + \gamma_2 .$$

Do vậy thời gian sống trung bình của hạt là

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\gamma_1 + \gamma_2} .$$

Độ bất định vốn có của khối lượng hạt, Γ, được cho bởi nguyên lý bất định $\Gamma\tau \sim \hbar$. Do vậy

$$\Gamma \sim \frac{\hbar}{\tau} = \hbar(\gamma_1 + \gamma_2) .$$

(b) Do $X \to \pi^+\pi^+$ là phân rã mạnh, spin đồng vị được bảo toàn. π^+ có $I = 1$ và $I_3 = +1$. Do đó trạng thái cuối cùng có $I = 2$ hay X có spin đồng vị là 2.

3030

Giả thiết rằng π^- có spin 0 và tính chẵn lẻ riêng âm. Nếu nó bị bắt giữ bởi một hạt nhân đoteri từ một quỹ đạo p theo phản ứng

$$\pi^- + d \to n + n ,$$

Chỉ ra rằng hai nơtron phải ở trong trạng thái đơn bội. Cho spin chẵn lẻ của đơteron là 1^+.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Tính chẵn lẻ của trạng thái ban đầu $\pi^- d$ là

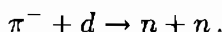
$$P_i = P(\pi^-)P(d)(-1)^l = (-1) \times (+1) \times (-1)^1 = +1 .$$

Do phản ứng là tương tác mạnh nên tính chẵn lẻ dược bảo toàn, và do vậy tính chẵn lẻ của trạng thái cuối cùng là $+1$.

Do tính chẵn lẻ riêng của nơtron là $+1$, nên tính chẵn lẻ của trạng thái cuối nn là $P_f = (+1)^2(-1)^l = P_i = (-1)^1(-1)(+1)$, trong đó l là số lượng tử momen quỹ đạo của chuyển động tương đối giữa hai nơtron trong trạng thái cuối. Do vậy $l = 0, 2, 4, \ldots$. Tuy nhiên, hàm sóng tổng hợp của trạng thái cuối, trong đó có hai fermion giống nhau, phải là phản đối xứng trao đổi. Do l là chẵn, hay hàm sóng quỹ đạo là phản đối xứng trao đổi, nên hàm sóng spin phải là phản đối xứng trao đổi. Do vậy hai nơtron phải ở trong trạng thái spin đơn bội.

3031

Một hạt meson π tích điện âm (một hạt giả vô hướng: spin không và tính chẵn lẻ lẻ) ban đầu bị ràng buộc trong hàm sóng Coulomb năng lượng thấp nhất quanh một đơteron. Nó bị bắt bởi đơteron (một proton và một nơtron trong trạng thái $^3S_1$, và bị chuyển hóa thành một cặp nơtron:



$$\pi^- + d \to n + n .$$

(a) Tìm momen động lượng quỹ đạo của cặp nơtron?

(b) Tìm momen động lượng spin của chúng?

(c) Tìm xác suất để spin của cả hai nơtron đều định hướng ngược với spin của đơteron?

(d) Nếu spin của đơteron ban đầu phân cực 100% theo phương **k**, sự phụ thuộc góc của xác suất phát nơtron (trên một đơn vị góc khối) đối với nơtron có spin ngược với đơteron ban đầu như thế nào (xem hình 3.5). Có thể sử

dụng một vài số hạng đầu tiên của hàm cầu (không chuẩn hóa) sau:

$$Y_0^0 = 1\,,$$

$$Y_1^{\pm 1} = \mp \sin\theta e^{\pm i\phi}\,,$$

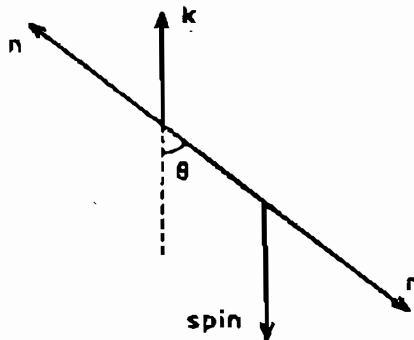
$$Y_1^0 = \cos\theta\,,$$

$$Y_2^{\pm 1} = \mp \sin 2\theta e^{\pm i\phi}\,.$$

(*CUSPEA*)

Lời giải:

(a) Do $J^P(d) = 1^+$, $J^P(\pi^-) = 0^-$, $J^P(n) = \frac{1}{2}^+$, nên định luật bảo toàn momen động lượng cần $J = 1$, bảo toàn tính chẵn lẻ đòi hỏi $(+1)^2(-1)^L = (-1)(+1)(-1)^0$, hay $(-1)^L = -1$ đối với trạng thái cuối.



Hình 3.5

Do nơtron là fecmion nên hàm sóng toàn phần của trạng thái cuối là phản đối xứng. Do vậy $(-1)^L(-1)^{S+1} = -1$, và $L + S$ là một số chẵn. Với hệ hai nơtron $S = 0, 1$. Nếu $S = 0$, thì $L = 0, 2, 4, \ldots$. Nhưng điều này có nghĩa là $(-1)^L = +1$, không thể xảy ra. Nếu $S = 1$, $L = 1, 3, 5, \ldots$, thỏa mãn $(-1)^L = -1$. Bây giờ nếu như $L \geq 3$, thì J không thể bằng 1. Vì vậy cặp nơtron có $L = 1$.

(b) Momen động lượng spin toàn phần là $S = 1$.

(c) Nếu các hạt nơtron có spin ngược chiều với spin của đơteron thì $S_z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$. Khi đó $J_z = L_z + S_z = L_z - 1$. Do $L = 1$, nên $L_z = 0, \pm 1$. Trong cả hai trường hợp, $|\langle 1, L_z - 1|1, 1\rangle|^2 = 0$, hay xác suất xảy ra những trường hợp này là 0.

(d) Hàm sóng cho hệ nơtron-nơtron là

$$\Psi = |1, 1\rangle = C_1 Y_1^1 \chi_{10} + C_2 Y_1^0 \chi_{11} ,$$

Trong đó C_1, C_2 là các hằng số sao cho $|C_1|^2 = |C_2|^2 = 1/2$, và

$$\chi_{10} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow), \qquad \chi_{11} = (\uparrow\uparrow) .$$

Từ tính đối xứng của hàm sóng ở trên và điều kiện chuẩn hóa ta có

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} &= |C_1|^2 (Y_1^1 \chi_{10})^* (Y_1^1 \chi_{10}) \\ &= \frac{1}{2} (Y_1^1)^* Y_1^1 \\ &= \frac{3}{8\pi} \sin^2 \theta . \end{aligned}$$

3032

(a) Hạt η^0có thể được sinh ra bởi sóng s trong phản ứng

$$\pi^- + p \to \eta^0 + n .$$

(Chú ý: không có quá trình $\pi^- + p \to \eta^- + p$ tương ứng)

(b) Trong phân rã η^0 có các kiểu sau đây với xác suất như chỉ ra ở dưới:

$$\begin{aligned} \eta^0 &\to 2\gamma (38\% \text{ của toàn bộ}) \\ &\to 3\pi (30\% \text{ của toàn bộ}) \\ &\to 2\pi (< 0,15\% \text{ của toàn bộ}) . \end{aligned}$$

(c) Khối lượng nghỉ của η^0 là 548,8 MeV.

Hãy mô tả các thí nghiệm/phép đo mà từ đó có thể xác định các sự kiện (a) (b) (c) ở trên. Trên cơ sở của các sự kiện đó, hãy chỉ ra, chính xác đến mức có thể, spin, spin đồng vị và điện tích có thể được suy ra như thế nào?

(*Columbia*)

Lời giải:

Một thí nghiệm với mục tiêu đó bao gồm một chùm π^- có động lượng có thể thay đổi, một bia hyđro, và một hệ dò có độ phân giải không gian và năng

lượng tốt để phát hiện tia γ và các hạt mang điện. Động lượng π^- được điều chỉnh để thu được nhiều sự kiện 2γ và 3π hơn. Năng lượng ngưỡng E_0 của phản ứng được cho bởi

$$(E_0 + m_p)^2 - P_0^2 = (m_\eta + m_n)^2 .$$

Trong đó P_0 là động lượng ngưỡng của π^- tới, hay

$$E_0 = \frac{(m_\eta + m_n)^2 - m_p^2 - m_\pi^2}{2m_p}$$

$$= \frac{(0,5488 + 0,94)^2 - 0,938^2 - 0,14^2}{2 \times 0,938}$$

$$= 0,702 \text{ GeV} = 702 \text{ MeV} ,$$

Cho ta

$$P_0 = \sqrt{E_0^2 - m_\pi^2} \approx 0,688 \text{ GeV}/c = 688 \text{ MeV}/c .$$

Do vậy η^0 chỉ có thể sinh ra nếu động lượng của π^- bằng hoặc lớn hơn 688 MeV/c.

Giả sử khối tâm của hệ $\pi^- p$ chuyển động với vận tốc $\beta_c c$ và đặt $\gamma_c = (1 - \beta_c^2)^{-\frac{1}{2}}$. Kí hiệu các đại lượng trong hệ khối tâm bằng dấu gạch ngang. Sử dụng phép biến đổi Lorentz ta có

$$\bar{P}_0 = \gamma_c(P_0 + \beta_c E_0) .$$

Do $\bar{P}_0 = \bar{P}_p = m_p \gamma_c \beta_c$, nên ta có

$$\beta_c = \frac{P_0}{m_p + E_0} = \frac{688}{702 + 938} = 0,420 ,$$

$$\gamma_c = 1,10 ,$$

Và do đó

$$\bar{P}_0 = \gamma_c(P_0 - \beta_c E_0) = 433 \text{ Mev}/c .$$

Bước sóng de Broglie của chùm tới meson π^- trong hệ khối tâm là

$$\lambda = \frac{\hbar c}{\bar{P}_0 C} = \frac{197 \times 10^{-13}}{433} = 0,45 \times 10^{-13} \text{ cm} .$$

Do bán kính proton $\approx 0,5 \times 10^{-13}$ cm, sóng s đóng vai trò chính trong tương tác $\pi^- p$.

Trong những sản phẩm cuối cùng của phản ứng, chúng ta có thể đo phổ khối lượng bất biến của sản phẩm của 2γ. Nếu ta tìm được một đỉnh khối lượng bất biến tại 548,8 MeV, hoặc đối với các sự kiện 6γ, thi ba cặp của γ với đỉnh khối lượng bất biến tại m_{π}^{0}, hoặc khối lượng bất biến toàn phần của sản phẩm $6\ \gamma$ có đỉnh tại 548,8 MeV, chúng ta có thể kết luận rằng hạt η^0 đã được sinh ra. Chúng ta cũng có thể xác định các sự kiện $\pi^+\pi^-\pi^0$. Tất cả những điều này chỉ ra sự xuất hiện của

$$\pi^- + p \to n + \eta^0$$

$$\eta^0 \to 2\gamma$$

$$\eta^0 \to 3\pi^0,\ \pi^+\pi^-\pi^0$$

Nếu phản ứng $\pi^- + p \to p + \eta^-$ xảy ra thì có xảy ra phân rã η^- theo quá trình

$$\eta^- \to \pi^+\pi^-\pi^- .$$

Thực nghiệm cho thấy chưa từng quan sát được sự kiện $\pi^+\pi^-\pi^-$.

Các số lượng tử của η^0 có thể thu được như sau.

Spin: Do η^0 có thể được sinh ra bằng cách sử dụng sóng s, bảo toàn momen động lượng đòi hỏi spin của η^0 chỉ có thể bằng 0 hoặc 1. Tuy nhiên, do một vectơ meson có spin 1 không thể phân rã thành các sản phẩm $2\ \gamma$ nên $J(\eta^0) = 0$.

Tính chẵn lẻ: Các tỉ số phân nhánh gợi ý rằng η^0 có thể phân rã thông qua tương tác điện từ thành các sản phẩm $2\ \gamma$ thông qua tương tác mạnh thành các sản phẩm $3\ \pi$, nhưng tỉ số phân nhánh của phân rã 2π là rất nhỏ. Từ phân rã 3π ta tìm được

$$P(\eta^0) = P^3(\pi)(-1)^{l+l'} ,$$

trong đó l và l' là momen động lượng quỹ đạo tương ứng của hệ 2π và momen động lượng quỹ đạo tương đối của π thứ 3 so với hệ 2π. Do $J(\eta^0) = 0$, bảo toàn momen động lượng toàn phần đòi hỏi $l' = -l$ và vì vậy

$$P(\eta^0) = (-1)^3 = -1 .$$

Spin đồng vị: Bởi vì η^- không xuất hiện nên η^0 hình thành một đơn bội spin đồng vị. Do vậy $I(\eta^0) = 0$.

Điện tích: Bảo toàn điện tích cho ta $Q(\eta^0) = 0$. Thêm vào đó, từ kênh phân rã 2γ ta có thể suy ra rằng $C(\eta^0) = +1$.

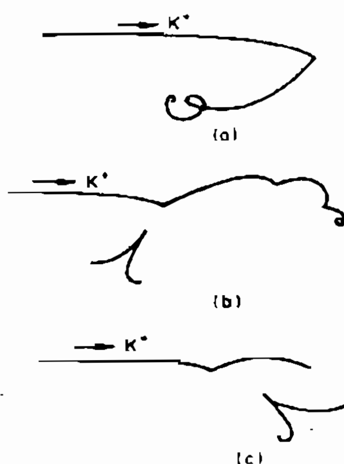
Tóm lại, các số lượng tử của η^0 là $I(\eta^0) = 0$, $Q(\eta^0) = 0$, $J^{PC}(\eta^0) = 0^{-+}$. Giống như các meson π và K, η^0 là một meson giả vô hướng, và nó hình thành nên một đơn một đơn bội spin đồng vị.

3033

Một chùm meson K^+ hoặc K^- đi vào từ bên trái của một buồng bọt nằm trong từ trường đều $B \approx 12$ kGs vuông góc với cửa sổ quan sát.

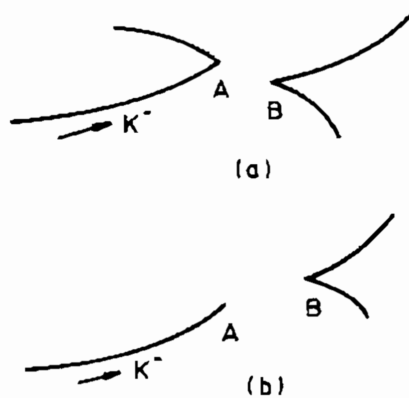
(a) Hãy kí hiệu tất cả các sản phẩm (π^+, π^-, p, v.v) của phân rã K^+ trong bức tranh buồng bọt trong hình 3.6 và viết phương trình phản ứng đầy đủ của K^+ cho mỗi hình nếu có thể.

(b) Trong hình 3.7 hạt K^- bay vào rồi đứng yên trong buồng bọt. Kí hiệu tất cả vết của các hạt đi kèm theo với K^- và xác định các hạt trung hòa điện bằng các vết dạng nét đứt. Viết các phương trình phản ứng đầy đủ cho tương tác K^- cho mỗi hình nếu có thể.



Hình 3.6

(c) Giả thiết rằng các vết trong hình 3.7(a) và 3.7(b) đều nằm trong mặt phẳng hình vẽ, xác định biểu thức của thời gian sống cho hạt trung hòa và khối lượng của nó.



Hình 3.7

(*Chicago*)

Lời giải:

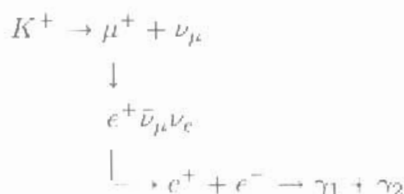
(a) Các kiểu và tỉ số phân nhánh của phân ra K^+ là

$$\begin{aligned} K^+ \to\ & \mu^+\nu_\mu && 63,50\%, \\ & \pi^+\pi^0 && 21,16\%, \\ & \pi^+\pi^+\pi^- && 5,59\%, \\ & \pi^+\pi^0\pi^0 && 1,73\%, \\ & \mu^+\nu_\mu\pi^0 && 3,20\%, \\ & e^+\nu_e\pi^0 && 4,82\%. \end{aligned}$$

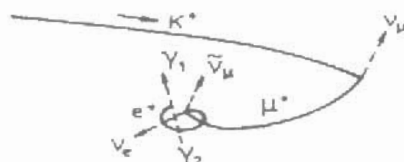
Sản phẩm từ phân rã K^+ bao gồm 3 loại hạt mang điện tích dương π^+, μ^+, e^+, một loại hạt mang điện tích âm π^-, và một số hạt trung hòa điện π^0, ν_μ, ν_e. Khi π^+ được sinh ra, sẽ có 4 vết nối thẳng của các hạt mang điện dương sinh ra từ $K^+ \to \pi^+ \to \mu^+ \to e^+$. Khi μ^+ hoặc e^+ được sinh ra thì sẽ có 3 hoặc 2 vết nối thẳng của các hạt mang điện dương lần lượt tạo ra bởi $K^+ \to \mu^+ \to e^+$ hoặc $K^+ \to e^+$. Khi π^0 được sinh ra, do phân rã $\pi^0 \to 2\gamma (\tau \approx 10^{-16}\ s)$ và hệ quả là việc sinh cặp electron-positron của tia γ, ta có thể thấy vết của e^+, e^- xuất hiện như hai nhánh cây.

Phân tích hình 3.6(a) ta có hình 3.8. Phân rã của K^+ có thể tạo ra hoặc $\mu^+\nu$ hoặc $\mu^+\gamma\pi^0$. Do xác suất của trường hợp đầu tiên là lớn hơn rất nhiều

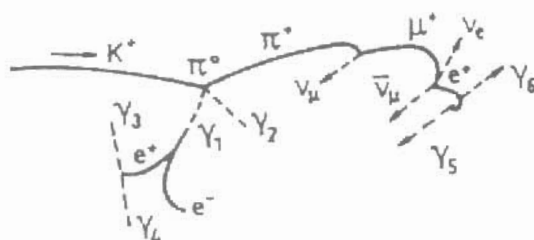
nên ta giả sử rằng nó là điều xảy ra. Khi đó chuỗi sự kiện sẽ như sau:



Để ý sự kết thúc đột ngột của vết e^+, nguyên nhân do sự hủy cặp với của positron với một electron của của buồng bọt sinh ra 2 tia γ ngược nhau.

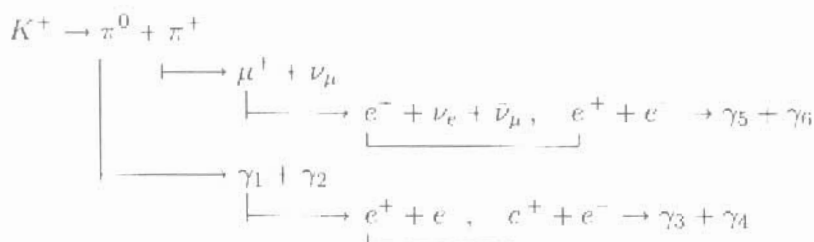


Hình 3.8



Hình 3.9

Phân tích hình 3.6(b) ta có hình 3.9. Chuỗi sự kiện như sau



hay

$$\begin{array}{l} K^+ \to \pi^0 + \pi^0 + \pi^+ \\ \qquad\qquad\qquad\quad \longmapsto \mu^+ + \nu_\mu \\ \qquad\qquad\quad \longmapsto \gamma + \gamma \\ \qquad \longmapsto \gamma + \gamma \end{array}$$

Với hệ quả là sự phân rã μ^+ và sự tạo cặp tia γ.

Hình 3.10

Để ý rằng bởi vì thời gian sống ngắn nên π^0 phân rã gần như ngay lập tức sau khi được sinh ra. Từ hình 3.6(c) ta có hình 3.10.

Chuỗi sự kiện thể hiện như sau:

$$\begin{array}{l} K^+ \to \nu_e + e_1^+ + \pi^0 \\ \qquad\qquad\quad \longmapsto \gamma_3 + \gamma_4 \\ \qquad\qquad\qquad\quad \longmapsto e_2^+ + e^-, \quad e_2^+ + e^- \to \gamma_5 + \gamma_6 \\ \qquad \longmapsto e_1^+ + e^- \to \gamma_1 + \gamma_2 \end{array}$$

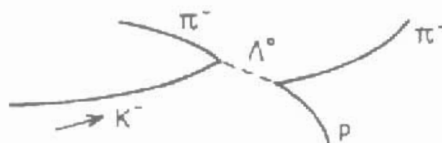
Hình 3.7(a) có thể giải thích như sau:

$$\begin{array}{l} K^- + n \to \Lambda^0 + \pi^- \\ \qquad\qquad\quad \longmapsto p + \pi^- \end{array}$$

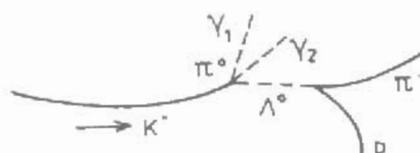
Các vết được kí hiệu như hình 3.11 dưới đây:

Hình 3.7(b), được giải thích như sau

$$\begin{array}{l} K^- + p \to \Lambda^0 + \pi^0 \\ \qquad\qquad\qquad \longmapsto \gamma + \gamma \\ \qquad\qquad \longmapsto p + \pi^- \end{array}$$



Hình 3.11



Hình 3.12

Hình 3.12 thể hiện các vết được kí hiệu. Để ý rằng Λ^0 có thời gian sống $\sim 10^{-10}$ s, đủ để đi qua một quãng đường đáng kể trong buồng bọt.

(c) Để xác định khối lượng và thời gian sống của hạt trung hòa Λ^0, ta đo chiều dài của vết của hạt trung hòa và góc mà nó tạo với vết của p và π^-, θ_p và θ_π, và bán kính cong của quỹ đạo của, R_p và R_π, p và π^-. Khi chú ý tới lực tác dụng ta thu được động lượng của điện tích e chuyển động vuông góc với từ trường có mật độ thông lượng B như sau

$$P = eBR\,,$$

Trong đó R là bán kính cong của vết. Với e tính bằng C, B tính bằng T, R tính bằng m, ta có

$$P = eBRc\left(\frac{\text{joule}}{c}\right) = \left(\frac{1,6\times10^{-19}\times3\times10^{8}}{1,6\times10^{-19}\times10^{9}}\right)BR\left(\frac{\text{GeV}}{c}\right)$$

$$= 0.3BR\left(\frac{\text{GeV}}{c}\right).$$

Động lượng P_p, P_π của p và π^- từ phân rã Λ^0 có thể xác định từ bán kính cong của vết.

Do $(\Sigma E)^2 - (\Sigma P)^2$ là bất biến nên ta có

$$m_\Lambda^2 = (E_p + E_\pi)^2 - (\mathbf{P}_p + \mathbf{P}_\pi)^2\,,$$

Trong đó m_Λ là khối lượng nghỉ của Λ^0.

Do

$$E_p^2 = P_p^2 + m_p^2 ,$$

$$E_\pi^2 = P_\pi^2 + m_\pi^2 ,$$

nên ta có

$$m_\Lambda = \sqrt{m_p^2 + m_\pi^2 + 2E_pE_\pi - 2P_\pi P_p \cos(\theta_p + \theta_\pi)} .$$

Năng lượng và momen động lượng của hạt Λ^0 được cho bởi

$$E_\Lambda = E_p + E_\pi ,$$

$$P_\Lambda = P_p \cos\theta_p + P_\pi \cos\theta_\pi .$$

Nếu quãng đường đi của Λ là l, thì thời gian sống trong phòng thí nghiệm của nó là is $\tau = \frac{l}{\beta c}$, và thời gian sống riêng của nó là

$$\tau_0 = \frac{l}{\gamma\beta\tau} = \frac{lm_\Lambda}{P_\Lambda} = l(P_p\cos\theta_p + P_\pi\cos\theta_\pi)^{-1}$$

$$\times [m_p^2 + m_\pi^2 + 2E_pE_\pi - 2P_\pi P_p \cos(\theta_p + \theta_\pi)]^{1/2} .$$

3034

Phổ khối lượng bất biến của Λ^0 và π^+ trong phản ứng $K^- + p \to \Lambda^0 + \pi^+ + \pi^-$ có một đỉnh tại 1385 MeV với độ rộng là 50 MeV. Nó được gọi là Y_1^*. Phổ khối lượng bất biến $\Lambda^0\pi^-$ từ cùng một phản ứng (nhưng khác sự kiện) cũng cho đỉnh tương tự.

(a) Từ những dữ liệu trên xác định số lạ, siêu tích và spin đồng vị của Y_1^*.

(b) Bằng chứng chỉ ra rằng sản phẩm $\Lambda^0 + \pi^+$ từ một Y_1^* nằm trong trạng thái p tương đối của momen động lượng. Tìm các giá trị spin J có thể gán cho Y_1^*? Tìm tính chẵn lẻ nội tại của nó. (Gợi ý: tính chẵn lẻ nội tại của Λ^0 là $+$ và của π^+ là $-$).

(c) Còn kiểu phân rã mạnh nào của Y_1^* hay không?

(Columbia)

Lời giải:

(a) Trạng thái cộng hưởng Y_1^* với độ rộng $\Gamma = 50$ MeV có thời gian sống $\tau = h/\Gamma = 6.6 \times 10^{-22}/50 = 1.3 \times 10^{-23}$ s. Thang thời gian chỉ ra rằng Y_1^* phân rã thông qua tương tác mạnh, và do vậy số lạ S, siêu tích

Y, spin đồng vị I và thành phần z I_3 của nó bảo toàn. Do vậy ta có

$$S(Y_1^*) = S(\Lambda^0) + S(\pi^+) = -1 + 0 = -1\,.$$

$$Y(Y_1^*) = Y(\Lambda^0) + Y(\pi^+) = 0 + 0 = 0\,,$$

$$I(Y_1^*) = I(\Lambda^0) + I(\pi^-) = 0 + 1 = 1\,,$$

$$I_3(Y_1^*) = I_3(\Lambda^0) + I_3(\pi^+) = 0 + 1 = 1\,.$$

Y_1^* thực tế là một bội ba spin đồng vị, ba trạng thái của nó là Y_1^{*+}, Y_1^{*0}, và Y_1^{*-}. Đỉnh cộng hưởng của $\Lambda^0\pi^-$ tương ứng với Y_1^{*-}.

(b) Λ^0 có spin $J_\Lambda = 1/2$, π^+ có spin $J_\pi = 0$. Chuyển động tương đối là một trạng thái p, do vậy $l = 1$. Khi đó $J_{Y_1^*} = 1/2 + 1$, các giá trị có thể là 1/2 và 3/2. Tính chẵn lẻ nội tại của Y_1^* là $P(Y_1^*) = P(\pi)P(\Lambda)(-1)^l = (-1)(1)(-1) = 1$.

(c) Một kênh phân rã mạnh khác có thể là

$$Y_1^* \to \Sigma\pi\,.$$

Do tính chẵn lẻ riêng của Σ là $(+1)$, của π là (-1), nên các hạt được phát ra nằm trong trạng thái p tương đối.

3035

Xét các phân rã hyperon yếu không sinh lepton

$$\Lambda^0 \to p\pi^-$$

$$\Lambda^0 \to n\pi^0$$

$$\Sigma^- \to n\pi^-$$

$$\Sigma^+ \to p\pi^0$$

$$\Sigma^+ \to n\pi^+$$

$$\Xi^- \to \Lambda^0\pi$$

$$\Xi^0 \to \Lambda^0\pi^0$$

Với giả thiết các phân rã yếu $\Delta S = 1$ này thỏa mãn quy tắc $\Delta I = 1/2$, sử

dụng bảng thích hợp để tìm các giá trị x, y, z, được định nghĩa dưới đây

$$x = \frac{A(\Lambda^0 \to p\pi^-)}{A(\Lambda^0 \to n\pi^0)},$$

$$y = \frac{A(\Sigma^+ \to \pi^+ n) - A(\Sigma^- \to \pi^- n)}{A(\Sigma^+ \to \pi^0 p)},$$

$$z = \frac{A(\Xi^0 \to \Lambda^0\pi^0)}{A(\Xi^- \to \Lambda^0\pi^-)},$$

Trong đó A kí hiệu biên độ chuyển mức.

(*Columbia*)

Lời giải:

Do phân rã không sinh lepton của hyperon cần $\Delta I = 1/2$, nên ta có thể đưa ra một "hạt ảo" a có $I = \frac{1}{2}$, $I_3 = -\frac{1}{2}$, và kết hợp hyperon với a trong đáp ứng spin đồng vị

$$|\Lambda^0, a\rangle = |0,0\rangle\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle = \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle,$$

$$|\Sigma^-, a\rangle = |1,-1\rangle\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle = \left|\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle,$$

$$|\Sigma^+, a\rangle = |1,1\rangle\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle,$$

$$|\Xi^0, a\rangle = \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}|1,0\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}|0,0\rangle,$$

$$|\Xi^-, a\rangle = \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle = |1,-1\rangle.$$

Tương tự ta tìm các hàm sóng spin đồng vị cho trạng thái cuối

$$|\pi^-, p\rangle = |1,-1\rangle\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\left|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle,$$

$$|\pi^0, p\rangle = |1,0\rangle\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle,$$

$$|\pi^+, n\rangle = |1, 1\rangle\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle,$$

$$|\pi^0, n\rangle = |1, 0\rangle\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle,$$

$$|\pi^-, n\rangle = |1, -1\rangle\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle = \left|\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle,$$

$$|\Lambda^0, \pi^0\rangle = |0, 0\rangle|1, 0\rangle = |1, 0\rangle,$$

$$|\Lambda^0, \pi^-\rangle = |0, 0\rangle|1, -1\rangle = |1, -1\rangle.$$

Các hệ số có thể được rút ra từ các bảng Clebsch-Gordan. Do vậy biên độ chuyển tiếp là

$$A_1(\Lambda^0 \to n\pi^0) = \sqrt{\frac{1}{3}}M_{1/2}$$

$$A_2(\Lambda^0 \to p\pi^-) = -\sqrt{\frac{2}{3}}M_{1/2},$$

với

$$M_{1/2} = \left\langle\frac{1}{2}\right|H_w\left|\frac{1}{2}\right\rangle.$$

Do đó

$$x = \frac{A_2}{A_1} = -\sqrt{2}.$$

Tương tự ta có

$$A_3(\Sigma^- \to \pi^- n) = M_{3/2},$$

$$A_4(\Sigma^+ \to \pi^0 p) = \sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{2}{3}}M_{3/2} - \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{1}{3}}M_{1/2} = \frac{\sqrt{2}}{3}(M_{3/2} - M_{1/2}),$$

$$A_5(\Sigma^+ \to \pi^+ n) = \sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{1}{3}}M_{3/2} + \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{2}{3}}M_{1/2} = \frac{1}{3}(M_{3/2} + 2M_{1/2}),$$

với

$$M_{3/2} = \left\langle\frac{3}{2}\right|H_\omega\left|\frac{3}{2}\right\rangle.$$

Vì vậy

$$y = \frac{A_5 - A_3}{A_4} = \frac{M_{3/2} + 2M_{1/2} - 3M_{3/2}}{\sqrt{2}(M_{3/2} - M_{1/2})} = -\sqrt{2}.$$

Ta cũng có

$$A_6(\Xi^0 \to \Lambda^0\pi^0) = \sqrt{\frac{1}{2}}M_1\,,$$

$$A_7(\Xi^- \to \Lambda^0\pi^-) = M_1$$

với

$$M_1 = \langle 1|H_\omega|1\rangle\,.$$

Suy ra

$$z = \frac{A_6}{A_7} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

3036

(a) Nguyên lý của sự cân bằng chi tiết là nằm ở tính hiệu lực của sự bất biến nghịch đảo thời gian và giúp liên hệ tiết diện của một phản ứng cho trước $a+b \to c+d$ với tiết diện của phản ứng nghịch $c+d \to a+b$. Gọi $\sigma_I(W)$ là tiết diện cho phản ứng

$$\gamma + p \to \pi^+ + n$$

ở năng lượng khối tâm toàn phần W, trong đó lấy tích phân trên toàn bộ góc tán xạ, lấy tổng theo spin trạng thái cuối, và lấy trung bình theo spin ban đầu. Gọi $\sigma_{II}(W)$ là tiết diện định nghĩa tương tự, ở cùng một năng lượng khối tâm, cho

$$\pi^+ + n \to \gamma + p\,.$$

Gọi μ là khối lượng pion, m là khối lượng nucleon (bỏ quả sự sai khác nhỏ giữa khối lượng n và p). Cho trước $\sigma_I(W)$, nguyên lý cân bằng chi tiết dự đoán gì về $\sigma_{II}(W)$?

(b) Đối với phản ứng II, đâu là giá trị ngưỡng $W_{\text{ngưỡng}}$, và $\sigma_{II}(W)$ thay đổi theo W như thế nào ngay trên ngưỡng?

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Để đơn giản, kí hiệu trạng thái (a,b) là α và trạng thái (c,d) là β. Gọi $\sigma_{\alpha\beta}$ là tiết diện của quá trình

$$a + b \to c + d$$

Và $\sigma_{\beta\alpha}$ là tiết diện của quá trình ngược

$$c + d \to a + b\,.$$

Nếu bất biến T là đúng, thì khi phản ứng thuận và phản ứng nghịch có cùng năng lượng W trong hệ quy chiếu khối tâm, $\sigma_{\alpha\beta}$ và $\sigma_{\beta\alpha}$ liên hệ bởi

$$\frac{\sigma_{\alpha\beta}}{\sigma_{\beta\alpha}} = \frac{P_\beta^2(2I_c+1)(2I_d+1)}{P_\alpha^2(2I_a+1)(2I_b+1)},$$

đó chính là nguyên lý cân bằng chi tiết. Ở đây P_α là động lượng tương đối của kênh tới của phản ứng $a+b\to c+d$, P_β là động lượng của kênh tới của phản ứng nghịch, I_a, I_b, I_c, I_d tương ứng là spin của a, b, c, d.

Đối với phản ứng $\gamma+p\to\pi^++n$, trong hệ quy chiếu khối tâm của kênh tới gọi động lượng của γ là P_γ, năng lượng của proton là E_p. Khi đó $W = E_\gamma+E_p$. Do γ có khối lượng nghỉ bằng không nên ta có,

$$E_\gamma^2 - P_\gamma^2 = 0\,,$$

hay

$$(W-E_p)^2 - P_\gamma^2 = 0\,.$$

Với $P_\gamma = P_p$, $E_p^2 - P_p^2 = m^2$, ta có

$$E_p = \frac{W^2+m^2}{2W}\,.$$

Do đó động lượng tương đối là

$$P_\alpha^2 = P_\gamma^2 = E_p^2 - m^2 = \frac{W^2-m^2}{2W}\,.$$

Đối với phản ứng nghịch $\pi^+ + n\to\gamma+p$, trong hệ quy chiếu khối tâm gọi năng lượng của π^+ là E_π, động lượng của nó là P_π, và năng lượng của nơtron là E_n, khi đó do $W = E_\pi + E_n$, ta có

$$(W-E_n)^2 - E_\pi^2 = 0\,.$$

Với $P_\pi = P_n$, $E_n^2 = P_\pi^2 + m^2$, $E_\pi^2 = P_\pi^2+\mu^2$, ta có

$$E_n = \frac{W^2+m^2-\mu^2}{2W}\,,$$

và do vậy

$$P_\beta^2 = P_\pi^2 = E_n^2 - m^2 = \frac{(W^2+m^2-\mu^2)^2 - 4W^2m^2}{4W^2}\,.$$

Ta có $I_\gamma = 1$, $I_p = 1/2$, $I_n = 1/2$, $I_\pi = 0$. Tuy nhiên do photon chỉ có phân cực tròn phải hoặc trái, nên $2I_\gamma + 1$ có thể thay bằng 2. Do vậy

$$\frac{\sigma_I(W)}{\sigma_{II}(W)} = \frac{P_\beta^2(2I_\pi + 1)(2I_n + 1)}{P_\alpha^2(2I_\gamma + 1)(2I_p + 1)} = \frac{P_\beta^2}{2P_\alpha^2},$$

hay

$$\sigma_{II}(W) = \frac{(W^2 - m^2)^2}{(W^2 + m^2 - \mu^2)^2 - 4W^2m^2}\sigma_I(W).$$

(b) Ở ngưỡng tất cả các hạt ở trạng thái cuối đều đứng yên trong hệ quy chiếu khối tâm. Năng lượng của khối tâm là $W^{th*} = m + \mu$. Trong phòng thí nghiệm, gọi năng lượng của photon là E_γ. Do photon đứng yên nên tại ngưỡng ta có

$$(E_\gamma + m)^2 - P_\gamma^2 = (m + \mu)^2,$$

hoặc, do $E_\gamma = P_\gamma$ ta có

$$E_\gamma^{th} = \mu\left(1 + \frac{\mu}{2m}\right) = 150 \text{ MeV}.$$

Khi $E_\gamma > E_\gamma^{th}$, $\sigma(\gamma + p \to \pi^+ + n)$ tăng nhanh khi E_γ tăng. Khi $E_\gamma = 340$ MeV, xuất hiện một đỉnh cộng hưởng rộng tương ứng với khối lượng bất biến

$$E^* = \sqrt{(E_\gamma + m_p)^2 - P_\gamma^2} = \sqrt{2m_pE_\gamma + m_p^2} = 1232 \text{ MeV}.$$

Nó được gọi là hạt Δ. Độ rộng $\Gamma = 115$ MeV và $\sigma \approx 280\ \mu$b tại đỉnh đó.

3037

Các câu hỏi sau đây đòi hỏi câu trả lời thô, định tính hoặc về biên độ.

(a) Tiết diện hiệu dụng cho $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ tại năng một năng lượng khối tâm 20 GeV cỡ bao nhiêu? Nó phụ thuộc như thế nào vào năng lượng?

(b) Tiết diện toàn phần nơtrino-nucleon đối với các nơtrino tới có năng lượng 100 GeV (trong hệ đứng yên của nucleon) cỡ bao nhiêu? Nó phụ thuộc thế nào vào năng lượng? Ở năng lượng bằng bao nhiêu thì sự phụ thuộc năng lượng thay đổi, dựa theo lý thuyêt Weinberg-Salam?

(c) Thời gian sống của muyon cỡ bao nhiêu? Thời gian sống của lepton tau? Nếu một lepton mới được phát hiện nặng gấp mười lần tau, nó sẽ tồn tại bao lâu, giả thiết rằng nó phân rã theo cùng một cơ chế như muyon và tau?

(d) Độ lớn của tiết diện toàn phần của nucleon-nucleon là cỡ nào tại năng lượng của máy gia tốc?

(e) Trong tán xạ đàn hồi pion-nucleon, một đỉnh lớn được phát hiện trong phương tiến (tán xạ ở góc nhỏ). Một đỉnh nhỏ hơn nhưng khá tách biệt được phát hiện theo chiều ngược (tán xạ với góc xấp xỉ 180^0 trong hệ quy chiếu khối tâm). Hãy giải thích đỉnh xuất hiện theo chiều ngược. Một đỉnh ngược tương tự được phát hiện trong tán xạ đàn hồi K^+p nhưng lại không có trong tán xạ K^-p. Hãy giải thích?

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Sự phụ thuộc năng lượng của tiết diện cho $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ có thể ước lượng bằng phương pháp sau. Ở năng lượng cao $s^{\frac{1}{2}} \gg m_e,\ m_\mu$, trong đó $s = E_{cm}^2$, và ta lấy $m_e \approx m_\mu \approx 0$. Do có hai đỉnh trong tương tác điện từ bậc thấp nhất nên ta có

$$\sigma = f(s)\alpha^2 .$$

Trong đó α là hằng số cấu trúc tinh tế $\frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$. Xét về thứ nguyên $\sigma = [M]^{-2}$, $s = [M]^2$, $\alpha = [0]$, và do đó

$$f(s) \approx \frac{1}{s} ,$$

hay

$$\sigma \approx \frac{\alpha^2}{s} .$$

Tính toán sử dụng điện động lực học lượng tử và không tính đến bổ chính bức xạ ta có

$$\sigma \approx \frac{4\pi\alpha^2}{3s} .$$

Tại $E_{cm} = 20$ GeV, ta có

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3 \times 20^2} = 5,6 \times 10^{-7}\ \text{GeV}^{-2} = 2,2 \times 10^{-34}\ \text{cm}^2 = 220\ \text{pb} ,$$

trong đó 1 $\text{MeV}^{-1} = 197 \times 10^{-13}$ cm.

(b) Ta có thể ước lượng tiết diện toàn phần của nơtrino-nucleon theo cách tương tự. Trong khoảng năng lượng cao $s^{\frac{1}{2}} \gg m_p$, ν và p phản ứng bằng tương tác yếu, và

$$\sigma \approx G_F^2 f(s) .$$

Một lần nữa sử dụng việc phân tích thứ nguyên, ta có $G_F = [M]^{-2}$, $s = [M]^2$, $\sigma = [M]^{-2}$, và như thế $f(s) = [M]^2$, hay

$$f(s) \approx s\,,$$

có nghĩa là

$$\sigma \approx G_F^2 s\,.$$

Gọi năng lượng của nơtrino trong hệ quy chiếu đứng yên của nơtron là E_ν. Khi đó ta có

$$s = (E_\nu + m_p)^2 - p_\nu^2 = m_p^2 + 2m_p E_\nu \approx 2m_p E_\nu\,,$$

hay

$$\sigma \approx G_F^2 s \approx G_F^2 m_p E_\nu\,.$$

Đối với tương tác yếu **(xem Bài tập 3001)** ta có

$$G_F m_p^2 = 10^{-5}\,.$$

Với $m_p \approx 1$ GeV, tại $E_\nu = 100$ GeV ta có

$$\begin{aligned}\sigma &\approx 10^{-10} E_\nu \text{ GeV}^{-2} \\ &= 10^{-10} \times 10^2 \times 10^{-6} \text{ MeV}^{-2} = 10^{-14} \times (197 \times 10^{-13})^2 \text{ cm}^2 \\ &= 4 \times 10^{-36} \text{ cm}^2\,.\end{aligned}$$

Theo thực nghiệm, $\sigma \approx 0,6 \times 10^{-38}$ cm^2. Theo lý thuyết Weinberg-Salam, σ biến đổi mạnh trong lân cận $s \approx m_W^2$, trong đó m_W là khối lượng của vectơ boson trung gian W, 82 GeV.

(c) μ có thời gian sống là $\tau_\mu \approx 2,2 \times 10^{-6}$ s và τ có thời gian sống là $\tau_\tau \approx 2,86 \times 10^{-13}$ s.

Kí hiệu lepton mới là H. Khi đó $m_H = 10 m_\tau$. Với giả thiết nó phân rã theo cùng cơ chế như muyon và tau, ta có thời gian sống của nó là

$$\tau_H = \left(\frac{m_\tau}{m_H}\right)^5 \tau_\tau \approx 10^{-5}\tau_\tau = 2,86 \times 10^{-18}\ s\,.$$

(d) Các hạt nucleon phản ứng bằng tương tác mạnh. Trong phạm vi năng lượng của các máy gia tốc hiện tại thì tiết diện tương tác giữa các nucleon là

$$\sigma_{NN} \approx \pi R_N^2\,,$$

R_N là bán kính của nucleon. Với $R_N \approx 10^{-13}$ cm, ta có

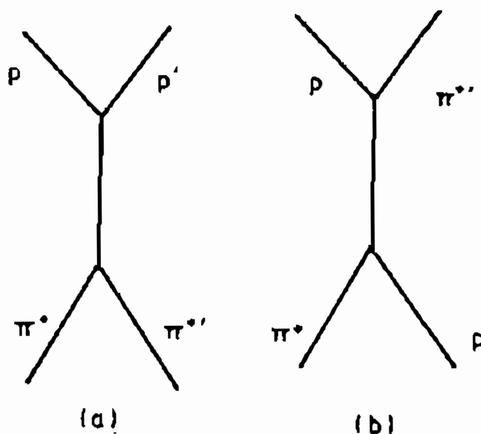
$$\sigma_{NN} \approx 3 \times 10^{-26}\ \text{cm}^2 = 30\ \text{mb}\,.$$

Thực nghiệm cho ta $\sigma_{pp} \approx 30 \sim 50$ mb đối với $E_p = 2 \sim 10 \times 10^3$ GeV,

$$\sigma_{np} \approx 30 \sim 50\ \text{mb đối với}\ E_p = 5 \sim 10 \times 10^2\ \text{GeV}\,.$$

(e) Tương tự với bức tranh vật lý của tương tác điện từ, tương tác giữa hadron có thể coi như một quá trình trao đổi hadron ảo. Mỗi hadron có thể là một hạt trao đổi và có thể được tạo ra bởi các hadron khác, vì vậy tất cả các hadron là bình đẳng. Nói chung người ta đồng ý rằng tương tác mạnh xuất phát từ việc trao đổi một đơn hạt, ảnh hưởng của việc trao đổi kép đa hạt được xem là không đáng kể. Đây gọi là mô hình trao đổi đơn hạt.

Hình 3.13(a) mô tả một kênh t, trong đó $t = -(P_{\pi^+} - P_{\pi^{+\prime}})^2$ là bình phương trao đổi của động lượng 4 chiều của π^+ sang $\pi^{+\prime}$. Hình 3.13(b) mô tả



Hình 3.13

một kênh u, trong đó $u = -(P_{\pi^+} - P_{p'})^2$ là bình phương của trao đổi động lượng 4 chiều của π^+ đối với p'. Gọi θ là góc hợp bởi π^+ tới và π^+ bay ra. Khi $\theta = 0, |t|$ rất nhỏ; khi $\theta = 180^0, |u|$ là rất nhỏ. Trường hợp đầu tiên ứng với π^+ tán xạ theo phương tiến và trường hợp thứ hai tương ứng với π^+ tán xạ ngược chiều. Do các số lượng tử được bảo toàn tại các đỉnh, nên với kênh t hạt trao đổi ảo là một meson, với kênh u thì nó là baryon. Điều này có nghĩa là tồn tại đỉnh trong chiều ngược đối với tán xạ trao đổi baryon. Nói một cách

tổng quát, biên độ trao đổi meson là lớn hơn. Do vậy đỉnh tiến lớn hơn. Ví dụ, trong tán xạ π^+p có một kênh u cho trao đổi n, và vì vậy có một đỉnh ngược. Trong tán xạ K^+p, có một baryon có một baryon ảo $(S = -1, B = 1)$ hay Λ^0 được trao đổi. Nhưng trong tán xạ K^-p, nếu không có baryon được trao đổi thì nó phải có $S = 1, B = 1$. Do không có baryon nào như vậy nên tán xạ K^-p không có đỉnh ngược.

2. CÁC TƯƠNG TÁC ĐIỆN TỪ VÀ YẾU, CÁC LÝ THUYẾT ĐẠI THỐNG NHẤT (3038–3071)

3038

Xét các phân rã sinh lepton

$$\mu^+ \to e^+\nu\bar{\nu} \quad \text{và} \quad \tau^+ \to e^+\nu\bar{\nu}$$

vốn được cho rằng đều xảy ra thông qua cùng một tương tác.

(a) Nếu thời gian sống trung bình của μ^+ là $2,2\times10^{-6}$ s, hãy ước lượng thời gian sống trung bình của τ^+ cho tỉ số phân nhánh thực nghiệm cho $\tau^+ \to e^+\nu\bar{\nu}$ là 16%

Chú ý rằng:

$$m_\mu = 106 \text{ MeV}/c^2,$$

$$m_\tau = 1784 \text{ MeV}/c^2,$$

$$m_e = 0,5 \text{ MeV}/c^2,$$

$$m_\nu = 0 \text{ MeV}/c^2,$$

(b) Nếu τ^+ được sinh ra trong một máy gia tốc chùm va chạm (giống như PEP), $e^+e^- \to \tau^+\tau^-$ ở $E_{cm} = 29$ GeV (e^+ và e^- có động lượng bằng nhau và ngược chiều), tìm quãng đường trung bình (trong phòng thí nghiệm) mà τ^+ đi được trước khi phân rã.

(*UC, Berkeley*)

Lời giải:

(a) Lý thuyết tương tác yếu cho xác suất phân rã trong một đơn vị thời

gian là

$$\lambda_\mu = \tau_\mu^{-1} = \frac{G_\mu^2 m_\mu^5}{192\pi^3}, \qquad \lambda_\tau = \frac{G_\tau^2 m_\tau^5}{192\pi^3}.$$

Do áp dụng cùng một hằng số tương tác nên ta có $G_\mu = G_\tau$ và

$$\lambda_\tau / \lambda_\mu = m_\tau^5 / m_\mu^5 .$$

Nếu λ là xác suất phân rã toàn phần trên một đơn vị thời gian của τ^+, thì tỉ số phân nhánh là $R = \lambda_\tau(\tau^+ \to e^+\nu\bar{\nu})/\lambda$.

Do vậy $\tau = \lambda^{-1} = R/\lambda_\tau(\tau^+ \to e^+\nu\bar{\nu}) = R\left(\frac{m_\mu}{m_\tau}\right)^5 \tau_\mu = 16\% \times \left(\frac{106}{1784}\right)^5 \times 2,2 \times 10^{-6} = 2,6 \times 10^{-13}\ s$.

(b) Trong hệ khối tâm, τ^+ và τ^- có cùng năng lượng. Do vậy

$$E_\tau = E_{\rm cm}/2 = 14,5\ \text{GeV}.$$

Do đây là va chạm giữa hai hạt có động lượng bằng nhau và ngược chiều, nên hệ khối tâm trùng với hệ phòng thí nghiệm. Do vậy thừa số Lorentz của τ là

$$\gamma = E_\tau / m_\tau = 14,5 \times 10^3/1784 = 8,13,$$

từ đó cho ta

$$\beta = \sqrt{1 - \gamma^{-2}} = \sqrt{1 - 8,13^{-2}} = 0,992 .$$

Do vậy đường bay trung bình trong phòng thí nghiệm là

$$L = \beta c \gamma \tau = 0,992 \times 3 \times 10^{10} \times 8,13 \times 2,6 \times 10^{-13} = 6,29 \times 10^{-2}\ \text{cm}.$$

3039

Giả thiết rằng cùng một tương tác yếu cơ bản chịu trách nhiệm đối với các quá trình phân rã $n \to pe\ \ \nu$ và $\Sigma^- \to \Lambda e\ \ \nu$, và ccác phần tử ma trận mô tả các phân rã này là giống nhau. Hãy ước lượng tốc độ phân rã của quá trình $\Sigma^- \to \Lambda e^-\bar{\nu}$ cho trước thời gian sống của một nơtron tự do là khoảng 10^3 giây.

Cho:

$$m_n = 939,57\ \text{MeV}/c^2, \qquad m_\Sigma = 1197,35\ \text{MeV}/c^2,$$

$$m_p = 938,28\ \text{MeV}/c^2, \qquad m_\Lambda = 1116,058\ \text{MeV}/c^2,$$

$$m_e = 0,51\ \text{MeV}/c^2, \qquad m_\nu = 0.$$

(*UC, Berkeley*)

Lời giải:

Lý thuyết phân rã β cho ta xác suất chuyển tiếp trên một đơn vị thời gian là $W = 2\pi G^2|M|^2 dN/dE_0$ và tốc độ phân rã toàn phần là $\lambda \propto E_0^5$, trong đó E_0 là năng lượng cực đại của nơtrino phân rã. Với hai quá trình phân rã của cùng một phần tử ma trận chuyển mức và cùng một hằng số liên kết ta có

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \left(\frac{E_{01}}{E_{02}}\right)^5 .$$

Do đó

$$\begin{aligned}\lambda(\Sigma^- \to \Lambda e\bar{\nu}) &= \left[\frac{E_0(\Sigma^- \to \Lambda e^-\bar{\nu})}{E_0(n \to pe^-\bar{\nu})}\right]^5 \lambda_n \\ &= \left(\frac{m_\Sigma - m_\Lambda - m_e}{m_n - m_p - m_e}\right)^5 \frac{1}{\tau_n} \\ &= \left(\frac{1197,35 - 1116,058 - 0,51}{939,57 - 938,28 - 0,51}\right)^5 \times 10^{-3} \\ &= 1,19 \times 10^7\ s^{-1} .\end{aligned}$$

3040

Mặc dù việc liên kết tương tác yếu được cho là phổ dụng, nhưng các quá trình yếu khác nhau xảy ra với tốc độ rất khác nhau do những nguyên nhân động học.

(a) Hãy giả thiết một tương tác V-A phổ dụng, hãy tính (hoặc ước lượng) tỉ số tốc độ

$$\gamma = \frac{\Gamma(\pi^- \to \mu^-\bar{\nu})}{\Gamma(\pi^- \to e^-\bar{\nu})} .$$

Tính toán định lượng đến mức có thể.

(b) Tỉ số đó sẽ thay đổi thế nào nếu sự kết hợp tương tác yếu phổ dụng là vô hướng? Giả vô hướng?

(c) Điều gì được mong đợi (với V-A) ở

$$\gamma' = \frac{\Gamma(\Lambda \to p\mu^-\bar{\nu})}{\Gamma(\Lambda \to pe^-\bar{\nu})}.$$

Ở đây cần một câu trả lời định tính.

Dữ liệu:

$J^P(\pi^-) = 0^-$; $M_\Lambda = 1190\ \text{MeV}/c^2$;

$M_\mu = 105\ \text{MeV}/c^2$; $M_e = 0.5\ \text{MeV}/c^2$; $M_p = 938\ \text{MeV}/c^2$.

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Tốc độ phản ứng tương tác yếu được cho bởi

$$\Gamma = 2\pi G^2 |M|^2 \frac{dN}{dE_0},$$

Trong đó $\frac{dN}{dE_0}$ là số trạng thái cuối trên một khoảng năng lượng đơn vị, M là phần tử ma trận chuyển tiếp, G là hằng số liên kết tương tác yếu.

Xét hai kiểu phân rã của π^-:

$$\pi^- \to \mu^-\bar{\nu}_\mu, \qquad \pi^- \to e^-\bar{\nu}.$$

Mỗi phân rã có thể coi như là tương tác của bốn fecmion thông qua một trạng thái nucleon-phản nucleon trung gian như mô tả trong hình 3.14

$$\pi^- \xrightarrow{\text{tương tác mạnh}} \bar{p} + n \xrightarrow{\text{tương tác yếu}} e^- + \bar{\nu}_e \text{ hay } \mu^- + \bar{\nu}_\mu.$$

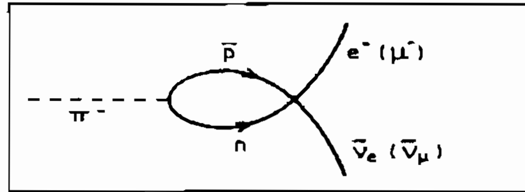
Từ việc xét tính chẵn lẻ và momen động lượng, và dựa trên lý thuyết $V-A$, ta có thể coi sự kết hợp thuộc loại vectơ dọc theo trục (A).

Đối với sự kết hợp loại A, $M^2 \approx 1 - \beta$, trong đó β là vận tốc của lepton mang điện. Thừa số không gian pha là

$$\frac{dN}{dE_0} = Cp^2\frac{dp}{dE_0},$$

trong đó C là hằng số, p là động lượng của lepton mang điện trong hệ đứng yên của pion. Năng lượng toàn phần của hệ là

$$E_0 = m_\pi = p + \sqrt{p^2 + m^2},$$



Hình 3.14

trong đó m là khối lượng nghỉ của lepton mang điện, và nơtrino coi như là có khối lượng nghỉ bằng không. Lấy vi phân ta có

$$\frac{dp}{dE_0} = \frac{E_0 - p}{E_0}.$$

Từ biểu thức

$$m_\pi = p + \sqrt{p^2 + m^2}$$

ta có

$$p = \frac{m_\pi^2 - m^2}{2m_\pi}.$$

Kết hợp các biểu thức trên ta được

$$\frac{dp}{dE_0} = \frac{m_\pi^2 + m^2}{2m_\pi^2}.$$

Đồng thời ta cũng có

$$\beta = \frac{p}{\sqrt{p^2 + m^2}} = \frac{p}{m_\pi - p},$$

và vì vậy ta có

$$1 - \beta = \frac{2m^2}{m_\pi^2 + m^2}.$$

Do đó tốc độ phân rã tỉ lệ với

$$(1 - \beta)p^2 \frac{dp}{dE_0} = \frac{1}{4}\left(\frac{m}{m_\pi}\right)^2 \left(\frac{m_\pi^2 - m^2}{m_\pi}\right)^2.$$

Ta có tỉ số là

$$\gamma = \frac{\Gamma(\pi^- \to \mu^- \bar{\nu}_\mu)}{\Gamma(\pi^- \to e^- \bar{\nu}_e)} = \frac{m_\mu^2 (m_\pi^2 - m_\mu^2)^2}{m_e^2 (m_\pi^2 - m_e^2)^2} = 8,13 \times 10^3.$$

(b) Đối với liên kết vô hướng, ta cũng có $M^2 \approx 1 - \beta$ và tỉ số R không đổi. Đối với liên kết giả vô hướng, $M^2 \approx 1 + \beta$, và tốc độ phân rã tỉ lệ với

$$(1+\beta)p^2 \frac{dp}{dE} = \frac{1}{4}\left(\frac{m_\pi^2 - m^2}{m_\pi}\right)^2 .$$

Khi đó

$$\gamma = \frac{\Gamma(\pi^- \to \mu^- \bar{\nu}_\mu)}{\Gamma(\pi^- \to e^- \bar{\nu}_e)} = \frac{(m_\pi^2 - m_\mu^2)^2}{(m_\pi^2 - m_e^2)^2} = 0,18 .$$

Các kết quả này có thể so sánh với các kết quả thu được từ thực nghiệm

$$\gamma^{\text{exp}} = 8,1 \times 10^3 .$$

(c) Đối với phân rã bán lepton của Λ^0 ta có tỉ lệ

$$\gamma' = \frac{\Gamma(\Lambda \to p\mu^- \bar{\nu}_\mu)}{\Gamma(\Lambda \to pe^- \bar{\nu}_e)}$$

có thể ước lượng theo cách tương tự. Ta có

$$\gamma'_{th} = 0,164 \qquad \gamma'_{\text{exp}} = 0,187 \pm 0,042 ,$$

Điều đó có nghĩa là phân rã Λ có thể được mô tả dựa trên lý thuyết liên kết V-A.

3041

Hãy liệt kê những tính chất tổng quát của nơtrino và phản nơtrino. Động lực vật lý nào cho định đề ban đầu về sự tồn tại của nơtrino? Lần đầu tiên nơtrino được phát hiện trực tiếp như thế nào?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Bảng 3.6 liệt kê các số lượng tử của neutrino và phản neutrino.

	Điện tích	Spin	Độ xoắn	Số lepton
nơtrino	0	1/2	−1	+1
phản nơtrino	0	1/2	+1	−1

Cả nơtrino và phản nơtrino đều là lepton và chỉ gắn với tương tác yếu. Người ta tin rằng có 3 loại nơtrino và phản nơtrino của chúng tồn tại trong tự

nhiên. Đó là electron-nơtrino, muyon-nơtrino, τ-nơtrino, và các phản hạt của chúng. (ν_τ và $\bar{\nu}_\tau$ chưa phát hiện được bằng thực nghiệm).

Lúc đầu, để giải thích sự mâu thuẫn giữa phổ năng lượng liên tục của electron sinh ra trong phân rã β và các mức năng lượng hạt nhân gián đoạn, Pauli đã đưa ra định đề vào năm 1933 là phân rã β có phát ra cả một hạt nhẹ trung hòa gọi là nơtrino. Do nó trung hòa nên nơtrino không thể phát hiện được, nhưng nó lấy đi một phần năng lượng của quá trình chuyển tiếp. Do đây là phân rã ba thành phần nên electron có năng lượng liên tục cho tới một giới hạn cho bởi năng lượng chuyển tiếp.

Do nơtrino chỉ tham gia vào tương tác yếu, nên việc phát hiện trực tiếp nơtrino là rất khó. Thí nghiệm đầu tiên phát hiện ra nơtrino được tiến hành bởi Reines và Cowan trong thời gian 1953–1959. Họ đã dùng $\bar{\nu}$ từ một phản ứng hạt nhân để bắn phá proton. Từ phân rã nơtron $n \to p + e^- + \bar{\nu}$ ta hi vọng $\bar{\nu} + p \to n + e^+$ xảy ra. Do vậy nếu như phát hiện được một nơtrino và một positron đồng thời thì chứng tỏ sự có mặt của $\bar{\nu}$. Những người làm việc ở đó đã phải mất 6 năm để có kết quả dương.

3042

(a) Hiện nay có bao nhiêu loại nơtrino được biết là tồn tại? Spin của một nơtrino là bao nhiêu?

(b) Các tính chất nào của nơtrino được bảo toàn trong các quá trình tán xạ? Sự khác biệt giữa nơtrino và phản nơtrino là gì? Minh họa điều đó bằng cách điền hạt còn thiếu vào phản ứng sau

$$\nu_\mu + e^- \to \mu^- + ?\,.$$

(c) Giả sử khối lượng của nơtrino bằng 0. Liệu nơtrino có momen từ hay không? Spin của nơtrino định hướng theo phương nào? Spin của phản nơtrino định hướng theo phương nào?

(d) Vận tốc của một nơtrino 3°K trong vũ trụ là bao nhiêu nếu khối lượng nơtrino là 0,1 eV?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Có hai loại nơtrino đã được tìm thấy cho tới lúc này. Đó là nơtrino-electron và nơtrino-muyon và các phản hạt của nó. Lý thuyết dự đoán sự tồn tại của loại nơtrino thứ 3, đó là τ-nơtrino và phản hạt của nó. Spin của nơtrino

là 1/2.

(b) Trong quá trình tán xạ, số lepton của mỗi loại nơtrino được bảo toàn. Sự khác nhau giữa nơtrino và phản nơtrino tương ứng là chúng có số lepton trái dấu. Hơn nữa nếu nơtrino có khối lượng bằng 0 thì độ xoắn của nơtrino và phản nơtrino là ngược nhau. Hạt chưa biết trong phản ứng là ν_e

$$\nu_\mu + e^- \to \mu^- + \nu_e \,.$$

(c) Nếu khối lượng nơtrino chính xác bằng 0, thì chúng không có momen từ. Spin của nơtrino chỉ theo hướng ngược với chuyển động của nó, trong khi phản nơtrino thì lại có spin ngược lại.

(d) Động năng trung bình của một nơtrino trong một chất khí có nhiệt độ T là $E_k = 3kT/2$, trong đó k là hằng số Boltzmann. Khi đó vận tốc của nơtrino là

$$\beta = \sqrt{2E_k/m} = \sqrt{3kT/m} = \sqrt{3 \times 8,62 \times 10^{-5} \times 3/0,1} = 0,088\,,$$

Tương ứng với $2,6 \times 10^7$ m/s.

3043

(a) Mô tả thí nghiệm chứng minh rằng

(1) có hai loại nơtrino,

(2) tiết diện tương tác là rất nhỏ.

(b) Viết các phản ứng trong đó nơtrino năng lượng cao có thể sinh ra một pion đơn với

(1) một proton và với

(2) một nơtron.

(c) Định nghĩa độ xoắn và các giá trị của nó trong trường hợp nơtrino và phản nơtrino.

(d) Các kiểu phân rã sau của μ^+ có thể diễn ra trong tự nhiên không? Tại sao?

(1) $\mu^+ \to e^+ + \gamma$,

(2) $\mu^+ \to e^+ + e^- + e^+$. (*SUNY Buffalo*)

Lời giải:

(a) (1) Về thí nghiệm hai loại nơtrino xem **Bài tập 3009(3)**.

(2) Quan sát đầu tiên về tương tác của nơtrino tự do được tiến hành bởi Reines và Cowan trong thời gian 1953-1959. Họ sử dụng $\bar{\nu}_e$ từ một phản ứng hạt nhân có phổ rộng quanh 1 MeV, đóng vai trò đạn, còn cadimi clorua ($CdCl_2$) và nước là bia để khơi mào phản ứng

$$\bar{\nu}_e + p \to n + e^+ .$$

e^+ được tạo ra trong phản ứng sẽ nhanh chóng đứng yên do sự tiêu hao ion hóa và hình thành một positroni mà sẽ hủy tạo ra hai tia γ, mỗi tia có năng lượng 0,511 MeV. Thang thời gian cho quá trình này là ở mức 10^{-9} s. Nơtron được tạo ra, sau khi bị làm chậm bởi nước, sẽ bị bắt lấy bởi cadimi, mà sau đó nó bức xạ ra tia γ cỡ $\sim 9,1$ MeV sau thời gian trễ khoảng vài μs. Một máy đếm nhấp nháy lỏng sẽ thu tất cả tia tạo thành hai xung khác nhau với chênh lệch thời gian khoảng 10^{-5} s. Bia 200 lít được kẹp giữa hai lớp chất lỏng nhấp nháy, được đo bằng các dãy ống nhân quang. Thí nghiệm này cho thấy $\sigma_\nu \sim 10^{-44}$ cm^2, phù hợp với dự đoán của lý thuyết. So sánh với tiết diện σ_h của hadron, cỡ $10^{-24\sim-26}$ cm^2, σ_ν rõ ràng là rất nhỏ.

(b) (1) $\nu_\mu + p \to \mu^- + p + \pi^+$.

(2)

$$\begin{aligned}\nu_\mu + n &\to \mu^- + n + \pi^+ \\ &\to \mu^- + p + \pi^0 .\end{aligned}$$

(c) Độ xoắn của một hạt được định nghĩa là $H = \frac{\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{|\mathbf{P}||\boldsymbol{\sigma}|}$, trong đó **P** và $\boldsymbol{\sigma}$ là động lượng và spin của hạt. Nơtrino có $H = -1$ và được gọi là xoắn trái, phản nơtrino có $H = +1$ và là bên xoắn phải.

(d) $\mu^+ \to e^+ + \gamma$, $\mu^+ \to e^+ + e^- + e^+$.

Không kiểu phân rã nào có thể xảy ra bởi vì nó vi phạm sự bảo toàn số electron-lepton và muyon-lepton.

3044

Một cách để đo khối lượng của nơtrino electron rất nhạy đó là đo

(a) phân bố góc của tán xạ nơtrino-electron.

(b) phổ năng lượng electron trong phân rã beta.

(c) thông lượng nơtrino từ mặt trời.

(*CCT*)

Lời giải:

Trong đồ thị Kurie về phổ β, hình dạng ở đuôi phụ thuộc vào khối lượng của nơtrino. Do đó câu trả lời là (b).

3045

Trong một triệu hạt nơtrino 1-GeV có bao nhiêu hạt tương tác khi đi qua trái đất? ($\sigma = 0,7 \times 10^{-38}$ cm^2/n, trong đó n là một nucleon, $R = 6000$ km, $\rho \approx 5$ g/cm^2, $\langle A \rangle = 20$)

(a) tất cả.

(b) ≈ 25.

(c) không hạt nào.

(*CCT*)

Lời giải:

Mỗi nucleon có thể biểu diễn bởi một diện tích σ. Số nucleon va chạm bởi một nơtrino đi qua trái đất là

$$N_n = \frac{2R\sigma\rho N_A}{\langle A \rangle}\langle A \rangle ,$$

Trong đó N_A = số Avogadro. Tổng số va chạm là

$$\begin{aligned} N &= N_\nu N_n = 2R\sigma\rho N_A N_\nu \\ &= 2 \times 6 \times 10^8 \times 0,7 \times 10^{-38} \times 5 \times 6,02 \times 10^{23} \times 10^6 = 25,2 \end{aligned}$$

Như vậy câu trả lời là (b).

3046

Tiết diện tăng tuyến tính theo E_ν. Một detectơ ($\rho \approx 5$ g/cm^3, $\langle A \rangle = 20$) phải có độ dài bao nhiêu để một trong 10^6 hạt nơtrino năng lượng E_ν = 1000 GeV tương tác?

(a) 6 km.

(b) 480 m.

(c) 5 m.

(*CCT*)

Lời giải:

Viết $L = 2R$ như trong **Bài tập 3045**, khi đó $N \propto L\sigma$. Do $\sigma' = 1000\sigma$, ta có

$$\frac{1}{25,2} = \frac{10^3 L}{2R},$$

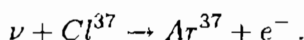
Hay

$$L = \frac{2 \times 6000}{25,2 \times 10^3} = 0,476\ km\,.$$

Do đó câu trả lời là (b).

3047

Một thí nghiệm trong mỏ vàng ở nam Dakota được tiến hành để đo nơtrino từ mặt trời bằng cách sử dụng phản ứng



$$\nu + Cl^{37} \to Ar^{37} + e^-\,.$$

Máy dò chứa khoảng 4×10^5 lít tetracloretylen (CCl_4). Ước tính có bao nhiêu nguyên tử Ar^{37} sinh ra trong một ngày. Liệt kê những giả thiết cần có. Làm thế nào để nâng cao thí nghiệm?

(*Columbia*)

Lời giải:

Ngưỡng của phản ứng $\nu + Cl^{37} \to Ar^{37} + e^-$ là $(M_{Ar} - M_{Cl})c^2 = 0,000874 \times 937,9 = 0,82$ MeV, do vậy chỉ có nơtrino với năng lượng $E_\nu > 0,82$ MeV có thể được phát hiện. Giả sử rằng khối lượng riêng ρ của CCl_4 là gần bằng khối lượng riêng của nước, số hạt nhân Cl trong một đơn vị thể tích là

$$n = \frac{4\rho N_0}{A} = (4/172) \times 6,02 \times 10^{23} = 1,4 \times 10^{22}\ \text{cm}^{-3}\,,$$

Trong đó $A = 172$ là phân tử lượng của CCl_4.

Nói chung tiết diện tương tác cả nơtrino với vật chất là một hàm của E_ν. Giả sử $\bar{\sigma} \approx 10^{-42}$ cm^2/Cl. Thông lượng nơtrino mặt trời trên bề mặt trái đất phụ thuộc vào mô hình giả thiết cho mặt trời. Giả sử thông lượng với năng lượng $E_\nu > 0,82$ MeV là $F = 10^9$ cm^{-2} s^{-1}. Khi đó số lượng nơtrino thu được

trong một ngay sẽ là $N_\nu = nV\bar{\sigma}Ft = 1,4 \times 10^{22} \times 4 \times 10^5 \times 10^3 \times 10^{-42} \times 10^9 \times 24 \times 3600 = 4,8 \times 10^2$.

Tuy nhiên chỉ có những nơtrino với năng lượng $E_\nu > 0,82$ MeV có thể được phát hiện trong thí nghiệm, trong khi nơtrino mặt trời được sinh ra trong quá trình chủ yếu của mặt trời là $p + p \to {}^2H + e^+ + \nu_e$ có năng lượng tối đa là 0,42 MeV. Do vậy hầu hết nơtrino sẽ không được phát hiện theo cách này. Mặt khác, nếu Ga hay In được dùng như là môi trường của máy dò thì nó có khả năng phát hiện được những nơtrino có năng lượng thấp hơn.

3048

Người ta cho rằng vũ trụ chứa đầy các nơtrino nặng ν_H (khối lượng m_H) các nơtrino này phân rã thành nơtrino nhẹ hơn ν_L (khối lượng m_L) và một photon, $\nu_H \to \nu_L + \gamma$, với thời gian sống tương tự tuổi của vũ trụ. ν_H được sinh ra tại nhiệt độ cao trong thời gian đầu, nhưng nó nguội đi, và thực tế là, bây giờ nó rất lạnh và phân rã xảy ra với ν_H thực sự đứng yên.

(a) Chứng tỏ rằng các photon được sinh ra là đơn năng và tìm năng lượng của chúng.

(b) Đánh giá biểu thức tìm được đối với năng lượng photon trong giới hạn $m_L \ll m_H$. Nếu nơtrino nặng có khối lượng là 50 eV như các thí nghiệm gần đây trên trái đất đã chỉ ra, và $m_L \ll m_H$, khi đó phổ photon thu được sẽ ở dạng nào?

(c) Giả sử thời gian sống của nơtrino nặng ngắn so với tuổi của vũ trụ, nhưng nó vẫn "lạnh" (theo nghĩa ở trên) tại thời điểm phân rã. Điều này làm thay đổi câu trả lời cho phần (b) như thế nào (định tính)?

(*Columbia*)

Lời giải:

(a) Do đây là phân rã hai thành phần, năng lượng và động lượng bảo toàn sẽ xác định đơn giá năng lượng của mỗi hạt phân rã. Do vậy các hạt photon là đơn năng. Nơtrino nặng có thể xem như là phân rã khi đứng yên. Do vậy

$$m_H = E_L + E_\gamma, \qquad P_L = P_\gamma .$$

Do $E_\gamma = P_\gamma$, $E_L^2 = P_L^2 + m_L^2$, nên ta có

$$E_\gamma = \frac{1}{2m_H}(m_H^2 - m_L^2) .$$

(b) Trong giới hạn $m_H \gg m_L$, thì $E_\gamma \approx \frac{1}{2}m_H$. Nếu $m_H = 50$ eV, $E_\gamma = 25$ eV. Các photon phát ra sẽ có bước sóng là

$$\lambda = \frac{h}{P_\gamma} = \frac{2\pi\hbar c}{P_\gamma c} = \frac{2\pi \times 197 \times 10^{-13}}{25 \times 10^{-6}} = 495 \times 10^{-8} \text{ cm} = 495 \text{ Å} .$$

Nó nằm trong vùng ánh sáng tử ngoại. Vì vậy ta sẽ phải tìm kiếm trong vùng tử ngoại của trái đất để phát hiện ra các photon này.

(c) Nếu thời gian sống của nơtrino nặng là nhỏ hơn nhiều tuổi của vũ trụ, thì nó gần như đã phân rã hết thành nơtrino nhẹ. Điều này có thể khiến cho việc phát hiện trực tiếp chúng thực tế là không thể.

3049

Chuỗi phân rã

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu , \qquad \mu^+ \to e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$$

Cho một bằng chứng về sự không bảo toàn tính chẵn lẻ.

(a) Đại lượng có thể quan sát được nào dùng để chỉ ra hiệu ứng này? Vẽ hình hoặc đưa ra công thức cho phân bố của đại lượng đó.

(b) Có phải tất cả hai quá trình trên đều vi phạm sự bảo toàn tính chẵn lẻ hay chỉ có một quá trình như vậy? Giải thích tại sao.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

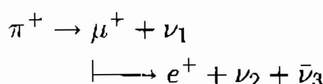
(a) Giả sử rằng pion phân rã trong quá trình chuyển động. Ta có thể nghiên cứu các muyon tiến μ^+ những hạt sẽ dừng lại và phân rã bên trong chất hấp thụ cacbon. Phân bố góc của e^+ sinh ra trong phân rã μ^+ có thể xác định được nếu tính chẵn lẻ bảo toàn. So với phương ban đầu của μ^+ thì e^+ có phân bố góc là $dN/d\Omega = 1 - \frac{1}{3}\cos\theta$, phân bố này biến đổi khi có phép phản chiếu không gian $\theta \to \pi - \theta$. Do vậy tính chẵn lẻ không được bảo toàn.

(b) Cả hai quá trình phân rã đều vi phạm sự bảo toàn tính chẵn lẻ do cả

hai đều xảy ra theo các tương tác yếu.

3050

Xét sơ đồ phân rã sau đây:



$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_1$$
$$\quad\quad \longmapsto e^+ + \nu_2 + \bar{\nu}_3$$

(a) Nếu pion có động lượng p, thì giá trị nhỏ nhất (và lớn nhất) của động lượng muyon là bao nhiêu? Trình bày câu trả lời dựa trên m_μ, m_π và p ($m_{\nu_1} = m_{\nu_2} = m_{\bar{\nu}_3} = 0$) giả thiết $p \gg m_\mu, m_\pi$.

(b) Nếu nơtrino trong phân rã π có độ xoắn âm thì độ xoắn của muyon trong phân rã này là gì?

(c) Cho ν_2 và $\bar{\nu}_3$ có độ xoắn tương ứng là âm và dương, tìm độ xoắn của positron?

(d) Số lượng tử bảo toàn nào chỉ xác định rằng ν_1 và $\bar{\nu}_3(\nu_2)$ tương ứng liên quan tới muyon (electron)?

(e) Pion phân rã thành electron: $\pi^+ \to e^+ + \nu_e$. Mặc dù động học cho các kiểu phân rã electron và muyon là tương tự, nhưng tốc độ phân rã muon gấp 10^4 lần tốc độ phân rã electron. Giải thích tại sao.

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Gọi γ là thừa số Lorentz của π^+. Khi đó $\beta\gamma = \frac{p}{m_\pi}$,

$$\gamma = \frac{\sqrt{p^2 + m_\pi^2}}{m_\pi} \approx \left(1 + \frac{m_\pi^2}{2p^2}\right)\frac{p}{m_\pi}.$$

Trong hệ đứng yên của π^+, $p_\mu^* = p_\nu^* = E_\nu^*$, $m_\pi = E_\mu^* + E_\nu^* = E_\mu^* + p_\mu^*$, cho ta biểu thức

$$p_\mu^* = p_\nu^* = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi},$$

$$E_\mu^* = \sqrt{p_\mu^{*2} + m_\mu^2} = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi}.$$

Chuyển sang hệ quy chiếu phòng thí nghiệm ta có

$$p_\mu \cos\theta = \gamma p_\mu^* \cos\theta^* + \gamma\beta E_\mu^* .$$

Theo phương của p ($\theta = 0$), p_μ có các cực trị là

$$(p_\mu)_{\max} \approx p\left(1 + \frac{m_\pi^2}{2p^2}\right)\frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi^2} + p\frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi^2}$$

$$= p + \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{4p}, \qquad (\theta^* = 0)$$

$$(p_\mu)_{\min} \approx -p\left(1 + \frac{m_\pi^2}{2p^2}\right)\frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi^2} + p\frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi^2}$$

$$= \left(\frac{m_\mu^2}{m_\pi^2}\right)p - \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{4p}. \qquad (\theta^* = \pi)$$

(b) Nếu nơtrino trong phân rã π^+ có độ xoắn âm, thì do π^+ có spin bằng 0 và tính bảo toàn của momen động lượng toàn phần và động lượng nên ta có thể kết luận rằng μ^+ có độ xoắn âm trong hệ quy chiếu. π^+ đứng yên.

(c) Biết rằng $\bar{\nu}_3$ và ν_2 lần lượt có độ xoắn dương và âm, ta vẫn không thể chỉ ra độ xoắn của e^+. Nếu ta làm chậm các muyon phân rã và nghiên cứu sự phân rã khi nó đứng yên, ta sẽ phát hiện ra một đỉnh ở 53 MeV trong phổ năng lượng của electron phân rã. Điều này có nghĩa là electron và $\nu_2\bar{\nu}_3$ chuyển động ngược chiều nhau. Nếu chiều phân cực của μ^+ không đổi trong quá trình làm chậm thì phân bố góc của e^+ so với p_μ là

$$\frac{dN_{e^+}}{d\Omega} \approx 1 - \frac{\alpha}{3}\cos\theta ,$$

trong đó $\alpha \approx 1$, cho thấy e^+ có xác suất được phát ra cực đại theo hướng ngược với p_μ ($\theta = \pi$). Do vậy độ xoắn của e^+ là dương. Sự phân cực dọc của electron gợi ý rằng tính chẵn lẻ không được bảo toàn trong phân rã π và μ.

(d) Sự bảo toàn riêng biệt của số lepton-electron và lepton-muyon chỉ ra rằng ν_1 và $\bar{\nu}_3$ đi kèm với muyon và ν_2 liên hệ với electron do số lepton-electron của ν_1, ν_2 và $\bar{\nu}_3$ lần lượt là 0,1,0, và số lepton-muoyn của nó là 1,0, -1.

(e) Xem **Bài tập3040**.

3051

Cho một chùm electron không phân cực, điều nào sau đây là đúng

(a) nó có thể được mô tả bằng một hàm sóng chồng chập của các hàm sóng spin-lên và spin-xuống.

(b) nó không thể mô tả bằng hàm sóng.

(c) cả hai điều trên đều không đúng.

(*CCT*)

Lời giải:

Câu trả lời là (a).

3052

Gọi s, **p** là các vectơ spin và động lượng thẳng của một hạt cơ bản.

(a) Viết các phép biến đổi của s, p dưới tác dụng của của toán tử chẵn lẻ $\hat{P}$ và toán tử đảo ngược thời gian $\hat{T}$.

(b) Theo quan điểm câu trả lời trong phần (a), hãy gợi ý một cách để tìm sự vi phạm đảo ngược thời gian trong phân rã $\Lambda \to N + \pi$. Có chi tiết thực nghiệm hay giả thiết quan trọng nào cho gợi ý này không?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Dưới tác dụng của toán tử chẵn lẻ, s và **p** biến đổi như sau

$$\hat{P}\mathbf{s}\hat{P}^{-1} = \mathbf{s}, \qquad \hat{P}\mathbf{p}\hat{P}^{-1} = -\mathbf{p}\,.$$

Dưới tác dụng của toán tử đảo ngược thời gian $\hat{T}$, s và **p** biến đổi như sau

$$\hat{T}\mathbf{s}\hat{T}^{-1} = -\mathbf{s}, \qquad \hat{T}\mathbf{p}\hat{T}^{-1} = -\mathbf{p}\,.$$

(b) Xét mối tương quan về góc trong phân rã của hạt Λ phân cực. Định nghĩa

$$Q = \mathbf{s}_\Lambda \cdot (\mathbf{p}_N \times \mathbf{p}_\pi)\,,$$

trọng đó s_Λ là spin của hạt Λ, p_N và p_π là động lượng thẳng tương ứng của nucleon và pion. Phép đảo ngược thời gian cho ta

$$\hat{T}Q\hat{T}^{-1} = \hat{T}\mathbf{s}_\Lambda\hat{T}^{-1} \cdot (\hat{T}\mathbf{p}_N\hat{T}^{-1} \times \hat{T}\mathbf{p}_\pi\hat{T}^{-1}) = -\mathbf{s}_\Lambda \cdot [(-\mathbf{p}_N) \times (-\mathbf{p}_\pi)] = -Q\,,$$

hay

$$\bar{Q} = \langle\alpha|Q|\alpha\rangle = \langle\alpha|\hat{T}^{-1}\hat{T}Q\hat{T}^{-1}\hat{T}|\alpha\rangle = -\langle\alpha_T|Q|\alpha_T\rangle\,.$$

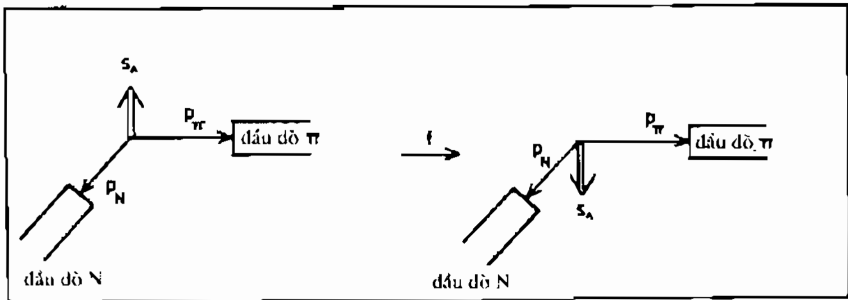
Nếu có bất biến đảo thời gian, $|\alpha_T\rangle$ và $|\alpha\rangle$ mô tả cùng một trạng thái như thế

$$\bar{Q} = \langle\alpha|Q|\alpha\rangle = -\langle\alpha_T|Q|\alpha_T\rangle = -\bar{Q}\,,$$

hay

$$\bar{Q} = 0\,.$$

Để phát hiện sự vi phạm đảo thời gian khả dĩ, sử dụng thiết lập thực nghiệm như trong hình 3.15. Các đầu dò pion và nucleon được đặt vuông góc với nhau và với mặt phẳng của chúng vuông góc với spin của hạt Λ. Đo số các sự kiện phân rã Λ. Bây giờ đảo ngược phân cực của hạt Λ và trong cùng một điều kiện ta đo sự kiện phân rã Λ $N(\downarrow)$.



Hình 3.15

Kết quả $N(\uparrow) \neq N(\downarrow)$ sẽ cho thấy sự vi phạm phép đảo thời gian trong phân rã $\Lambda \to \pi + N$.

Thí nghiệm này đòi hỏi tất cả các hạt Λ phải phân cực hoàn toàn.

3053

Xét phân rã $\Lambda^0 \to p + \pi^-$. Mô tả một phép thử tính đối với bảo toàn chẵn lẻ trong phân rã này. Trong hoàn cảnh nào phép thử này sẽ không sử dụng

được? (*Wisconsin*)

Lời giải:

$\Lambda^0 \to p + \pi^-$ là phân rã không sinh lepton. Ta biết rằng cả Λ^0 và p đều có spin 1/2 và tính chẵn lẻ dương, và π^- có spin 0 và tính chẵn lẻ âm.

Do momen động lượng toàn phần bảo toàn nên trạng thái cuối có momen động lượng quỹ đạo tương đối là 0 hoặc 1. Nếu

$l = 0$, tính chẵn lẻ trạng thái cuối là $P(p)P(\pi^-)(-1)^0 = -1$; nếu

$l = 1$, tính chẵn lẻ trạng thái cuối là $P(p)P(\pi^-)(-1)^1 = +1$.

Do vậy nếu tính chẵn lẻ bảo toàn trong phân rã Λ^0, $l = 0$ sẽ bị cấm. Nếu tính chẵn lẻ không bảo toàn trong phân rã Λ^0, cả hai giá trị l đều được phép và hàm sóng proton trạng thái cuối có thể viết thành

$$\Psi = \Psi_s + \Psi_p = a_s Y_{0,0}\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + a_p\left(\sqrt{\frac{2}{3}}Y_{1,1}\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}Y_{1,0}\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\right),$$

trong đó $|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$ và $|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle$ tương ứng là hàm sóng spin của proton với $m = \pm\frac{1}{2}$, a_s và a_p là biên độ của sóng s và p.

Thay $Y_{1,1}$, $Y_{1,0}$, $Y_{0,0}$ cho ta

$$\Psi^*\Psi \propto |a_s - a_p\cos\theta|^2 + |a_p|^2\sin^2\theta$$
$$= |a_s|^2 + |a_p|^2 - 2\mathrm{Re}(a_s a_p^*)\cos\theta \propto 1 + \alpha\cos\theta\,,$$

trong đó $\alpha = 2\mathrm{Re}(a_a a_p^*)/(|a_s|^2 + |a_p|^2)$.

Nếu các hạt Λ^0 được phân cực, phân bố góc của p hoặc π^- sẽ có dạng $1 + \alpha\cos\theta$, (trong hệ đứng yên của Λ^0, p và π^- chuyển động ngược chiều nhau). Nếu Λ^0 không phân cực hoàn toàn, gọi độ phân cực là P. Khi đó phân bố góc của π^- hoặc p là $(1 + \alpha P\cos\theta)$. Trong đó θ là góc giữa phương của π hoặc p so với phương phân cực của Λ^0.

Phép đo phân bố góc có thể được tiến hành bằng cách sử dụng Λ^0 phân cực sinh ra từ sảnh phẩm kèm theo

$$\pi^- + p \to \Lambda^0 + K^0\,.$$

Bảo toàn tính chẵn lẻ trong sản phẩm kèm theo, mà nó chính là tương tác mạnh, đòi hỏi hạt Λ^0 phải phân cực ngang với spin định hướng vuông góc với mặt phản ứng. Thực nghiệm cho thấy nếu động lượng của hạt π^- tới lớn hơn 1 GeV/c một chút, độ phân cực của Λ^0 cỡ 0,7. Lấy mặt phẳng sản phẩm của

Λ^0, cũng chính là mặt phẳng chứa phương tới của π^- và của hạt Λ^0 được sinh ra (K^0 cũng phải nằm trong mặt phẳng này để thỏa mãn sự bảo toàn động lượng) và sự chênh lệch tốc độ đếm của π^- (hoặc p) phát ra trong phân rã Λ^0 giữa không gian bên trên và bên dưới mặt phẳng ($\theta = 0$ tới $\pi/2$ và $\theta = \pi/2$ tới π). Một sự chênh lệch sẽ chỉ ra rằng tính chẵn lẻ không bảo toàn trong phân rã Λ^0. Một thí nghiệm được tiến hành bởi Eister vào năm 1957 sử dụng một chùm π^- tới có động lượng là $910 \sim 1300$ MeV/c và tạo ra độ phân cực $P = 0,7$. Chú ý trong quá trình trên, tính không đối xứng trong việc phát ra π^- xuất phát từ sự phân cực của Λ^0. Nếu hạt Λ^0 có $P = 0$ thì thí nghiệm không thể sử dụng để thử sự bảo toàn tính chẵn lẻ.

3054

Hạt Λ và p có spin 1/2, và π có spin 0.

(a) Giả sử rằng Λ phân cực theo phương z và phân rã khi đứng yên, $\Lambda \to p + \pi^-$. Phân bố góc cho phép tổng quát nhất của π^- là gì? Hạn chế nào được đưa ra thêm bởi sự bất biến tính chẵn lẻ?

(b) Làm thế nào để tạo ra các hạt Λ phân cực?

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Trạng thái spin ban đầu của hạt Λ là $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$. Sự bảo toàn momen động lượng đòi hỏi số lượng tử quỹ đạo của hệ πp trạng thái cuối phải là $l = 0$ hoặc 1 (**Bài tập 3053**).

Nếu $l = 0$, hàm sóng trạng thái cuối là $\Psi_s = a_s Y_{00}|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$, trong đó a_s là biên độ sóng s trong phân rã, $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ là trạng thái spin proton, Y_{00} là hàm sóng chuyển động trên quỹ đạo.

Nếu $l = 1$, hàm sóng trạng thái cuối là

$$\Psi_p = a_p\left(\sqrt{\frac{2}{3}}Y_{11}\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}Y_{10}\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle\right),$$

trong đó a_p là biên độ sóng p trong phân rã, $\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{1}{3}}$ là hệ số Clebsch-Gordan.

Với $Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$, $Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$, $Y_{11} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}e^{i\varphi}\sin\theta$, ta có

$$\Psi_s = \frac{a_s}{\sqrt{4\pi}}\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle,$$

$$\Psi_p = -\frac{a_p}{\sqrt{4\pi}}\left(e^{i\varphi}\sin\theta\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle + \cos\theta\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\right).$$

và hàm sóng tổng hợp ở trạng thái cuối là

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\left((a_s - a_p\cos\theta)\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle - a_p e^{i\varphi}\sin\theta\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\right).$$

Khi đó phân bố xác suất là

$$\Psi^*\Psi \propto |a_s - a_p\cos\theta|^2 + |a_p\sin\theta|^2 = |a_s|^2 + |a_p|^2 - 2\mathrm{Re}(a_s a_p^*)\cos\theta.$$

Do vậy phân bố góc của pion có dạng

$$I(\theta) = C(1 + \alpha\cos\theta),$$

Trong đó α, C là hằng số.

Các hạt Λ, p, π có tính chẵn lẻ lần lượt là $+, +, -$. Nếu tính chẵn lẻ được bảo toàn trong phân rã, $l = 0$ sẽ bị cấm $a_s = 0$, và phân bố góc của pion bị giới hạn bởi tính đối xứng phản chiếu không gian là đối xứng ở phía trên và phía dưới mặt phẳng phân rã. Nếu kết quả thu được khác thì tính chẵn lẻ không bảo toàn.

(b) Các hạt Λ^0 phân cực có thể được tạo ra bằng cách bắn phá một bia proton bằng pion

$$\pi^- + p \to \Lambda^0 + K^0.$$

Các hạt Λ^0 được tạo ra phân cực vuông góc với mặt phẳng của sản phẩm.

3055

(a) Như đã biết, tính chẵn lẻ không bảo toàn trong phân rã $\Lambda \to p + \pi^-$. Điều này được phản ánh trong sự kiện sau. Nếu hạt Λ phân cực hoàn toàn, chẳng hạn là theo phương z khi đó phân bố góc của proton tuân theo

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega} = A(1 + \lambda\cos\theta).$$

Cho trước tham số λ, tìm sự phân cực dọc của proton nếu Λ không phân cực?

(b) Nói chung đối với phân rã hyperon biến đổi số lạ, ví dụ $\Lambda \to p\pi^-$, $\Lambda \to n\pi^0$, $\Sigma^+ \to n\pi^+$, $\Sigma^+ \to p\pi^0$, $\Sigma^- \to n\pi^-$, $K^+ \to \pi^+\pi^0$, $K_s^0 \to \pi^+\pi^-$, $K_s^0 \to \pi^0\pi^0$, .., có rất nhiều bằng chứng cho tính hiệu lực gần đúng của cái gọi là quy tắc $\Delta I = \frac{1}{2}$(Hamintonian chuyển tiếp có vai trò giống như một bội đôi spin đồng vị). Quy tắc $\Delta I = \frac{1}{2}$ 2 dự đoán như thế nào về tốc độ tương đối của $K^+ \to \pi^+\pi^0$, $K_s^0 \to \pi^+\pi^-$, $K_s^0 \to \pi^0\pi^0$?

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Tính chẵn lẻ bị vi phạm trong phân rã Λ^0 và quá trình phân rã được mô tả bằng sóng s và p với biên độ a_s and a_p **(Bài tập 3053)**. Theo lý thuyết về độ xoắn của phân rã, một hyperon với spin 1/2 phân rã khi đứng yên và phát ra một proton dọc theo phương $\Omega = (\theta, \phi)$ có biên độ phân rã là

$$f_{\lambda M}(\theta, \phi) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \mathcal{D}^{1/2}_{M\lambda'}(\phi, \theta, 0) a_{\lambda'} ,$$

trong đó M và λ' lần lượt là hình chiếu spin của Λ^0 và độ xoắn của proton. Ta sử dụng a_+ và a_- để biểu thị biên độ phân rã của hai độ xoắn khác nhau. Sự bảo toàn tính chẵn lẻ cần có $a_+ = -a_-$. Tốc độ phân rã tổng cộng sẽ là

$$W = |a_+|^2 + |a_-|^2 .$$

Phân bố góc của một hạt sinh ra khi phân rã ở trạng thái nghỉ của một hyperon Λ^0 phân cực dọc theo trục z là

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{d\Omega} &= \frac{1}{W} \sum_{\lambda'} |f_{\lambda', 1/2}(\theta, \phi)|^2 \\
&= (2\pi W)^{-1} \sum_{\lambda'} |a_{\lambda'}|^2 [d^{1/2}_{1/2, \lambda'}(\theta)]^2 \\
&= (2\pi W)^{-1} \left(|a_+|^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + |a_-|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\
&= A(1 + \lambda \cos \theta) ,
\end{aligned}$$

trong đó $d^{1/2}_{1/2, \lambda'}(\theta) = \mathcal{D}^{1/2}_{M\lambda'}(\phi, \theta, 0)$, $A = \frac{1}{4\pi}$, $\lambda = \frac{|a_+|^2 - |a_-|^2}{|a_+|^2 + |a_-|^2}$. Chú ý rằng $\lambda = 0$ nếu tính chẵn lẻ được bảo toàn.

Giá trị mong đợi của độ xoắn của các proton sinh ra từ phân rã của các hạt Λ^0 không phân cực là

$$P = (2W)^{-1}\sum_{M}\int\left(\frac{1}{2}|f_{1/2,M}|^2 - \frac{1}{2}|f_{-1/2,M}|^2\right)d\Omega$$

$$= (2W)^{-1}\sum_{M}\int\sum_{\lambda'}\lambda'|f_{\lambda',M}|^2 d\Omega$$

$$= (2W)^{-1}\sum_{M}\sum_{\lambda'}\lambda'|a_{\lambda'}|^2(2\pi)^{-1}\int|d^{1/2}_{M\lambda'}(\theta)|^2 d\Omega$$

$$= W^{-1}\sum_{\lambda'}\lambda'|a_{\lambda'}|^2 ,$$

trong đó ta đã sử dụng

$$\sum_{M'}(d^J_{MM'}(\theta))^2 = \sum_{M'}d^J_{MM'}(-\theta)d^J_{M'M}(\theta) = d^J_{MM}(\theta) .$$

Từ đó

$$P = \frac{1}{2}\frac{|a_+|^2 - |a_-|^2}{|a_+|^2 + |a_-|^2} = \frac{1}{2}\lambda .$$

(b) Trong phân rã

$$K^+ \to \pi^+\pi^0 ,$$

$$K^0_s \to \pi^+\pi^- ,$$

$$K^0_s \to \pi^0\pi^0 ,$$

trạng thái cuối bao gồm 2 boson và vì vậy hàm sóng toàn phần sẽ đối xứng. Do spin của K là 0, nên momen động lượng trạng thái cuối là 0. Khi đó do pion có spin 0, nên $l = 0$ ở trạng thái cuối, có nghĩa là hàm sóng không gian đối xứng. Do vậy tính đối xứng của hàm sóng toàn phần đòi hỏi hàm sóng spin đồng vị trạng thái cuối cũng phải đối xứng, nghĩa là $I = 0, 2$ do pion có spin đồng vị 1. Các phân rã yếu cần có $\Delta I = \frac{1}{2}$. Do K có isospin $\frac{1}{2}$ nên hệ hai π phải có $I = 0, 1$. Do vậy, $I = 0$.

Đối với $K^+ \to \pi^+\pi^0$, trạng thái cuối có $I_3 = 0 + 1 = 1$. Do $I = 0$ hoặc 2 và $I \geq I_3$, nên ta có $I = 2$ ở trạng thái cuối. Điều này không tuân theo quy tắc $\Delta I = 1/2$ nên quá trình này không diễn ra. Thực nghiệm thu được

$$\sigma(K^0_S \to \pi^+\pi^-)/\sigma(K^+ \to \pi^+\pi^0) \approx 455 \gg 1 .$$

Mặt khác, trong $K_S^0 \to \pi^+\pi^-$ hay $\pi^0\pi^0$, do K^0, π^+, π^0, π^- có $I_3 = -\frac{1}{2}, 1, 0, -1$ một cách tương ứng nên trạng thái cuối có $I_3 = 0$, $I = 0$ hoặc 2. Tính đối xứng của hàm sóng đòi hỏi $I = 0$. Do vậy quy tắc $\Delta I = \frac{1}{2}$ được thỏa mãn và trạng thái spin cuối là $|I, I_3\rangle = |0,0\rangle$. Khai triển hàm sóng spin ta được

$$|I, I_3\rangle = |0,0\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}(|1,1;1,-1\rangle + |1,-1;1,1\rangle - |1,0,1,0\rangle)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3}}(|\pi^+\pi^-\rangle + |\pi^-\pi^+\rangle - |\pi^0\pi^0\rangle)\,.$$

Do đó ta có

$$\frac{K_s^0 \to \pi^+\pi^-}{K_s^0 \to \pi^0\pi^0} = 2\,.$$

3056

(a) Hãy môt tả thí nghiệm sự vi phạm CP trong phân rã K^0 và giải thích tại sao thí nghiệm này là đặc biệt thích hợp.

(b) Tìm tỉ số của K_S (K ngắn) so với K_L (K) dài) trong một chùm kaon trung hòa 10 GeV/c cách nơi chùm hạt được tạo ra 20 m.

$$(\tau_{K_L} = 5 \times 10^{-8}\text{ s}, \quad \tau_{K_s} = 0,86 \times 10^{-10}\text{ s})$$

(*SUNY, Buffalo*)

Lời giải:

(a) Nhóm làm việc J. W. Cronin vào năm 1964 đã phát hiện rằng rất ít K^0 phân rã thành hai hạt thuộc pion sau khi bay một đoạn 5,7 fut từ nơi sinh ra. Do thời gian sống của K_S^0 ngắn nên hầu hết K_S^0 sẽ phân hủy trong vài xentimet từ nơi sinh ra. Do vậy chùm kaon ở khoảng cách 5,7 fut tính từ nơi sinh ra sẽ chỉ gồm K_L^0. Nếu CP được bảo toàn, K_L^0 sẽ phân rã thành 3 π. Sự xuất hiện của phân rã 2π có nghĩa là sự bảo toàn CP bị vi phạm trong phân rã K_L^0. Sự vi phạm CP có thể nghiên cứu bằng cách sử dụng phân rã K^0 bởi vì chùm K^0 là một hỗn hợp của K_1^0 với $\eta_{CP} = 1$ và K_2^0 với $\eta_{CP} = -1$, chúng có giá trị riêng CP khác nhau chứng tỏ các kiểu phân rã 3π và 2π có thời gian sống khác nhau. Tỉ số phân nhánh là

$$R = \frac{K_L^0 \to \pi^+\pi^-}{K_L^0 \to all} \approx 2 \times 10^{-3}$$

lượng tử hóa sự vi phạm CP. K_L^0 ứng với K_2^0 có $\eta_{CP} = -1$ và chỉ có thể phân rã thành các hạt 3 π. Thực nghiệm phát hiện ra rằng K_L^0 cũng phân rã thành các 2 π, cụ thể là $R \neq 0$. Do $\eta_{CP}(\pi^+\pi^+) = +1$, nên sự vi phạm CP xảy ra trong phân rã K_L^0.

(b) Lấy $M_{K^0} \approx 0,5$ GeV/c^2. Khi đó $P_{K^0} \approx 10$ GeV/c cho ta

$$\beta\gamma \approx P_{K^0}/M_{K^0} = 20\,.$$

Khi K^0 được tạo ra, cường độ của K_L^0 có thời gian sống lâu và K_S^0 thời gian sống ngắn là bằng nhau

$$I_{L0} = I_{S0}\,.$$

Sau 20 m chuyển động ta có

$$I_L = I_{L0}e^{-t/\gamma\tau_L} = I_{L0}e^{-20/\beta\gamma c\tau_L}\,,$$

$$I_S = I_{S0}e^{-t/\gamma\tau_S} = I_{L0}e^{-20/\beta\gamma c\tau_S}\,,$$

và do vậy

$$I_S/I_L = e^{-\frac{20}{\beta\gamma c}\left(\frac{1}{\tau_S}-\frac{1}{\tau_L}\right)} \approx e^{-38,7} \approx 1,6\times 10^{-17}\,.$$

Vì vậy sau 20 m, hạt 2π gần như phân rã hoàn toàn thành K_L^0.

3057

Các trạng thái meson K trung hòa $|K^0\rangle$ và $|\bar{K}^0\rangle$ có thể biểu diễn theo các trạng thái $|K_L\rangle$, $|K_S\rangle$

$$|K^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_L\rangle + |K_S\rangle)\,,$$

$$|\bar{K}^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_L\rangle - |K_S\rangle)\,.$$

$|K_L\rangle$ và $|K_S\rangle$ là các trạng thái với thời gian sống xác định $\tau_L \equiv \frac{1}{\gamma_L}$ và $\tau_S \equiv \frac{1}{\gamma_S}$, và năng lượng nghỉ phân biệt $m_Lc^2 \neq m_Sc^2$. Tại thời điểm $t = 0$, một meson được sinh ra trong trạng thái $|\psi(t=0)\rangle = |K^0\rangle$. Gọi xác suất tìm thấy hệ trong trạng thái $|K^0\rangle$ tại thời điểm t là $P_0(t)$ và xác suất tìm thấy hệ trong trạng thái

$|K^0\rangle$ tại thời điểm t là $\bar{P}_0(t)$. Tìm biểu thức $P_0(t) - \bar{P}_0(t)$ theo γ_L, γ_S, m_Lc^2 và m_Sc^2 (Bỏ qua sự vi phạm CP). (*Columbia*)

Lời giải:

Ta có tại thời điểm t

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iHt}|\psi(0)\rangle = e^{-iHt}|K^0\rangle$$

$$= e^{-iHt}\frac{1}{\sqrt{2}}(|K_L\rangle + |K_S\rangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}[e^{-im_Lt-\gamma_Lt/2}|K_L\rangle + e^{-im_St-\gamma_St/2}|K_S\rangle],$$

trong đó thừa số $\exp(-\gamma_Lt/2)$, $\exp(-\gamma_St/2)$ biểu thị sự tắt dần của các hàm sóng (số hạt $\propto \bar{\Psi}\Psi$). Do vậy

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{e^{-im_Lt-\gamma_Lt/2}\frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle)\right.$$

$$\left.+ e^{-im_St-\gamma_St/2}\frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\{[e^{-im_Lt-\gamma_Lt/2} + e^{-im_St-\gamma_St/2}]|K^0\rangle$$

$$+ [e^{-im_Lt-\gamma_Lt/2} - e^{-im_St-\gamma_St/2}]|\bar{K}^0\rangle\},$$

và do đó ta có

$$\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = P_0(t) + \bar{P}_0(t),$$

trong đó

$$P_0(t) = \frac{1}{4}\{e^{-\gamma_Lt} + e^{-\gamma_St} + 2e^{-(\gamma_L+\gamma_S)t/2}\cos[(m_L - m_S)t]\},$$

$$\bar{P}_0(t) = \frac{1}{4}\{e^{-\gamma_Lt} + e^{-\gamma_St} - 2e^{-(\gamma_L+\gamma_S)t/2}\cos[(m_L - m_S)t]\}.$$

Vì vậy ta có

$$P_0(t) - \bar{P}_0(t) = e^{-(\gamma_L+\gamma_S)t/2}\cos[(m_L - m_S)t].$$

3058

(a) Hãy giải thích làm sao ta có thể sử dụng tính trội của một trong 4 phản ứng sau đây để tạo ra một chùm kaon trung hòa "thuần" (có nghĩa là không

bị pha tạp bởi sự có mặt của các phản hạt của nó).

$$\pi^- p \to (\Lambda^0 \text{ hoặc } K^0)(K^0 \text{ hoặc } \bar{K}^0) .$$

(b) Một chùm kaon trung hòa thuần được tạo ra theo cách trên. Tại thời điểm $t = 0$, tìm giá trị của tham số phản đối xứng điện tích δ mà nó cho ta số phân rã $e^+\pi^-\nu$ so với số phân rã $e^-\pi^+\nu^-$ như sau

$$\delta = \frac{N(e^+\pi^-\nu) - N(e^-\pi^+\bar{\nu})}{N(e^+\pi^-\nu) + N(e^-\pi^+\bar{\nu})} .$$

(c) Trong gần đúng bảo toàn CP, tính trạng thái của tham số phản đối xứng điện tích δ như là một hàm của thời gian phù hợp. Giải thích cách sử dụng sự phụ thuộc vào thời gian của δ để tách ra được hiệu số δm khối lượng giữa kaon trung hòa thời gian sống ngắn K_S^0 với kaon trung hòa thời gian sống dài K_L^0.

(d) Chỉ ra ảnh hưởng của sự không bảo toàn nhỏ CP lên sự phụ thuộc của δ vào thời gian riêng.

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Phản ứng $\pi^- p \to \Lambda^0 K^0$ tuân theo tất cả các định luật bảo toàn, bao gồm cả $\Delta S = 0$, $\Delta I_z = 0$, do nó xảy ra theo tương tác mạnh. K^0 không thể thay bằng $\bar{K}^0$ mà không vi phạm quy tắc $\Delta I_z = 0$. Do vậy nó có thể được sử dụng để tạo ra chùm K^0 thuần.

(b) Khi $t = 0$, chùm hạt chỉ gồm có K^0. Các phân rã thông qua tương tác yếu tuân theo các quy tắc lựa chọn

$$|\Delta S| = 1, \qquad |\Delta I| = |\Delta I_3| = \frac{1}{2} .$$

Khi đó $K^0 \to \pi^- e^+ \nu$ được phép và $K^0 \to \pi^+ e^- \bar{\nu}$ là bị cấm,

$$\delta(t=0) = \frac{N(e^+\pi^-\nu) - N(e^-\pi^+\bar{\nu})}{N(e^+\pi^-\nu) + N(e^-\pi^+\bar{\nu})} = 1 .$$

(c) Tại thời điểm $t = 0$,

$$|K_L^0(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|K^0(0)\rangle ,$$

$$|K_S^0(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|K^0(0)\rangle .$$

Tại thời điểm t

$$|K_L^0(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|K^0(0)\rangle e^{-(im_L t+\Gamma_L t/2)},$$

$$|K_S^0(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|K^0(0)\rangle e^{-(im_S t+\Gamma_S t/2)}.$$

Do vậy

$$K^0(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_S^0(t)\rangle + |K^0(t)\rangle)$$

$$= \frac{1}{2}|K^0(0)\rangle[e^{-(im_S t+\Gamma_S t/2)} + e^{-(im_L t+\Gamma_L t/2)}],$$

$$\bar{K}^0(t)\rangle = \frac{1}{2}|K^0(0)\rangle[e^{-(im_S t+\Gamma_S t/2)} - e^{-(im_L t+\Gamma_L t/2)}].$$

Chú ý rằng số hạng $\Gamma t/2$ trong các số mũ là ứng với sự giảm dần của K_S^0 và K_L^0 do phân rã.

Nếu xác suất phân rã $N(K^0 \to \pi^- e^+ \nu) = N(\bar{K}^0 \to \pi^+ e^- \bar{\nu})$, thì ta có

$\delta(t)$

$$= \frac{|e^{-(im_S+\Gamma_S/2)t} + e^{-(im_L+\Gamma_L/2)t}|^2 - |e^{-(im_S+\Gamma_S/2)t} - e^{-(im_L+\Gamma_L/2)t}|^2}{|e^{-(im_S+\Gamma_S/2)t} + e^{-(im_L+\Gamma_L/2)t}|^2 + |e^{-(im_S+\Gamma_S/2)t} - e^{-(im_L+\Gamma_L/2)t}|^2}$$

$$= \frac{2e^{-(\Gamma_L+\Gamma_S)t/2}\cos(\Delta m t)}{e^{-\Gamma_L t} + e^{-\Gamma_S t}}.$$

Do vậy từ đường cong dao động của $\delta(t)$, ta có thể rút ra $\Delta m \equiv |m_L - m_S|$.

(d) Nếu có một sự không bảo toàn CP nhỏ, coi nó là một phần rất nhỏ ε. Khi đó ta có

$$|K^0(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[(1+\varepsilon)|K_S^0(t)\rangle + (1-\varepsilon)|K_L^0(t)\rangle]$$

$$= \frac{1}{2}|K^0(0)\rangle\{(e^{-(im_S t+\Gamma_S t/2)} + e^{-(im_L t+\Gamma_L t/2)})\}$$

$$+ \varepsilon(e^{-(im_S t+\Gamma_S t/2)} - e^{-(im_L t+\Gamma_L t/2)}),$$

$$|\bar{K}^0(t)\rangle = \frac{1}{2}|K^0(0)\rangle\{(e^{-(im_S t+\Gamma_S t/2)} - e^{-(im_L t+\Gamma_L t/2)})$$

$$+ \varepsilon(e^{-(im_S t+\Gamma_S t/2)} + e^{-(im_L t+\Gamma_L t/2)})\},$$

vì vậy

$$\delta(t) = \frac{\langle K^0(t)|K^0(t)\rangle - \langle \bar{K}^0(t)|\bar{K}^0(t)\rangle}{\langle K^0(t)|K^0(t)\rangle + \langle \bar{K}^0(t)|\bar{K}^0(t)\rangle}$$

$$\approx \frac{2e^{-(\Gamma_L+\Gamma_S)t/2}\cos(\Delta mt)}{e^{-\Gamma_L t} + e^{-\Gamma_S t}} + Re(\varepsilon)\,.$$

3059

Trong mô hình Weinberg-Salam, các tương tác yếu diễn ra qua trung gian là 3 boson vectơ nặng, W^+, W^- và Z^0, với khối lượng cho bởi

$$M_W^2 = (\pi\alpha/\sqrt{2})G\sin^2\theta\,,$$

$$M_Z^2 = M_W^2/\cos^2\theta\,,$$

Trong đó α là hằng số cấu trúc tinh tế, θ là "góc pha trộn yếu" hay "góc Weinberg", và G là hằng số Fermi. Lagrangian tương tác giữa các electron, positron, nơtrino-electron và các W, Z^0 là

$$L_{\text{INT}} = \frac{\sqrt{\pi\alpha}}{\sin\theta}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}W_+^\mu\bar{\nu}\gamma_\mu(1-\gamma_5)e + \frac{1}{\sqrt{2}}W_-^\mu\bar{e}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2\cos\theta}Z^\mu[\bar{\nu}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu - \bar{e}\gamma_\mu(1-\gamma_5)e + 4\sin^2\theta\bar{e}\gamma_\mu e]\right\},$$

Trong đó ν và e là các trường Dirac. Xét tán xạ đàn hồi của phản nơtrino electron với electron

$$\bar{\nu}e^- \to \bar{\nu}e^-\,.$$

(a) Vẽ các sơ đồ Feymann bậc thấp nhất cho quá trình này. Kí hiệu cho từng đường.

(b) Nếu năng lượng của electron và phản nơtrino là nhỏ so với M_W, thì tương tác giữa chúng có thể biểu diễn bằng một Lagragian hiệu dụng 4 fecmion. Viết hàm Lagrangian hiệu dụng chính xác và đưa nó về dạng

$$L_{\text{eff}} = \frac{G}{\sqrt{2}}[\bar{\nu}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu][\bar{e}\gamma_\mu(A-B\gamma_5)e]\,,$$

Trong đó A và B là hai hàm xác định của θ.

CHÚ Ý: nếu ψ_1 và ψ_2 là các trường Dirac phản giao hoán thì

$$[\bar{\psi}_1\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_2][\bar{\psi}_2\gamma_\mu(1-\gamma_5)\psi_1] = [\bar{\psi}_1\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_1][\bar{\psi}_2\gamma_\mu(1-\gamma_5)\psi_2]$$

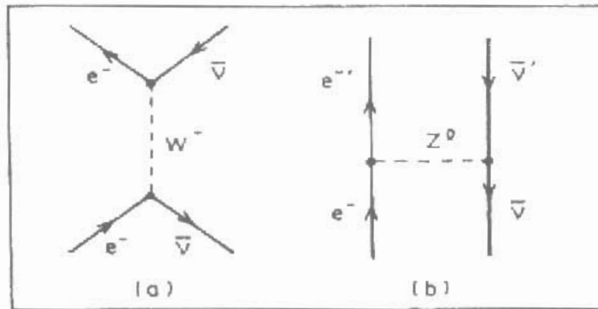
(c) Thí nghiệm nào có thể dùng để xác định A và B?

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Tán xạ đàn hồi $\bar{\nu}e$ có thể tiến hành bằng cách trao đổi W^- hoặc Z^0. Các sơ đồ Feymann bậc thấp nhất được thể hiện trong hình 3.16.

(b) Từ Lagrangian đã cho, ta có thể viết được Lagrangian cho 2 sơ đồ. Đối với hình 3.16(a)



Hình 3.16

$$L(e\bar{\nu}W) = \left(\sqrt{\frac{\pi\alpha}{2}}\frac{1}{\sin\theta}\right)^2 [\bar{\nu}\gamma^\mu(1-\gamma_5)e\cdot\frac{g^{\mu\nu}-(k^\mu k^\nu/M_W^2)}{M_W^2-k^2}\bar{e}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu]$$

$$= \frac{\pi\alpha}{2\sin^2\theta}[\bar{\nu}\gamma^\mu(1-\gamma_5)e\cdot\frac{g^{\mu\nu}-(k^\mu k^\nu/M_W^2)}{M_W^2-k^2}\bar{e}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu]\,.$$

Ở năng lượng thấp, $M_W^2 \gg k^2$ và phương trình trên có thể rút gọn thành

$$L(e\bar{\nu}W) = \frac{\pi\alpha}{2\sin^2\theta M_W^2}[\bar{\nu}\gamma^\mu(1-\gamma_5)e][\bar{e}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu]\,.$$

ν và e là các trường Dirac nên ta có

$$[\bar{\nu}\gamma^\mu(1-\gamma_5)e][\bar{e}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu] = [\bar{\nu}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu][\bar{e}\gamma_\mu(1-\gamma_5)e]\,,$$

và Lagrangian là

$$L(e\bar{\nu}w) = \frac{G}{\sqrt{2}}[\bar{\nu}\gamma^{\mu}(1-\gamma_5)\nu][\bar{e}\gamma_{\mu}(1-\gamma_5)e],$$

Do $G = \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}\sin^2\theta M_W^2}$.

Đối với hình 3.16(b), Lagrangian hiệu dụng là

$$L(e\bar{\nu}Z^0) = \frac{\pi\alpha^2}{\sin^2\theta \cdot 4\cos^2\theta} \times \left[\bar{\nu}\gamma^{\mu}(1-\gamma_5)\nu \cdot \frac{g^{\mu\nu} - (k^{\mu}k^{\nu}/M_Z^2)}{M_Z^2 - k^2} \cdot \bar{e}\gamma_{\mu}(g_V - g_A\gamma_5)e\right],$$

trong đó $g_V = -1 + 4\sin^2\theta$, $g_A = -1$. Nếu $M_Z^2 \gg k^2$ biểu thức trên có thể rút gọn thành dạng đối với tương tác trực tiếp của 4 fecmion

$$\begin{aligned} L(e\bar{\nu}Z^0) &= \frac{\pi\alpha^2}{4\sin^2\theta\cos^2\theta M_Z^2}[\bar{\nu}\gamma^{\mu}(1-\gamma_5)\nu][\bar{e}\gamma_{\mu}(g_V - g_A\gamma_5)e] \\ &= \frac{G}{2\sqrt{2}}[\nu\gamma^{\mu}(1-\gamma_5)\nu][\bar{e}\gamma_{\mu}(g_V - g_A\gamma_5)e], \end{aligned}$$

do

$$M_Z^2 = \frac{M_W^2}{\cos^2\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{\sqrt{2}G\sin^2\theta\cos^2\theta}.$$

Lagrangian hiệu dụng toàn phần là tổng của hai sơ đồ

$$\begin{aligned} L_{\text{eff}} &= L(e\bar{\nu}W) + L(e\bar{\nu}Z^0) \\ &= \frac{G}{\sqrt{2}}[\bar{\nu}\gamma^{\mu}(1-\gamma_5)\nu][\bar{e}\gamma_{\mu}(1-\gamma_5)e] \\ &\quad + \frac{G}{2\sqrt{2}}[\bar{\nu}\gamma^{\mu}(1-\gamma_5)\nu][\bar{e}\gamma_{\mu}(g_V - g_A\gamma_5)e] \\ &= \frac{G}{\sqrt{2}}[\bar{\nu}\gamma^{\mu}(1-\gamma_5)\nu]\left[e\gamma_{\mu}\left(1 + \frac{g_V}{2} - \gamma_5 - \frac{g_A}{2}\gamma_5\right)e\right] \\ &= \frac{G}{\sqrt{2}}[\nu\gamma^{\mu}(1-\gamma_5)\nu][\bar{e}\gamma_{\mu}(A - B\gamma_5)e], \end{aligned}$$

trong đó $A = 1 + g_V/2$, $B = 1 + g_A/2$.

(c) Nhiều thí nghiệm đã được tiến hành để xác định A và B, trong đó kết quả tốt nhất là từ tán xạ neutrino như $\nu_\mu e^-$, $\bar{\nu}_\mu e$. Ngoài ra, các thí nghiệm về tính phản đối xứng của điện tích l trong $e^+e^- \to l^+l^-$ cũng cho ra g_V và g_A, và do vậy cũng tính được A và B.

Để ý chùm va chạm $p\bar{p}$ của CERN đã được sử dụng để đo khối lượng của W và Z một cách trực tiếp và cho ra

$$M_W = (80,8 \pm 2,7) \text{ GeV},$$

$$M_{Z^0} = (92,9 \pm 1,6) \text{ GeV},$$

và $\sin^2\theta = 0,224$.

3060

Một phép thử quan trọng trong lý thuyết hiện đại về tương tác yếu liên quan tới tán xạ đàn hồi của nơtrino loại μ trên electron

$$\nu_\mu + e^- \to \nu_\mu + e^- .$$

Đối với năng lượng thấp điều này có thể được mô tả bằng mật độ Hamintonian tương tác hiệu dụng

$$H_{\text{eff}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_\nu\gamma^\alpha(1+\gamma_5)\psi_\nu\bar{\psi}_e\{g_V\gamma_\alpha + g_A\gamma_\alpha\gamma_5\}\psi_e ,$$

trong đó G_F là hằng số Fermi và g_V, g_A là các tham số không thứ nguyên. Gọi $\sigma(E)$ là tiết diện toàn phần cho quá trình này, trong đó E là năng lượng toàn phần trong hệ khối tâm, và lấy $E \gg m_e$. Giả sử rằng bia electron là không phân cực.

(a) Ở mức thứ nguyên thuần túy, hãy xác định $\sigma(E)$ phụ thuộc như thế nào vào năng lượng E.

(b) Gọi $\frac{\partial\sigma}{\partial E}|_{0^0}$ là đạo hàm của tiết diện vi sai trong hệ khối tâm đối với tán xạ thuận chiều. Hãy tính cụ thể đạo hàm này dựa trên E, G_F, g_V, g_A.

(c) Trình bày ngắn gọn (và có thể vẽ sơ đồ Feymann) xem tại sao quá trình này lại được cho là xuất phát từ tương tác của môt boson vectơ với các "dòng" trung hòa.

(Princeton)

Lời giải:

(a) Cho $E \gg m_e$, ta có thể coi $m_e \approx 0$ và viết tiết diện tương tác yếu bậc nhất là $\sigma(E) \approx G_F^2 E^k$, trong đó k là một hằng số cần xác định. Trong hệ đơn

vị của chúng ta, $\hbar = 1$, $c = 1$, $\hbar c = 1$. Từ đó $[E] = M$. Do $[\hbar c] = [ML] = 1$, $[\sigma] = [L^2] = M^{-2}$. Ngoài ra, $[G_F] = \left[\frac{(\hbar c)^3}{(Mc^2)^2}\right] = M^{-2}$. Do vậy $k = -2 + 4 = 2$ và do đó ta có

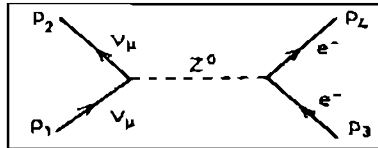
$$\sigma(E) \approx G_F^2 E^2 .$$

(b) Sơ đồ Feymann bậc thấp nhất cho $\nu_\mu e \to \nu_\mu e$ được thể hiện trong hình 3.17. Trong hệ khối tâm, lấy $m_\nu = 0$, $m_e \approx 0$ ta có

$$p_1 = p_3 = k = (p, \mathbf{p}) ,$$

$$p_2 = p_4 = p \approx (p, -\mathbf{p}) ,$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|F|^2}{64\pi^2 S}$$



Hình 3.17

với $S = E^2$. Bình phương của biên độ tán xạ trên cơ sở H_{eff} là

$$|F|^2 = \frac{G_F^2}{2}\text{Tr}\,[\not k\gamma^\alpha(1+\gamma_5)\not k\gamma^\beta(1+\gamma_5)]$$
$$\times \frac{1}{2}\text{Tr}\,[\not p(g_V\gamma_\alpha + g_A\gamma_\alpha\gamma_5)\not p(g_V\gamma_\beta + g_A\gamma_\beta\gamma_5)] ,$$

trong đó sử dụng mối liên hệ $\sum_{P_s} \bar{u}u = \not p + m$, với $\not p = \gamma_\mu p^\mu$. Chú ý rằng thừa số $\frac{1}{2}$ xuất phát từ việc lấy trung bình theo các spin của electron tương tác, trong khi đó các nơtrino đều là bên trái và không cần lấy trung bình. Xét

$$\text{Tr}\,[\not k\gamma^\alpha(1+\gamma_5)\not k\gamma^\beta(1+\gamma_5)] = 2\text{Tr}\,[\not k\gamma^\alpha\not k\gamma^\beta(1+\gamma_5)]$$
$$= 8(k^\alpha k^\beta - k^2 g^{\alpha\beta} + k^\beta k^\alpha + i\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}k_\gamma k_\delta) .$$

Số hạng cuối trong dấu ngoặc là bằng 0 bởi vì dấu của nó thay đổi khi chỉ số γ, δ được đổi chỗ. Với một nơtrino ta cũng có $k^2 = 0$. Do vậy biểu thức trên có thể rút gọn thành

$$\text{Tr}\,(\not k\gamma^\alpha(1+\gamma_5)\not k\gamma^\beta(1+\gamma_5)] = 16k^\alpha k^\beta .$$

Vết thứ hai cũng đơn giản hóa một cách tương tự

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,[\not{p}(g_V\gamma_\alpha + g_A\gamma_\alpha\gamma_5)\not{p}(g_V\gamma_\beta + g_A\gamma_\beta\gamma_5)]$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,[g_V^2\not{p}\gamma_\alpha\not{p}\gamma_\beta + 2g_Vg_A\not{p}\gamma_\alpha\not{p}\gamma_\beta\gamma_5 + g_A^2\not{p}\gamma_\alpha\not{p}\gamma_\beta]$$

$$= 4(g_A^2 + g_V^2)^2 p_\alpha p_\beta \,.$$

Khi đó, do

$$k^\alpha p_\alpha^- k^\beta p_\beta = (p_1\cdot p_2)(p_3\cdot p_4) = (p^2 + \mathbf{p}\cdot\mathbf{p})^2 = \left[2\left(\frac{E}{2}\right)^2\right]^2 = \left(\frac{S}{2}\right)^2 .$$

ta có

$$|F|^2 = \frac{G_F^2}{2}\cdot 16\times 4\times\left(\frac{S}{2}\right)^2(g_A^2 + g_V^2)^2$$

$$= 8G_F^2S^2(g_A^2 + g_V^2)^2 ,$$

và

$$\sigma = \int d\sigma = \int \frac{G_F^2}{8\pi^2}S(g_A^2 + g_V^2)^2 d\Omega = \frac{G_F^2E^2}{2\pi}(g_A^2 + g_V^2)^2 .$$

Lấy đạo hàm ta được

$$\frac{d\sigma}{dE} = \frac{G_F^2E}{\pi}(g_A^2 + g_V^2)^2 .$$

Như vậy tiết diện phản ứng là đẳng hướng trong hệ quy chiếu khối tâm, và tiết diện toàn phần tỉ lệ với E^2.

(c) Tương tác được cho rằng xảy ra nhờ vào việc trao đổi boson trung gian Z^0 trung hòa như thể hiện trong hình 3.17 và do đó được gọi là tương tác dòng yếu trung hòa. Ví dụ, các tương tác khác như thế là

$$\nu_\mu + N \to \nu_\mu + N\,, \qquad \nu_e + \mu \to \nu_e + \mu\,,$$

Trong đó N là nucleon.

3061

Boson Z, phần tử trung gian của tương tác yếu được dự đoán trước với trọng lượng $M_Z \geq 80$ GeV.

(a) Cho rằng các tương tác điện từ và tương tác yếu gần đúng có cùng độ mạnh riêng (như trong các lý thuyết cỡ thống nhất) và dòng trung hòa và

dòng điện tích gần như có cường độ tương tương, hãy chỉ ra rằng đây là một giá trị khối lượng hợp lý (cho tới thừa số 5).

(b) Ước tính độ rộng và thời gian sống của Z^0.

(c) Bạn có thể sử dụng sản phẩm của Z^0 trong hủy cặp e^+e^- để xác định bằng thực nghiệm tỉ số phân nhánh thành nơtrino của Z^0được không? Nếu có, hãy liệt kê rõ ràng các đại lượng phải đo và làm thế nào để sử dụng nó.

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Phần tử trung gian của tương tác yếu là boson vectơ trung gian nặng $W^\pm$ và Z^0. Hằng số liên kết yếu g_W có thể liên hệ với hằng số Fermi G_F trong phân rã beta bởi biểu thức

$$\frac{g_W^2}{8M_W^2} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}\,.$$

Trong mô hình Weinberg-Salm, Z^0, là trung gian của nơtrino và electron, có hằng số liên kết g_Z liên hệ với hằng số liên kết điện từ g_e thông qua biểu thức

$$g_Z = \frac{g_e}{\sin\theta_W \cos\theta_W}\,,$$

trong khi g_W có thể cho bởi

$$g_W = \frac{g_e}{\sin\theta_W}\,,$$

với θ_W là góc pha trộn yếu, gọi là góc Weinberg,

$$g_e = \sqrt{4\pi\alpha}\,,$$

α là hằng số cấu trúc tinh tế. Mô hình này cũng cho ta

$$M_W = M_Z \cos\theta_W\,.$$

Vì vậy

$$M_Z = \frac{M_W}{\cos\theta_W} = \frac{1}{\sin 2\theta_W}\left(\frac{4\pi\alpha}{\sqrt{2}G_F}\right)^{\frac{1}{2}}\,.$$

Hằng số Fermi G_F có thể rút ra được từ khối lượng muyon thu được và thời gian sống là $1,166 \times 10^{-5}$ GeV^{-2}. Từ đó ta có

$$M_Z = \frac{74,6}{\sin 2\theta_W}\ \text{GeV}\,.$$

Với $M_Z \geq 80$ GeV, $\theta_W \leq 34,4^0$.

Ở giới hạn thấp 80 GeV, $\theta_W = 34,4°$ và hằng số kết hợp cho tương tác điện từ là:

$$g_e = g_W \sin\theta_W = 0,6 g_W \ ,$$

đối với tương tác dòng trung hòa là

$$g_Z = \frac{g_W}{\cos\theta_W} = 1,2 g_W \ ,$$

đối với tương tác dòng tích điện là

$$g_W \ .$$

Vì vậy 3 tương tác có độ mạnh cùng bậc về độ lớn nếu $M_Z \approx 80$ GeV.

(b) Sự liên kết của Z^0 và fecmion có thể viết dưới dạng tổng quát như sau

$$L^Z_{\text{int}} = -\frac{g_W}{4\cos\theta_W}\bar{f}\gamma^\mu(g_V - g_A\gamma_5) f Z_\mu \ ,$$

trong đó g_V và g_A đối với từng trường hợp là

$$\begin{aligned}
\nu_e, \nu_\mu, \cdots \quad & g_V = 1, \qquad g_A = 1 \,; \\
e, \mu, \cdots \quad & g_V = -1 + 4\sin^2\theta_W, \qquad g_A = -1 \,; \\
u, c, \cdots \quad & g_V = 1 - \frac{8}{3}\sin^2\theta_W, \qquad g_A = 1 \,; \\
d, s, \cdots \quad & g_V = -1 + \frac{4}{3}\sin^2\theta_W, \qquad g_A = -1 \,.
\end{aligned}$$

Xét một quá trình phân rã tổng quát

$$Z^0(P) \to f(p) + \bar{f}(q) \,.$$

Độ lớn T là

$$T = -\frac{ig_W}{4\cos\theta_W}\varepsilon^\nu_\mu(p)\bar{u}_\sigma(p)\gamma^\mu(g_V - g_A\gamma_5)\nu_\rho(q) \,.$$

Lấy tổng theo spin của fecmion, kênh phân rã quac và màu của quac, và lấy

trung bình theo ba hướng phân cực của Z^0, ta có

$$\sum |T|^2 = \frac{4n}{3}\left(\frac{g_W}{4\cos\theta_W}\right)^2\left(-g_{\mu\nu}+\frac{p_\mu p_\nu}{M_Z^2}\right)$$
$$\times\left[(g_V^2+g_A^2)(p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu - g^{\mu\nu} p\cdot g) - (g_V^2 - g_A^2)m^2 g^{\mu\nu}\right]$$
$$= \frac{4n}{3}\left(\frac{g_W}{4\cos\theta_W}\right)^2\left\{(g_V^2+g_A^2)\Big[p\cdot q\right.$$
$$\left. + \frac{2}{M_Z^2}(P\cdot p)(P\cdot q)\Big] + 3(g_V^2-g_A^2)m^2\right\},$$

trong đó m là khối lượng fecmion, n là số màu. Trong hệ quy chiếu đứng yên của Z^0, ta có

$$E = M_Z, \qquad \mathbf{p} = 0,$$
$$E_p = E_q = \frac{1}{2}M_Z, \qquad p = (E_p, \mathbf{p}), \quad q = (E_q, -\mathbf{p}),$$
$$|\mathbf{p}| = |\mathbf{q}| = \frac{1}{2}(M_Z^2 - 4m^2)^{1/2}.$$

và vì vậy $p\cdot q = \left(\frac{M_Z}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}(M_Z^2 - 4m^2) = \frac{1}{2}M_Z^2 - m^2$, $(P\cdot p)(P\cdot q) = \left(M_Z\cdot\frac{M_Z}{2}\right)^2 = \frac{M_Z^4}{4}$.

Thay vào ta có

$$\sum |T|^2 = \frac{4n}{3}\left(\frac{g_W}{4\cos\theta_W}\right)^2\left[(g_V^2+g_A^2)M_Z^2 + 2(g_V^2 - 2g_A^2)m^2\right].$$

Từ công thức đối với xác suất của phân rã hai thành phần của một hệ đứng yên ta có

$$d\Gamma = \frac{1}{32\pi^2}\frac{|\mathbf{p}|}{M_Z^2}\sum |T|^2 d\Omega,$$

bỏ qua khối lượng m của fecmion ta được

$$\Gamma(Z^0 \to f\bar{f}) = \frac{nG_F M_Z^3}{24\sqrt{2}\pi}(g_V^2 + g_A^2).$$

Để ý rằng ở trên ta đã sử dụng

$$|\mathbf{p}| \approx \frac{M_Z}{2}, \int d\Omega = 4\pi, \left(\frac{g_W}{4\cos\theta_W}\right)^2 = \frac{G_F}{2\sqrt{2}}M_Z^2.$$

Thay các giá trị của g_V, g_A, và n (đóng góp của màu) ta thu được

$$\Gamma(Z^0 \to \nu_e\bar{\nu}_e) = \Gamma(Z^0 \to \nu_\mu\bar{\nu}_\mu) = \frac{G_F M_Z^3}{12\sqrt{2}\pi},$$

$$\Gamma(Z^0 \to e^+e^-) = \Gamma(Z^0 \to \mu^+\mu^-) = \frac{G_F M_Z^3}{12\sqrt{2}\pi}(1 - 4\sin^2\theta_W + 8\sin^4\theta_W),$$

$$\Gamma(Z^0 \to u\bar{u}) = \Gamma(Z^0 \to c\bar{c}) = \frac{G_F M_Z^3}{4\sqrt{2}\pi}\left(1 - \frac{8}{3}\sin^2\theta_W + \frac{32}{9}\sin^4\theta_W\right),$$

$$\Gamma(Z^0 \to d\bar{d}) = \Gamma(Z^0 \to s\bar{s}) = \frac{G_F M_Z^3}{4\sqrt{2}\pi}\left(1 - \frac{4}{3}\sin^2\theta_W + \frac{8}{9}\sin^4\theta_W\right).$$

Tổng độ rộng của các phân nhánh này cho ta độ rộng toàn phần của Z^0

$$\Gamma_Z = \frac{G_F M_Z^3}{12\sqrt{2}\pi}\cdot 8N\left(1 - 2\sin^2\theta_W + \frac{8}{3}\sin^4\theta_W\right),$$

Trong đó N là số thế hệ của fecmion, mà hiện nay được cho là 3. Thời gian sống của Z^0 là $\tau = \Gamma_Z^{1}$.

(c) Sử dụng kết quả của câu (b) và áp dụng cho phân bố của màu quac ta có

$$\begin{aligned}\Gamma_{\nu\nu} : \Gamma_{\mu\mu} : \Gamma_{uu} : \Gamma_{dd} = {} & 1 : \left(1 - 4\sin^2\theta_W + \frac{8}{3}\sin^4\theta_W\right) \\ & : 3\left(1 - \frac{8}{3}\sin^2\theta_W + \frac{32}{9}\sin^4\theta_W\right) \\ & : 3\left(1 - \frac{4}{3}\sin^2\theta_W + \frac{8}{9}\sin^4\theta_W\right) \\ & \approx 1 : 0.5 : 1.8 : 2.3,\end{aligned}$$

trong đó sử dụng giá trị được chấp nhận gần đây $\sin^2\theta_W = 0,2196$.

Nếu ta chấp nhận có 3 thế hệ của lepton và quac thì ta có

$$B_{\mu\mu} = \frac{\Gamma_{\mu\mu}}{\Gamma_z} = \frac{1 - 4\sin^2\theta_W + \frac{8}{3}\sin^4\theta_W}{8\times 3(1 - 2\sin^2\theta_W + \frac{8}{3}\sin^4\theta_W)} \approx 3\%.$$

Tương tự đối với

$$\Sigma\Gamma_{\nu\nu} = \Gamma_{\nu_e} + \Gamma_{\nu_\mu} + \Gamma_{\mu_\tau} = \frac{G_F M_Z^3}{4\sqrt{2}\pi},$$

$$B_{\nu\nu} = \frac{\sum\Gamma_{\nu\nu}}{\Gamma_z} = 18\%.$$

Theo mô hình chuẩn, số thế hệ của lepton và quac là tương ứng; và số thế hệ của ν_i và l_i. cũng vậy. Nếu ta đo Γ_Z, ta có thể rút ra số thế hệ N. Khi đó bằng việc đo $B_{\mu\mu}$ ta có thể nhận được $\Gamma_{\mu\mu}$.

Sử dụng số thế hệ N và $\Gamma_{\mu\mu}$ ta có thể thu được $\Gamma_{\nu\nu} \approx 2\Gamma_{\mu\mu}$, $\sum\Gamma_{\nu\nu} = 2N\Gamma_{\mu\mu}$.

Trong sản phẩm của Z^0 trong hủy cặp e^+e^- ta có thể đo Γ_Z trực tiếp. Bởi vì sự phân tán năng lượng của chùm electron có thể lớn hơn Γ_Z, nên ta cũng đo $\Gamma_{\mu\mu}$ và Γ_h bằng cách đo số cặp muyon và hadron trong vùng cộng hưởng,

$$A_h = \int_{\text{vùng cộng hưởng}} \sigma_h dE \approx \frac{6\pi^2}{M_Z^2}\frac{\Gamma_h\Gamma_{ee}}{\Gamma_Z} = \frac{6\pi^2}{M_Z^2}\frac{\Gamma_h\Gamma_{\mu\mu}}{\Gamma_Z},$$

$$A_\mu = \int_{\text{vùng cộng hưởng}} \sigma_{\mu\mu} dE \approx \frac{6\pi^2}{M_Z^2}\frac{\Gamma_h\Gamma_{\mu\mu}}{\Gamma_Z},$$

ta có

$$A_\mu/A_h = \Gamma_{\mu\mu}/\Gamma_h.$$

Đối với

$$N = 3, \qquad \Gamma_{\mu\mu} : \Gamma_h \approx 0,041;$$

$$N = 4, \qquad \Gamma_{\mu\mu} : \Gamma_h \approx 0,030;$$

$$N = 5, \qquad \Gamma_{\mu\mu} : \Gamma_h \approx 0,024.$$

Từ giá trị quan sát được A_μ và A_h, ta có thể tìm ra N, từ đó cho ta

$$B_{\nu\nu} = \sum\Gamma_{\nu\nu}/\Gamma_Z = 2N\Gamma_{\mu\mu}/\Gamma_Z, \quad \Gamma_Z = 3NT_{\mu\mu} + \Gamma_h.$$

3062

Các thí nghiệm làm tán xạ electron trên proton được dùng để nghiên cứu cấu trúc điện tích của proton dựa trên giả thiết rằng tương tác điện từ của

electron là đã được hiểu thấu đáo. Ta xét một quá trình tương tự để nghiên cứu cấu trúc điện tích của một kaon trung hòa, cụ thể là,

$K^0 + e \to K^0 + e$. (Gọi biên độ này là A)

(a) Bỏ qua sự vi phạm CP, biểu diễn các biên độ cho các quá trình sau theo A:

$K_L^0 + e \to K_L^0 + e$, (Tán xạ, gọi là A_s)

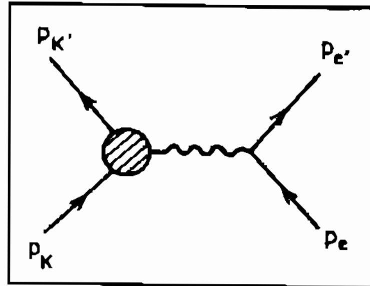
$K_L^0 + e \to K_S^0 + e$. (Tái sinh, gọi là A_R)

(b) Xét thí nghiệm tái sinh

$K_L^0 + e \to K_S^0 + e$,

Trong đó một chùm kaon tới va chạm với một bia electron. Ở năng lượng rất cao E_K, đạo hàm tiết diện hiệu dụng theo phương tiến phụ thuộc vào năng lượng như thế nào? (Tiến có nghĩa là góc tán xạ bằng 0 $\mathbf{p}_{K_L} = \mathbf{p}_{K_S}$). Có nghĩa là $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{0^o}$ thay đổi như thế nào theo E_K? Hãy định nghĩa thế nào gọi là năng lượng cao.

(*Princeton*)



Hình 3.18

Lời giải:

Xét sơ đồ Feymann trong hình 3.18, trong đó p_K, $p_{K'}$, p_e, $p_{e'}$ pe' là các động lượng ban đầu và động lượng cuối của các hạt K^0 và e có khối lượng tương ứng là M và m. Các phần tử của ma trận S là

$$S_{fi} = \delta_{fi} - i(2\pi)^4 \delta(p_K + p_e - p_{K'} - p_{e'}) \frac{t_{fi}}{(2\pi)^6} \sqrt{\frac{m^2}{4E_K E_{K'} E_e E_{e'}}}$$

trong đó t_{fi} là biên độ bất biến

$$t_{fi} = ie^2 (2\pi)^3 \sqrt{4E_K E_{K'}} \bar{u}(p_{e'}) \gamma^\mu u(p_e) \frac{1}{q^2} \langle K^0 p_{K'} | j_\mu(0) | K^0 p_K \rangle \approx A\,,$$

j_μ là toán tử dòng.

(a) Ta có

$$|K_S^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle), \quad |K_L^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle).$$

Nếu bỏ qua sự vi phạm CP thì K_L^0, K_S^0, và K^0 có cùng khối lượng. Khi đó ta có

$$\langle K_L^0 p_{K'}|j_\mu(0)|K_L^0 p_K\rangle = \frac{1}{2}\{\langle K^0 p_{K'}|j_\mu(0)|K^0 p_K\rangle + \langle \bar{K}^0 p_{K'}|j_\mu(0)|\bar{K}^0 p_K\rangle\}.$$

Và do

$$\begin{aligned}\langle \bar{K}^0 p_{K'}|j_\mu(0)|\bar{K}^0 p_K\rangle &= \langle \bar{K}^0 p_{K'}|C^{-1}Cj_\mu(0)C^{-1}C|\bar{K}^0 p_K\rangle \\ &= -\langle K^0 p_{K'}|j_\mu(0)|K^0 p_K\rangle,\end{aligned}$$

nên $A_S = 0$. Tương tự ta có $A_R = A$.

(b) Lấy trung bình theo spin của electron ban đầu và lấy tổng theo các electron cuối ta có tiết diện vi sai

$$d\sigma = \frac{1}{2v_r}\frac{m^2}{4E_K E_{K'} E_e E_{e'}}(2\pi)^4\delta(p_e + p_K - p_{e'} - p_{K'})\sum_{\text{spin}}|t_{fi}|^2\frac{d\mathbf{p}_e d\mathbf{p}_{K'}}{(2\pi)^6}.$$

Lấy tích phân theo $\mathbf{p}_{e'}$ và $E_{K'}$ ta có

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{m}{32\pi^2}\frac{p_{K'}}{p_K}\frac{\sum_{\text{spin}}|t_{fi}|^2}{m + E_K - (p_K E_{K'}/p_{K'})\cos\theta'},$$

trong đó θ' là góc hợp bởi $\mathbf{p}_{K'}$ và $\mathbf{p}_K$. Định luật bảo toàn động lượng đòi hỏi

$$p_{e'} + p_{K'} - p_e - p_K = 0,$$

cho ta

$$m + \sqrt{M_L^2 + \mathbf{p}_K^2} = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}_e^2} + \sqrt{M_S^2 + \mathbf{p}_{K'}^2},$$

trong đó M_L, M_S là khối lượng tương ứng của K_L^0 và K_S^0 và m là khối lượng electron. Xét

$$E_L = \sqrt{M_L^2 + \mathbf{p}_K^2} = \sqrt{(M_S + \Delta M)^2 + \mathbf{p}_K^2}$$

với $\Delta M = M_L - M_S$. Nếu $E_L^2 \gg M_S\Delta M$, hoặc $E_L \gg \Delta M$, thì K_L^0 gọi là có năng lượng cao. Lúc này phương trình động lượng trở thành

$$m + \sqrt{M_S^2 + \mathbf{p}_K^2} = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}_e^2} + \sqrt{M_S^2 + \mathbf{p}_{K'}^2},$$

biểu diễn cho một quá trình tán xạ đàn hồi.

Với tán xạ tiến, $p_K = p_{K'}$, $p_e = 0$, và

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_0 = \frac{1}{32\pi}\sum_{\text{spin}} |t_{fi}|^2 .$$

Ta được

$$(2\pi)^3\sqrt{4E_K E_{K'}}\langle K^0 p_{K'}|j_\mu(0)|K^0 p_K\rangle = (p_K + p_{K'})_\mu F_K(p_{K'} - p_K)^2 ,$$

Trong đó F_K là thừa số dạng điện từ của K^0, $F_K(q^2) = q^2 g(q^2)$. Để ý rằng $g(q^2)$ không suy biến ở $q^2 = 0$. Do vậy

$$\begin{aligned} t_{fi} &= ie^2\bar{u}^+(p_{e'})\gamma^\mu u(p_e) g[(p_{K'} - p_K)^2](p_{K'} + p_K)_\mu \\ &= ie^2 u^+(\mathbf{p}_{e'} = 0)u(\mathbf{p}_e = 0)\cdot 2E_K g(0) \\ &= \begin{cases} ie^2 2E_K g(0) & \text{nếu electron ban đầu và electron cuối có cùng spin,} \\ 0 & \text{nếu electron ban đầu và electron cuối khác spin.} \end{cases} \end{aligned}$$

Vì vậy tiết diện vi sai tán xạ tiến có sự phụ thuộc vào năng lượng như sau

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_0 \propto E_K^2 .$$

3063

Tán xạ nơtrino không đàn hồi trong mô hình quac. Xét tán xạ của nơtrino trên quac tự do không có khối lượng. Ta sẽ đơn giản hóa vấn đề và chỉ bàn tới phản ứng bảo toàn số lạ, cụ thể là các chuyển tiếp chỉ giữa quac u và quac d.

(a) Viết tất cả các phản ứng đàn hồi có thể của dòng tích điện cho cả trường hợp ν và $\bar{\nu}$ đập vào quac u và d cũng như trường hợp phản quac $\bar{u}$ và $\bar{d}$. (Có 4 phản ứng như vậy.)

(b) Tính tiết diện hiệu dụng cho một quá trình như vậy, ví dụ $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\nu d \to \mu^- u)$.

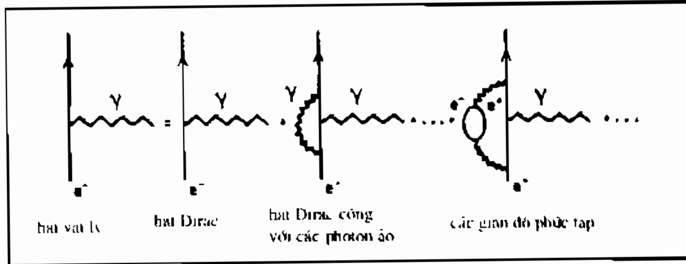
(c) Tìm đối số độ xoắn để dự đoán phân bố góc cho mỗi phản ứng.

(d) Giả thiết rằng tiết diện ν (và $\bar{\nu}$) không đàn hồi được cho bởi tổng của tiết diện hiệu dụng đối với 4 quá trình được liệt kê ở trên. Hãy rút ra sự dự

đoán trong mô hình quac cho tỉ số của tiết diện hiệu dụng toàn phần đối với tán xạ nucleon-phản nơtrino so với tán xạ nucleon-nơtrino, $\sigma^{\bar{\nu}N}/\sigma^{\nu N}$.

(e) Giá trị thực nghiệm là $\sigma^{\bar{\nu}N}/\sigma^{\nu N} = 0,37 \pm 0,02$. Giá trị này cho biết gì về cấu trúc quac/phản quac của nucleon?

(Princeton)



Hình 3.19

Lời giải:

(a) 4 tương tác dòng tích điện là (một ví dụ chỉ ra trong hình 3.19)

$$\nu_\mu d \to \mu^- u\,,$$

$$\bar{\nu}_\mu \bar{d} \to \mu^+ \bar{u}\,,$$

$$\nu_\mu \bar{u} \to \mu^- \bar{d}\,,$$

$$\bar{\nu}_\mu u \to \mu^+ d\,.$$

(b) Đối với $\nu_\mu d \to \mu^- u$, bỏ qua m_μ, m_d, m_u và xét phản ứng trong hệ quy chiếu khối tâm, ta có

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 S}|F|^2\,,$$

trong đó khối lượng bất biến bình phương là $S = -(k+p)^2 = -2kp$, và

$$|F|^2 = \frac{G_F^2}{2}\mathrm{Tr}\,[\not{k}'\gamma^\mu(1-\gamma_5)\not{k}\gamma^\nu(1-\gamma_5)] \times \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,[\not{p}'\gamma_\mu(1-\gamma_5)\not{p}\gamma_\nu(1-\gamma_5)]\cos^2\theta_c\,,$$

trong đó θ_c là góc pha trộn Cabbibo, và thừa số $\frac{1}{2}$ xuất hiện là do lấy trung

bình theo spin của các muyon ban đầu. Do

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\,[\not k'\gamma^\mu(1-\gamma_5)\not k\gamma^\nu(1-\gamma_5)] &= \mathrm{Tr}\,[\not k'\gamma^\mu\not k\gamma^\nu(1-\gamma_5)^2] \\ &= 2\mathrm{Tr}\,[\not k'\gamma^\mu\not k\gamma^\nu] - 2\mathrm{Tr}\,[\not k'\gamma^\mu\not k\gamma^\nu\gamma_5] \\ &= 8\left(k'^\mu k^\nu + k'^\nu k^\mu + \frac{q^2}{2}g^{\mu\nu} - i\varepsilon^{\mu\nu\gamma\delta}k'_\gamma k_\delta\right),\end{aligned}$$

và tương tự

$$\mathrm{Tr}\,[\not p'(\gamma_\mu(1-\gamma_5)\not p\gamma_\nu(1-\gamma_5)] = 8\left[p'_\mu p_\nu + p'_\nu p_\mu + \frac{q^2}{2}g_{\mu\nu} - i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}p'^\alpha p^\beta\right],$$

trong đó $q^2 = -(k-k')^2 = -2kk'$ là bình phương trao đổi động lượng bốn chiều, ta có

$$|F|^2 = 64G_F^2(k\cdot p)(k'\cdot p')\cos^2\theta_c = 16G_F^2S^2\cos^2\theta_c,$$

và do vậy

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\nu d\to\mu^- u)_{\mathrm{cm}} = \frac{16G_F^2S^2\cos^2\theta_c}{64\pi^2 S} = \frac{G_F^2S}{4\pi^2}\cos^2\theta_c.$$

(c) Trong tương tác yếu của hadron, chỉ có sự đóng góp của các quac trái u, d trái và e^-, μ^- và các quac phải $\bar{u}$, $\bar{d}$ và e^+, μ^+. Trong hệ quy chiếu khối tâm, đối với phản ứng $\nu d\to\mu^- u$ và $\bar\nu\bar d\to\mu^+\bar u$, momen động lượng quỹ đạo là bằng 0 và phân bố góc là đẳng hướng.

Trong phản ứng $\nu\bar u\to\bar d\mu^-$ và $\bar\nu u\to\mu^+ d$ (hình 3.20), spin toàn phần của các hạt đi vào và đi ra là đều bằng 1 và phân bố góc là

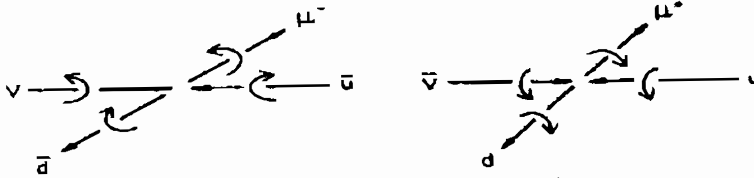
$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\nu\bar u\to\mu^-\bar d)_{\mathrm{cm}} = \frac{G_F^2S}{16\pi^2}\cos^2\theta_c(1-\cos\theta)^2,$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\bar\nu u\to\mu^+ d)_{\mathrm{cm}} = \frac{G_F^2S}{16\pi^2}\cos^2\theta_c(1-\cos\theta)^2.$$

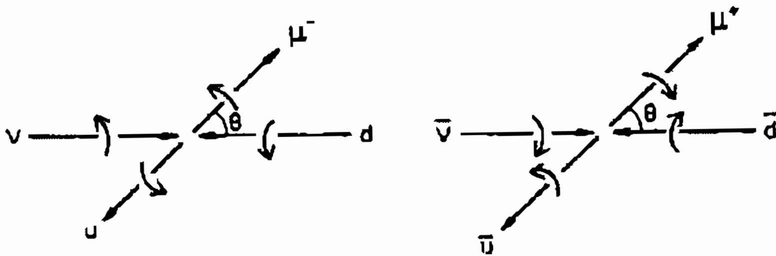
(d) Đối với phản ứng $\nu d\to\mu^- u$ và $\bar\nu\bar d\to\mu^+\bar u$ (hình 3.21) tương tự ta có

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\nu d\to\mu^- u)_{\mathrm{cm}} = \frac{G_F^2S}{4\pi^2}\cos^2\theta_c,$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\bar\nu\bar d\to\mu^+\bar u)_{\mathrm{cm}} = \frac{G_F^2S}{4\pi^2}\cos^2\theta_c.$$



Hình 3.20



Hình 3.21

Lấy tính phân theo góc khối Ω ta được

$$\sigma_1 = \sigma(\nu d \to \mu^- u)_{cm} = \frac{G_F^2 S}{\pi} \cos^2\theta_c \,,$$

$$\sigma_2 = \sigma(\bar{\nu} u \to \mu^+ d)_{cm} = \frac{1}{3}\frac{G_F^2 S}{\pi} \cos^2\theta_c \,.$$

Nơtron và proton lần lượt có các quac *udd* và *uud*. Do vậy ta có

$$\frac{\sigma(\nu n)}{\sigma(\bar{\nu} n)} = \frac{\sigma(\nu udd)}{\sigma(\bar{\nu} udd)} = \frac{2\sigma(\nu d)}{\sigma(\bar{\nu} u)} = \frac{2}{\left(\frac{1}{3}\right)} = 6 \,,$$

$$\frac{\sigma(\nu p)}{\sigma(\bar{\nu} p)} = \frac{\sigma(\nu uud)}{\sigma(\bar{\nu} uud)} = \frac{\sigma(\nu d)}{2\sigma(\bar{\nu} u)} = \frac{1}{2 \times \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \,.$$

Nếu như bia có chứa cùng số lượng proton và nơtron thì

$$\frac{\sigma(\nu N)}{\sigma(\bar{\nu} N)} = \frac{\sigma(\nu p) + \sigma(\nu n)}{\sigma(\bar{\nu} p) + \sigma(\bar{\nu} n)} = \frac{\frac{3}{2}\sigma(\bar{\nu} p) + \sigma(\nu n)}{\sigma(\bar{\nu} p) + \frac{1}{6}\sigma(\nu n)} = \frac{\frac{3}{3} + 3}{1 + \frac{3}{6}} = 3 \,,$$

Trong đó ta sử dụng $\sigma(\nu n) = 3\sigma(\bar{\nu} p)$.

(e) Giá trị thực nghiệm $\sigma(\bar{\nu} N)/\sigma(\nu N) = 0,37 \pm 0,02$ gần bằng giá trị lý thuyết 1/3. Điều đó có nghĩa là nucleon gồm chủ yếu là quac, nếu có phản

quac thì tỉ lệ là rất nhỏ. Gọi tỉ lệ phản quac trên quac trong nucleon là α, ta có

$$\frac{\sigma(\bar{\nu}N)}{\sigma(\nu N)} = \frac{3\sigma(\bar{\nu}u) + 3\alpha\sigma(\bar{\nu}\bar{d})}{3\sigma(\nu d) + 3\alpha\sigma(\nu\bar{u})} = \frac{3 \times \frac{1}{3} + 3\alpha \times 1}{3 \times 1 + 3\alpha \times \frac{1}{3}} = \frac{1 + 3\alpha}{3 + \alpha} = 0,37\,,$$

Suy ra

$$\frac{1 + 3\alpha}{8} = \frac{0,37}{2,63}\,,$$

Hay

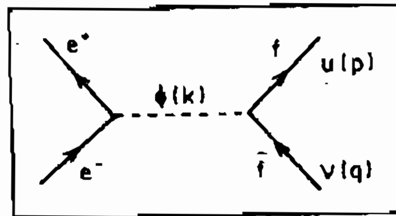
$$\alpha = 4 \times 10^{-2}\,.$$

3064

(a) Theo mô hình Weinberg-Salam, boson Higgs ϕ liên kết với mọi fecmion cơ bản f (f có thể là quac hoặc lepton) theo dạng

$$\frac{em_f}{m_W}\phi\bar{f}f\,,$$

trong đó m_f là khối lượng của fecmion f, e là điện tích electron, và m_W là khối lượng của boson W. Giả thiết rằng boson Higgs phân rã chủ yếu thành các quac và lepton đã biết, hãy tính thời gian sống của nó theo khối lượng m_H của nó. Ta có thể giả thiết rằng boson Higgs nặng hơn nhiều so với các lepton và quac đã biết.



Hình 3.22

(b) Một số nhà lý thuyết tin rằng boson Higgs nặng xấp xỉ 10 GeV. Nếu đúng như vậy, bạn có chắc là nó có thể được quan (trong thực tế) như là một

cộng hưởng trong hủy cặp e^+e^- được không (hình 3.22)? Một cách thô sơ thì thì độ lớn của tỉ số giữa tín hiệu và nền sẽ là bao nhiêu khi cộng hưởng?

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Quy tắc vàng của Fermi cho ta xác suất của các phân rã thành hai fecmion là

$$\Gamma_f = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3 2q_0} \cdot \frac{(2\pi)^4}{2k_0} \delta^4(k-p-q)|M|^2 ,$$

trong đó

$$\begin{aligned} |M|^2 &= \text{Tr} \sum_{s,t} \left[\left(\frac{em_f}{m_W} \right)^2 \bar{u}_s(p) \nu_t(q) \bar{\phi}\phi \bar{\nu}_t(q) u_s(p) \right] \\ &= \left(\frac{em_f}{m_W} \right)^2 \text{Tr} \left[\not{p} \not{q} - m_f^2 \right] \\ &= 4 \left(\frac{em_f}{m_W} \right)^2 (p \cdot q - m_f^2) . \end{aligned}$$

Do $p+q=k$, ta có $p \cdot q = \frac{k^2 - p^2 - q^2}{2} = \frac{m_H^2 - 2m_f^2}{2}$,

$$|M|^2 = 4 \left(\frac{em_f}{m_W} \right)^2 \left(\frac{m_H^2 - 4m_f^2}{2} \right) = 2 \left(\frac{em_f}{m_W} \right)^2 m_H^2 \left(1 - \frac{4m_f^2}{m_H^2} \right)$$

trong hệ đứng yên của boson Higgs. Khi đó

$$\begin{aligned} \Gamma_f &= \int \frac{d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^6 4p_0 q_0} \frac{(2\pi)^4}{2m_H} \delta^4(k-p-q)|M|^2 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{4p_0 q_0} \cdot \frac{1}{2m_H} \delta^4(m_H - p_0 - q_0)|M|^2 \\ &= \frac{4\pi}{(2\pi)^2 \cdot 4q_0^2 \cdot 2m_H} \int q^2 dq \cdot \delta(m_H - 2q_0)|M|^2 . \end{aligned}$$

Với $qdq = q_0 dq_0$, ta có

$$\Gamma_f = \frac{1}{8\pi m_H}\int \frac{q^2}{q_0^2}\frac{q_0}{q}dq_0\delta(m_H - 2q_0)|M|^2$$

$$= \frac{1}{8\pi m_H}\frac{2}{m_H}\cdot\frac{1}{2}\left[\left(\frac{m_H}{2}\right)^2 - m_f^2\right]^{1/2}\cdot 2\frac{e^2 m_f^2 m_H^2}{m_W^2}\left(1 - \frac{4m_f^2}{m_H^2}\right)$$

$$= \frac{e^2 m_f^2 m_H}{4\pi m_W^2}\left(1 - \frac{4m_f^2}{m_H^2}\right)^{3/2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\approx \frac{e^2 m_f^2 m_H}{8\pi m_W^2} \quad \text{nếu} \quad m_H \gg m_f\,.$$

Do đó $\Gamma = \Sigma\Gamma_i = \frac{e^2 m_H}{8\pi m_W^2}\sum a_f m_f^2$, với $a_f = 1$ đối với lepton và $a_f = 3$ đối với quac. Giả thiết $m_H \approx 10$ GeV, $m_W \approx 80$ GeV, và với $m_u = m_d = 0,35$ GeV, $m_s = 0,5$ GeV, $m_c = 1,5$ GeV, $m_b = 4,6$ GeV, $m_e = 0,5\times 10^{-3}$ GeV, $m_\mu = 0,11$ GeV, $m_\tau = 1,8$ GeV, ta có

$$\sum a_f m_f^2\left(1 - \frac{4m_f^2}{m_H^2}\right)^{3/2} \approx \sum_{f\neq b} a_f m_f^2 + 3m_b^2\left(1 - \frac{4m_b^2}{m_H^2}\right)^{3/2}$$

$$= 0,005^2 + 0,11^2 + 1,8^2 + 3\times(0,35^2 + 0,35^2 + 0,5^2 + 1,5^2)$$

$$+ 3\times 4,6^2\left[1 - 4\times\left(\frac{4,6}{10}\right)^2\right]^{3/2}$$

$$= 15,3\ \text{GeV}^2\,,$$

và do vậy

$$\Gamma = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)\hbar c\cdot\frac{m_H}{m_W^2}\sum a_f m_f^2\left(1 - \frac{4m_f^2}{m_H^2}\right)^{3/2}$$

$$\approx \frac{1}{8\pi\times 137}\times\frac{10}{80^2}\times 15,3 = 6,9\times 10^{-6}\ \text{GeV}\,,$$

hay

$$\tau = \Gamma^{-1} = 145\ \text{MeV}^{-1} = 6,58\times 10^{-22}\times 145\ s = 9,5\times 10^{-20}\ s\,.$$

(b) Quá trình $e^+e^- \to \bar{f}f$ bao gồm các tương tác sau

$$e^+e^- \gamma Z^0 \to \to \bar{f}f \quad \text{và} \quad e^+e^- \xrightarrow{H} \to \bar{f}f\,.$$

Khi $\sqrt{S} = 10$ GeV, trao đổi Z^0 có thể bỏ qua. Xét $e^+e^- \xrightarrow{\gamma} \to \bar{f}f$. Tiết diện hiệu dụng toàn phần được coi xấp xỉ như sau

$$\sigma_{\bar{f}f} \approx \frac{4\pi\alpha^2}{3S} Q_f^2\,,$$

trong đó α là hằng số cấu trúc tinh tế và Q_f là điện tích (theo đơn vị điện tích electron) của fecmion. Do vậy

$$\sigma(^+e^- \xrightarrow{\gamma} \to \bar{f}f) = \frac{4\pi\alpha^2}{3S} \sum Q_f^2 \cdot a_f\,,$$

với $a_f = 1$ đối với lepton, $a_f = 3$ đối với quac. Do $\Sigma Q_f^2 a_f = (\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}) \times 3 + 1 + 1 + 1 = \frac{20}{3}$, $S = m_H^2$, nên ta có

$$\sigma(e^+e^- \xrightarrow{\gamma} \to \bar{f}f) = \frac{4\pi\alpha^2}{3S}\frac{20}{3} \approx 8\pi\alpha^2/S = \frac{8\pi\alpha^3}{m_H^2}\,.$$

Đối với quá trình $e^+e^- \xrightarrow{H} \to \bar{f}f$ khi cộng hưởng ($J_H = 0$)

$$\sigma(e^+e^- \xrightarrow{H} \to \bar{f}f) = \pi\bar{\lambda}^2\Gamma_{ee}/\Gamma \approx \pi p^{*-2}\Gamma_{ee}/\Gamma\,.$$

Như một ước lượng thô, lấy $\Gamma_{ee} \approx m^2$, nghĩa là, $\Gamma_{ee}/\Gamma \approx (0,5 \times 10^{-3})^2/15,3 \approx 1,6 \times 10^{-8}$ và $p^{*2} = \frac{m_H^2}{4}$, ta có

$$\sigma(e^+e^- \xrightarrow{H} \to \bar{f}f) : \sigma(e^+e \xrightarrow{\gamma} \to \bar{f}f) = \left(\frac{4\pi}{m_H^2} 1,6 \times 10^{-8}\right)\left(\frac{8\pi\alpha^2}{m_H^2}\right)^{-1}$$

$$\approx 0,8 \times 10^{-8}/\alpha^2 \approx 1,5 \times 10^{-4}\,.$$

Trong hủy cặp e^+e^- trong vùng 10 GeV, tín hiệu nền chủ yếu là do quá trình proton, cỡ 10^4 lần quá trình cộng hưởng H_0. Việc phát hiện ra tín hiệu nền này là không thể.

3065

Sự vi phạm tính chẵn lẻ. Thời gian gần đây ở SLAC người ta đã chứng minh sự tồn tại của một dòng trung hòa vi phạm tính chẵn lẻ được kết hợp với

các electron. Thí nghiệm này liên quan tới tán xạ của electron phân cực trên proton (không phân cực).

(a) Tại sao lại cần electron phân cực? Dấu hiệu đặc trưng của sự vi phạm tính chẵn lẻ là gì?

(b) Ước lượng độ lớn của hiệu ứng.

(c) Sự vi phạm tính chẵn lẻ này thể hiện thế nào trong chuyển động của ánh sáng qua vật chất?

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Để quan sát được sự vi phạm tính chẵn lẻ, ta cần phải đo sự đóng góp của thành phần giả vô hướng trong tương tác, như các thành phần spinơ của electron và hađron. Vì vậy ta phải nghiên cứu tương tác giữa electron có độ xoáy cố định và một bia không phân cực (hoặc ngược lại, electron và bia phân cực, hoặc cả electron và bia đều phân cực). Dấu hiệu của sự vi phạm tính chẵn lẻ là một đại lượng có thể đo được liên quan tới độ xoáy của electron, như là sự phụ thuộc của tiết diện tán xạ vào độ xoắn v.v.

(b) Tán xạ electron-proton liên quan tới hai phần biểu thị tương tác yếu và tương tác từ trường, hay sự tán xạ đặc biệt của photon trao đổi và boson Z^0 trao đổi. Gọi biên độ của chúng là A và B. Khi đó ta có

$$\sigma \approx A^2 + |A \cdot B| + B^2 \,.$$

Trong miền năng lượng của thí nghiệm, thì $A^2 \gg B^2$. Do tính chẵn lẻ được bảo toàn trong tương tác điện từ, nên sự vi phạm tính chẵn lẻ xuất phát từ số hạng giao thoa (ta chỉ xét hiệu ứng bậc nhất)

$$\frac{|A \cdot B|}{A^2 + B^2} \approx \frac{|A \cdot B|}{A^2} \approx \frac{|B|}{|A|} \approx \frac{G_f}{e^2/q^2} \,,$$

trong đó G_F là hằng số Fermi, e là điện tích electron, q^2 là bình phương của thành phần truyền động lượng bốn chiều. Ta có

$$\frac{G_F}{e^2/q^2} \approx \frac{10^{-5} m_p^{-2}}{4\pi/137} q^2 \approx 10^{-4} q^2/m_p^2 \approx 10^{-4} q^2 \text{ GeV}^{-2} \,.$$

Do $m_p \approx 1$ GeV. Trong thí nghiệm tại SLAC, $E_e \approx 20$ GeV, $q^2 \approx 10 \sim 20$ GeV^2, và sự vi phạm tính chẵn lẻ có thể có độ lớn ở mức 10^{-3}. Thí nghiệm đặc biệt đã đo tiết diện tán xạ của electron với độ xoắn khác nhau, đó là số không đổi

xứng

$$A = \frac{\sigma(\lambda = 1/2) - \sigma(\lambda = -1/2)}{\sigma(\lambda = 1/2) + \sigma(\lambda = -1/2)} \approx q^2[a_1 + a_2 f(y)],$$

trong đó a_1 và a_2 liên hệ tương ứng với A_e, V_Q và A_Q, V_e, có liên quan tới phức hợp quac của proton và cấu trúc của dòng trung hòa yếu, $\sigma(\lambda = 1/2)$ là tiết diện tán xạ của electron tới với độ xoắn 1/2, $y = (E - E')/E$, E và E' tương ứng là năng lượng của electron đi vào và đi ra. Từ giá trị thực nghiệm của A, ta có thể suy ra tham số dòng trung hòa yếu.

(c) Sự vi phạm tính chẵn lẻ trong phạm vi nguyên tử thể hiện như là một sự phân kì nhỏ trong chỉ số khúc xạ của ánh sáng phân cực tròn quay trái và quay phải khi đi qua vật liệu tích điện hạt nhân cao. Với ánh sáng phân cực thẳng, mặt phẳng phân cực quay khi nó đi qua vật chất với một góc quay là

$$\phi = \left(\frac{\omega L}{2c}\right) \mathrm{Re}(n_+ - n_-),$$

trong đó L là chiều dày của vật liệu, ω là tần số góc của ánh sáng, n_+ và n_- là chiết suất của ánh sáng phân cực tròn trái và ánh sáng phân cực tròn phải

3066

Hiện giờ có một vài thí nghiệm nhằm tìm kiếm phân rã proton. Theo lý thuyết, phân rã proton xảy ra khi hai quac bên trong proton trao đổi boson nặng và trở thành phản quac và phản lepton. Giả sử boson này có spin là 1. Thêm vào đó ta giả sử rằng tương tác của nó bảo toàn điện tích, màu và tính đối xứng SU(2) × U(1) trong mô hình Weinberg-Salam.

(a) Người ta mong đợi rằng có thể mô tả phân rã proton bằng Lagrangian hiệu dụng fecmion. Thành phần nào sau đây có thể xuất hiện trong Lagrangian hiệu dụng? Đối với những thành phần không được phép, phát biểu nguyên lý hoặc yếu tố làm cho chúng bị cấm, ví dụ như định luật bảo toàn điện tích.

(1) $u_R u_L d_R e^-_L$ (2) $u_R d_R d_L \nu_L$

(3) $u_R u_L d_L e^-_R$ (4) $u_L d_L d_L \nu_L$

(5) $u_R u_R d_R e_R$ (6) $u_L u_L d_R e^-_R$

(7) $u_L d_L d_R \nu_L$ (8) $u_L u_R d_R \nu_L$

Tất cả các fermion để đi tới.

(b) Xét phân rã $p \to e^+ H$, trong đó H là một trạng thái hađron nào đó với số lạ bằng 0. Chứng tỏ rằng phân cực positron trung bình xác định bởi tỉ số tốc độ

$$P = \frac{\Gamma(p \to e_L^+ H) - \Gamma(p \to e_R^+ H)}{\Gamma(p \to e_L^+ H) + \Gamma(p \to e_R^+ H)}$$

không phụ thuộc vào trạng thái hađron H.

(c) Nếu một boson spin 1 có khối lượng 5×10^{14} GeV và liên kết với fecmion với độ mạnh điện từ (như được tiên đoán bởi lý thuyết thống nhất lớn), hãy đưa ra một sự ước lượng thô thời gian sống của proton (theo năm).

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) (1), (2), (3), (4), (5) là được phép, còn (6), (7), (8) là không được phép. Chú ý rằng (6) là không thể xảy ra vì $u_L u_L$ không phải là một đơn bội spin đồng vị, (7) bị cấm là bởi vì nó không chứa ν_R, (8) bị cấm bởi vì tổng điện tích không bằng 0.

(b) Quá trình phân rã $p \to e^+ H$ có thể mô tả bằng Lagrangian tương tác tương đương

$$L_{\text{eff}} = [g_1(\bar{d}^c_{\alpha R}\mu_{\beta R})(\bar{\mu}^c_{\gamma L}e_L - \bar{d}^c_{\gamma L}\nu_L) + g_2(\bar{d}^c_{\alpha L}\mu_{\beta L})(\bar{\mu}^c_{\gamma R}e_R)]\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} .$$

Trong đó g_1, g_2 là hệ số liên kết tương đương, c biểu thị liên hợp điện tích, α, β, γ là kí hiệu màu, $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ là ma trận phản đối xứng. Vì vậy phần tử ma trận của $p \to e_L^+ H$ tỉ lệ với g_1, phần tử ma trận của $e_R^+ H$ tỉ lệ với g_2, cả hai đều có cấu trúc như nhau. Do vậy

$$P = \frac{|g_1|^2 - |g_2|^2}{|g_1|^2 + |g_2|^2}$$

và không phụ thuộc vào việc lựa chọn trạng thái H.

(c) Ta có thể ước lượng thời gian sống của proton chủ yếu dựa trên cơ sở của việc phân tích thứ nguyên như sau. Một hạt nặng trung gian có spin 1 đóng vai trò một vật truyền $\sim m^{-2}$, trong đó m là khối lượng của nó. Điều này sinh ra một phần tử ma trận chuyển $\mathcal{M} \sim m^{-2}$. Tốc độ phân rã của proton sẽ là

$$\Gamma_p \propto |\mathcal{M}|^2 \sim m^{-4} ,$$

hay

$$\Gamma_p \sim \frac{C\alpha^2}{m^4} .$$

trong đó $\alpha = e^2/hc$ là hằng số liên kết không thứ nguyên đối với tương tác điện từ (**Bài tập 3001**), và C là hằng số. Thời gian sống của proton τ_p có thứ nguyên là

$$[\tau_p] = M^{-1},$$

do trong hệ đơn vị của ta $Et \sim \hbar = 1$ và vì thế $[t] = [E]^{-1} = M^{-1}$. Có nghĩa là

$$[C] = M^4 M^1 = M^5.$$

Thực hiện một phép ước lượng thô ta lấy $C \sim m_p^5$, m_p là khối lượng của proton. Do vậy, với $m \approx 5 \times 10^{14}$ GeV, $m_p \approx 1$ GeV,

$$\tau_p = \Gamma_p^{-1} \sim \frac{m^4}{\alpha^2 m_p^5} = 1,2 \times 10^{63} \text{ GeV}^{-1},$$

Hay, trong đơn vị thông thường

$$\tau_p \sim \frac{1,2 \times 10^{63} \hbar}{365 \times 24 \times 60 \times 60} = 3 \times 10^{31} \text{năm}.$$

3067

Nói chung người ta thấy rằng có ít nhất 3 loại nơtrino. Có thể phân loại chúng theo phản ứng trong đó nơtrino được tạo ra hay bị hấp thụ. Gọi ba loại nơtrino là ν_e, ν_μ và ν_τ. Người ta tiên đoán rằng mỗi nơtrino có một khối lượng nghỉ nhỏ nhưng hữu hạn, có thể khác nhau cho mỗi loại.

Giả sử rằng, trong bài này, có một tương tác nhiễu nhỏ loạn giữa các loại nơtrino, mà nếu không có nó thì các loại nơtrino sẽ có cùng khối lượng nghỉ M_0. Xem như phần tử ma trận của sự nhiễu loạn này cùng giá trị thực $\hbar\omega_1$ giữa mỗi cặp nơtrino. Cho nó có giá trị mong đợi bằng 0 trong mỗi trạng thái ν_e, ν_μ và ν_τ.

(a) Một nơtrino loại ν_e được sinh ra ở trạng thái nghỉ tại thời điểm 0. Tìm xác suất, là hàm của thời gian, mà nơtrino ở trong mỗi trạng thái khác?

(b) (Có thể trả lời độc lập với câu (a)) Một thí nghiệm nhằm phát hiện "sự dao động nơtrino" được tiến hành. Quỹ đạo bay của nơtrino là 2000 m. Năng lượng của nó là 100 GeV. Độ nhạy đủ lớn sao cho sự xuất hiện 1% nơtrino của một loại giữa các loại được sinh ra ở điểm bắt đầu của quỹ đạo có thể được đo với độ tin cậy. Lấy M_0 bằng 20 eV. Giá trị nhỏ nhất có thể đo được của $\hbar\omega_1$ là bao nhiêu? Nó phụ thuộc thế nào vào M_0?

(*UC, Berkeley*)

Lời giải:

(a) Cho $|\psi\rangle = a_1(t)|\nu_e\rangle + a_2(t)|\nu_\mu\rangle + a_3(t)|\nu_\tau\rangle$. Ban đầu Hamintonian tương tác bằng 0. Sử dụng ma trận nhiễu loạn

$$H' = \begin{pmatrix} 0 & \hbar\omega_1 & \hbar\omega_1 \\ \hbar\omega_1 & 0 & \hbar\omega_1 \\ \hbar\omega_1 & \hbar\omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

trong phương trình Schrödinger phụ thuộc thời gian

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \hbar\omega_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

cho ta

$$\begin{cases} i\dot{a}_1 = \omega_1(a_2 + a_3)\,, \\ i\dot{a}_2 = \omega_1(a_1 + a_3)\,, \\ i\dot{a}_3 = \omega_1(a_1 + a_2)\,. \end{cases}$$

Rút a_1 ra khỏi hai phương trình cuối ta được

$$i(\dot{a}_3 - \dot{a}_2) = -\omega_1(a_3 - a_2)\,,$$

hay

$$a_3(t) - a_2(t) = Ae^{i\omega_1 t}\,.$$

Tại thời điểm $t = 0$, $a_2(0) = a_3(0) = 0$, nên $A = 0$, $a_2 = a_3$, với điều đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} i\dot{a}_1 = 2\omega_1 a_2\,, \\ i\dot{a}_2 = \omega_1(a_1 + a_2)\,. \end{cases}$$

Ta lại rút a_1 ra, ta có

$$\ddot{a}_2 + i\omega_1\dot{a}_2 + 2\omega_1^2 a_2 = 0\,,$$

Nghiệm của phương trình này là $a_2(t) = A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{-i2\omega_1 t}$. Tại thời điểm $t = 0$, $a_2(0) = 0$, ta suy ra

$$A_1 + A_2 = 0, \quad \text{hay} \quad a_2 = A_1(e^{i\omega_1 t} - e^{-i2\omega_1 t})\,.$$

Do đó

$$\dot{a}_1 = -i2\omega_1 A_1 (e^{i\omega_1 t} - e^{-i2\omega_1 t}),$$

hay

$$a_1 = -2A_1 e^{i\omega_1 t} - A_1 e^{-i2\omega_1 t}.$$

Ban đầu chỉ có mặt của $|\nu_e\rangle$ nên ta có

$$a_1(0) = 1.$$

Vì vậy $A_1 = -1/3$, và

$$a_2 = a_3 = \frac{1}{3}(e^{-i2\omega_1 t} - e^{i\omega_1 t}).$$

Xác suất nơtrino nằm ở trạng thái $|\nu_\mu\rangle$ hay $|\nu_\tau\rangle$ tại thời điểm t là

$$P(|\nu_\mu\rangle) = P(|\nu_\tau\rangle) = |a_2|^2 = \frac{1}{9}(e^{-i2\omega_1 t} - e^{i\omega_1 t})(e^{i2\omega_1 t} - e^{-i\omega_1 t})$$
$$= \frac{2}{9}[1 - \cos(3\omega_1 t)].$$

(b) Để đơn giản ta chỉ xét dao động giữa hai loại nơtrino, và lấy góc pha trộn cực đại $\theta = 45°$. Từ **Bài tập 3068** ta có

$$P(\nu_1 \to \nu_2, t) = \sin^2 2\theta \sin^2\left(\frac{E_1 - E_2}{2}t\right) = \sin^2\left[1,27\left(\frac{l}{E}\Delta m^2\right)\right],$$

Trong đó l đo bằng m, E đo bằng MeV, và Δm^2 theo eV^2. Đối với việc đo ν_2 ta cần $P \geq 0,01$, hay $\sin\left[1,27\left(\frac{l}{E}\Delta m^2\right)\right] \geq 0,1$, ta thu được

$$\Delta m^2 \geq \frac{100 \times 10^3}{1,27 \times 2000} \times \arcsin 0,1 = 3,944 \text{ eV}^2.$$

Do $\Delta m^2 = (M_0 + \hbar\omega_1)^2 - M_0^2 \approx 2M_0\hbar\omega_1$, ta cần

$$\hbar\omega_1 \geq \frac{3,944}{2 \times 20} = 9,86 \times 10^{-2} \text{ eV} \approx 0,1 \text{ eV}$$

Chú ý rằng giá trị nhỏ nhất của $\hbar\omega_1$ thay đổi như M_0^{-1} khi $M_0 \gg \hbar\omega_1$.

3068

Giả sử rằng ν_e và ν_μ, các nơtrino Dirac kết hợp với electron và muyon, là

một hỗn hợp của hai nơtrino ν_1 và ν_2 với khối lượng m_1 và m_2

$$\nu_e = \nu_1 \cos\theta + \nu_2 \sin\theta ,$$

$$\nu_\mu = -\nu_1 \sin\theta + \nu_2 \cos\theta ,$$

θ là góc pha trộn.

Halmintonian có một thành phần khối lượng $H = m_1\bar{\nu}_1\nu_1 + m_2\bar{\nu}_2\nu_2$.

(a) Viết biểu thức khối lượng trạng thái nghỉ m_1 và m_2, và góc pha trộn θ theo các thành phần ma trận khối lượng của Hamintonian trong biểu diễn ν_e, ν_μ

$$H = \bar{\nu}_l M_{ll'} \nu_{l'} \quad \text{với} \quad l, l' = e, \mu .$$

(b) Xác định điều kiện có sự hòa trộn tối đa và điều kiện để không có sự hòa trộn.

(c) Giả sử rằng tại $t = 0$ ta có ν_e thuần nhất. Tìm xác suất để tìm được một ν_μ tại thời điểm t?

(d) Giả thiết p (động lượng nơtrino) $\gg m_1$ và m_2, tìm độ dài dao động.

(e) Nếu dao động nơtrino được phát hiện ở máy dò đặt tại một lò phản ứng, bậc của độ lớn tham số dao động $\Delta = |m_1^2 - m_2^2|$ là bao nhiêu? (Ước lượng năng lượng hạt và khoảng cách giữa nguồn và máy dò)?

(f) Trả lời câu hỏi (e) trong trường hợp dao động nơtrino quan sát được ở một máy gia tốc 100 GeV trong phòng thí nghiệm.

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Trong biểu diễn ν_e, ν_μ Hamintonian là

$$H = \begin{pmatrix} M_{ee} & M_{e\mu} \\ M_{\mu e} & M_{\mu\mu} \end{pmatrix} .$$

Để đơn giản ta giả thiết $M_{\mu e} = M_{e\mu}$. Khi đó giá trị riêng là nghiệm của phương trình

$$\begin{vmatrix} M_{ee} - m & M_{\mu e} \\ M_{\mu e} & M_{\mu\mu} - m \end{vmatrix} = 0 ,$$

nghĩa là

$$m^2 - (M_{ee} + M_{\mu\mu})m + (M_e M_\mu - M_{\mu e}^2) = 0 .$$

Giải phương trình ta có các giá trị riêng

$$m_1 = \frac{1}{2}\left[(M_{ee} + M_{\mu\mu}) - \sqrt{(M_{ee} - M_{\mu\mu})^2 + 4M_{\mu e}^2}\right],$$

$$m_2 = \frac{1}{2}\left[(M_{ee} + M_{\mu\mu}) + \sqrt{(M_{ee} - M_{\mu\mu})^2 + 4M_{\mu e}^2}\right].$$

Trong biểu diễn ν_e, ν_μ đặt $\nu_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$. Ta có phương trình toán tử

$$H\nu_2 = m_2\nu_2 ,$$

tức là

$$\begin{pmatrix} M_{ee} & M_{\mu e} \\ M_{\mu e} & M_{\mu\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = m_2 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} .$$

Với điều kiện chuẩn hóa $a_1^2 + a_2^2 = 1$, ta có

$$a_1 = \frac{M_{\mu e}}{\sqrt{M_{\mu e}^2 + (m_2 - M_{ee})^2}},$$

$$a_2 = \frac{m_2 - M_{ee}}{\sqrt{M_{\mu e}^2 + (m_2 - M_{ee})^2}}.$$

Phương trình hòa trộn là

$$\nu_e = \nu_1 \cos\theta + \nu_2 \sin\theta ,$$

$$\nu_\mu = -\nu_1 \sin\theta + \nu_2 \cos\theta$$

có thể viết lại như sau

$$\nu_1 = \nu_e \cos\theta - \nu_\mu \sin\theta ,$$

$$\nu_2 = \nu_e \sin\theta + \nu_\mu \cos\theta .$$

Tuy nhiên do $\nu_2 = a_1\nu_e + a_2\nu_\mu$ nên

$$\text{tg}\,\theta = \frac{a_1}{a_2} = \frac{M_{\mu e}}{m_2 - M_{ee}}$$

$$= \frac{2M_{\mu e}}{M_{\mu\mu} - M_{ee} + \sqrt{(M_{ee} - M_{\mu\mu})^2 + 4M_{\mu e}^2}},$$

hay ta có

$$\theta = a = \text{arctg}\left(\frac{2M_{\mu e}}{M_{\mu\mu} - M_{ee} + \sqrt{(M_{ee} - M_{\mu\mu})^2 + 4M_{\mu e}^2}}\right) .$$

(b) Khi $M_{\mu\mu} = M_{ee}$, hòa trộn là cực đại và góc hòa trộn là $\theta = 45°$. Trong trường hợp này ν_1 và ν_2 được hòa trộn với tỉ lệ $1:1$. Khi $M_{\mu e} = 0$, $\theta = 0$ thì sẽ không có sự hòa trộn.

(c) Tại $t = 0$, nơtrino nằm trong trạng thái nơtrino-electron thuần nhất ν_e là hỗn hợp của các trạng thái ν_1 và ν_2

$$\nu_e = \nu_1 \cos\theta + \nu_2 \sin\theta .$$

Trạng thái ν_e thay đổi theo thời gian. Kí hiệu nó là $\psi_e(t)$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned}\psi_e(t) &= \nu_1 e^{-iE_1 t}\cos\theta + \nu_2 e^{-iE_2 t}\sin\theta \\ &= (\nu_e\cos\theta - \nu_\mu\sin\theta)e^{-iE_1 t}\cos\theta + (\nu_e\sin\theta + \nu_\mu\cos\theta)e^{-iE_2 t}\sin\theta \\ &= (\cos^2\theta e^{-iE_1 t} + \sin^2\theta e^{-iE_2 t})\nu_e + \sin\theta\cos\theta(e^{-iE_1 t} + e^{-iE_2 t})\nu_\mu .\end{aligned}$$

Do vậy xác suất tìm thấy một ν_μ tại thời điểm t là

$$\begin{aligned}P &= |\langle\nu_\mu|\psi_e(t)\rangle|^2 \\ &= \sin^2\theta\cos^2\theta|-e^{-iE_1 t} + e^{-iE_2 t}|^2 \\ &= \frac{1}{2}\sin^2(2\theta)\{1 - \cos[(E_1 - E_2)t]\} \\ &= \sin^2(2\theta)\sin^2\left(\frac{E_1 - E_2}{2}t\right) ,\end{aligned}$$

trong đó E_1, E_2 là giá trị riêng tương ứng của trạng thái $|\nu_1\rangle$, $|\nu_2\rangle$

(d) Vì $E_1 - E_2 = \frac{E_1^2 - E_2^2}{E_1 + E_2} = \frac{1}{2E}[p_1^2 + m_1^2 - p_2^2 - m_2^2] \approx \frac{\Delta m^2}{2E}$ với $\Delta m^2 = m_1^2 - m_2^2$, $E = \frac{1}{2}(E_1 + E_2)$, nên ta có

$$P = \sin^2(2\theta)\sin^2\left(\frac{\Delta m^2}{4E}t\right) = \sin^2(2\theta)\sin^2\left(\frac{\Delta m^2}{4E}l\right) ,$$

do $l = t\beta \approx t$, nên vận tốc của nơtrino là $\beta \approx 1$ khi $p \gg m$. Trong hệ đơn vị thông thường, đối số thứ hai sẽ là

$$\frac{\Delta m^2}{4E\hbar}\frac{l}{c} = \frac{10^{-12}}{4 \times 197 \times 10^{-13}}\frac{\Delta m^2}{E}l = \frac{1,27l\Delta m^2}{E}$$

với l đo bằng m, Δm^2 đo bằng eV^2, E đo bằng MeV.

Vì vậy ta có

$$P = \sin^2(2\theta)\sin^2(1,27l\Delta m^2/E)\,,$$

và chu kì dao động là $1,27l\Delta m^2/E \approx 2\pi$. Do đó $\Delta m^2 l/E \ll 1$ cho vùng không dao động, $\Delta m^2 l/E \approx 1$ cho vùng dao động đáng kể, và $\Delta m^2 l/E \gg 1$ cho vùng hiệu ứng trung bình.

(e) Nơtrino từ lò phản ứng sẽ có năng lượng $E \approx 1$ MeV, và khoảng cách từ nguồn tới máy dò là vài mét. Do quan sát thấy dao động nên

$$\Delta m^2 = E/l \approx 0,1 \sim 1 \text{ eV}^2\,.$$

(f) Với proton 100 GeV, các pion được tạo ra sẽ có năng lượng E_π vài chục GeV. Khi đó năng lượng nơtrino $E_\nu \geq 10$ GeV. Với khoảng cách quan sát 100 m ta có,

$$\Delta m^2 \approx E/l \approx 10^2 \sim 10^3 \text{ eV}^2\,.$$

Ví dụ, đối với một thí nghiệm có $E_\nu \approx 10$ GeV, $l = 100\ m$,

$$\Delta m^2 = \frac{2\pi E}{1,27l} \approx 5 \times 10^2 \text{ eV}^2\,.$$

3069

(a) Nơtron n và phản nơtron $\bar{n}$ đều là những hạt trung hòa điện cũng giống như K^0 và $\bar{K}^0$. Tại sao việc đưa ra tổ hợp tuyến tính của n_1 và n_2, lại không có ý nghĩa giống như đối với K_1^0 và K_2^0? Giải thích.

(b) Làm thế nào để phân biệt pion, muyon và electron trên giấy ảnh và trong buồng bọt? Trình bày một cách ngắn gọn.

(SUNY Buffalo)

Lời giải:

(a) n và $\bar{n}$ là phản hạt của nhau với số baryon tương ứng là 1 và −1. Do số baryon B là bảo toàn trong mọi quá trình, nên n và $\bar{n}$ là trạng thái riêng của tương tác mạnh, tương tác yếu và tương tác điện từ. Nếu chúng được coi như là tổ hợp tuyến tính của n_1 và n_2 mà không phải là trạng thái riêng của tương tác mạnh, tương tác yếu và tương tác điện từ, thì do n và $\bar{n}$ có B khác nhau nên tổ hợp tuyến tính không có ý nghĩa. Nếu có một số tương tác không bảo toàn B, thì khi đó việc dùng n_1 và n_2 sẽ có ý nghĩa. Đây là lý do của việc không có dao động giữa nơtron và phản nơtron

(b) Khó có thể phân biệt các hạt mang điện e, μ, π trên phạm vi năng lượng tổng quát đơn thuần dựa vào giấy ảnh hay buồng bọt. Ở năng lượng thấp ($E < 200 \sim 300$ MeV), chúng có thể được phân biệt bằng tốc độ mất mát do ion hóa. Electron lan truyền với tốc độ ánh sáng và gây ra sự ion hóa thấp nhất. Muyon và pion có vận tốc khác nhau với cùng một năng lượng. Do $-dE/dx \sim v^{-2}$, nên về nguyên tắc chúng ta có thể phân biệt chúng với các mật độ ion hóa khác nhau của các vết trong giấy ảnh. Tuy nhiên thực tế là rất khó bởi vì khối lượng của chúng rất giống nhau.

Ở năng lượng cao, ($E > 1$ GeV), thậm chí còn khó khăn hơn trong việc phân biệt chúng bởi vì lúc này chúng đều có vận tốc $v \approx c$. Pion có thể sẽ được phân biệt nhờ tương tác với hạt nhân trong môi trường đo. Tuy nhiên giá trị Z của vật liệu trong giấy ảnh và buồng bọt khá nhỏ và xác suất phản ứng hạt nhân không lớn. Muyon và electron không gây ra phản ứng hạt nhân và không thể phân biệt theo cách này. Với buồng bọt, thường có một từ trường ngang tác dụng nên có thể sử dụng độ cong của các vết để phân biệt các hạt, với năng lượng không quá lớn. Với năng lượng rất nhỏ, muyon và pion có thể phân biệt bằng phân rã đặc trưng của chúng.

3070

Sự dao động nơtron - phản nơtron. Nếu số baryon được bảo toàn, thì chuyển tiếp $n \leftrightarrow \bar{n}$, gọi là "dao động nơtron" bị cấm. Giới hạn thực nghiệm trên thang thời gian mà dao động như vậy trong không gian tự do và từ trường bằng không là $\tau_{n-\bar{n}} \geq 3 \times 10^6$ s. Do nơtron xuất hiện rất nhiều trong hạt nhân bền, nên ta có thể đơn giản nghĩ rằng có thể sẽ thu được giới hạn trên $\tau_{n-\bar{n}}$ tốt hơn nhiều. Mục tiêu của bài này là hiểu được tại sao giới hạn đó lại không tốt như vậy.

Gọi H_0 là Hamintonian của thế giới không có bất cứ tương tác nào trộn lẫn n và $\bar{n}$. Khi đó đối với các trạng thái đứng yên ta có

$$H_0|n\rangle = m_n c^2|n\rangle, \quad H_0|\bar{n}\rangle = m_n c^2|\bar{n}\rangle$$

Gọi H' là tương tác biến n thành $\bar{n}$ và ngược lại:

$$H'|n\rangle = \varepsilon|\bar{n}\rangle, \quad H'|\bar{n}\rangle = \varepsilon|n\rangle\,,$$

trong đó ε là số thực và H' không lật spin.

(a) Bắt đầu với nơtron ở $t = 0$ và tính xác suất để có thể phát hiện được một phản nơtron tại thời điểm t. Khi xác suất đầu tiên bằng 50%, gọi nó là

$\tau_{n-\bar{n}}$. Theo cách này chuyển giới hạn thực nghiệm $\tau_{n-\bar{n}}$ sang giới hạn trên ε. Chú ý rằng $m_n c^2 = 940$ MeV.

(b) Giờ hãy xét bài toán khi có mặt từ trường trái đất $B_0 = 0,5$ Gs. Momen từ của nơtron là $\mu_n \approx -6 \times 10^{-18}$ MeV/Gs. Momen từ của phản nơtron là ngược dấu. Bắt đầu với nơtron tại $t = 0$ và tính xác suất phát hiện một phản nơtron tại thời điểm t. Bỏ qua chuyển tiếp phóng xạ có thể. [Gợi ý: tính toán tới đại lượng nhỏ bậc thấp nhất].

(c) Hạt nhân với spin có một từ trường khác không. Giải thích ngắn gọn và định tính, theo hướng phần (b), làm thế nào mà hạt nhân như thế có thê bền vững trong khi τ_{n-n} chỉ bị giới hạn bởi điều kiện $\tau_{n-\bar{n}} \geq 3 \times 10^6$ s.

(d) Hạt nhân với spin 0 có từ trường trung bình triệt tiêu. Giải thích ngắn gọn tại sao dao động nơtron trong hạt nhân như vậy cũng bị hạn chế.

(*MIT*)

Lời giải:

(a) Xét Hamintonian $H = H_0 + H'$. Do (sử dụng hệ đơn vị trong đó $c = 1$, $\hbar = 1$)

$$H(|n\rangle + |\bar{n}\rangle) = m_n(|n\rangle + |\bar{n}\rangle) + \varepsilon(|n\rangle + |\bar{n}\rangle) = (m_n + \varepsilon)(|n\rangle + |\bar{n}\rangle),$$

$$H(|n\rangle - |\bar{n}\rangle) = m_n(|n\rangle - |\bar{n}\rangle) - \varepsilon(|n\rangle - |\bar{n}\rangle) = (m_n - \varepsilon)(|n\rangle - |\bar{n}\rangle),$$

$|n\rangle \pm |n\rangle$ là trạng thái riêng của H. Kí hiệu chúng bằng $|n_\pm\rangle$.

Gọi Φ_0 là hàm sóng tại $t = 0$. Khi đó

$$\Phi_0|n\rangle = \frac{1}{2}(|n_+\rangle + |n_-\rangle),$$

và hàm sóng tại thời điểm t là

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{1}{2}(|n_+\rangle e^{-i(m_n+\varepsilon)t} + |n_-\rangle e^{-i(m_n-\varepsilon)t}) \\ &= \frac{1}{2}e^{-im_n t}[(e^{-i\varepsilon t} + e^{i\varepsilon t})|n\rangle + (e^{-i\varepsilon t} - e^{i\varepsilon t})|\bar{n}\rangle \\ &= e^{-im_n t}(\cos\varepsilon t|n\rangle - i\sin\varepsilon t|\bar{n}\rangle).\end{aligned}$$

Xác suất phát hiện được một phản nơtron tại thời điểm t là $P = \sin^2 \varepsilon t$. Do tại $t = \tau_{n-\bar{n}}$, $\sin^2 \varepsilon t|_{n-\bar{n}} = \sin^2 \varepsilon\tau_{n-\bar{n}} = 1/2$, nên

$$\varepsilon\tau_{n-\bar{n}} = \pi/4.$$

Do vậy

$$\varepsilon \leq \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{3 \times 10^6} = 2,62 \times 10^{-7}\ s^{-1} = 2,62 \times 10^{-7}\hbar = 1,73 \times 10^{-28}\ \text{MeV}.$$

(b) Hamintonian lúc này sẽ là $H = H_0 + H' - \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$. Nên ta có

$$H|n\rangle = m_n|n\rangle + \varepsilon|\bar{n}\rangle - \mu_n B|n\rangle = (m_n - \mu_n B)|n\rangle + \varepsilon|\bar{n}\rangle,$$

$$H|\bar{n}\rangle = m_n|\bar{n}\rangle + \varepsilon|n\rangle + \mu_n B|\bar{n}\rangle = (m_n + \mu_n B)|\bar{n}\rangle + \varepsilon|n\rangle.$$

Ở đây ta giả thiết rằng $n, \bar{n}$ phân cực theo trục z chính là phương của B, cụ thể là $s_z(n) = 1/2$, $s_z(\bar{n}) = 1/2$. Chú ý rằng giả thiết này không ảnh hưởng tới tính tổng quát của kết quả.

Gọi trạng thái riêng của H là $a|n\rangle + b|\bar{n}\rangle$. Do

$$\begin{aligned} H(a|n\rangle + b|\bar{n}\rangle &= aH|n\rangle + bH|\bar{n}\rangle \\ &= [a(m_n - \mu_n B) + b\varepsilon)]|n\rangle + [b(m_n + \mu_n B) + a\varepsilon]|\bar{n}\rangle, \end{aligned}$$

ta có

$$\frac{a(m_n - \mu_n B) + b\varepsilon}{a} = \frac{b(m_n + \mu_n B) + a\varepsilon}{b},$$

hay

$$b^2 - a^2 = \frac{2\mu_n B}{\varepsilon} ab = Aab,$$

trong đó $A = \frac{2\mu_n B}{\varepsilon} \approx \frac{6 \times 10^{-18}}{1,73 \times 10^{-28}} = 3,47 \times 10^{10}$, và $b^2 + a^2 = 1$. Giải với ẩn a và b ta có

$$\begin{cases} a \approx 1, \\ b \approx -1/A, \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} a \approx 1/A, \\ b \approx 1. \end{cases}$$

Vì vậy hai trạng thái riêng của H là

$$|n_+\rangle = \frac{1}{A}|n\rangle + |\bar{n}\rangle, \quad |n_-\rangle = |n\rangle - \frac{1}{A}|\bar{n}\rangle.$$

Tại $t = 0$, $\Phi_0 = |n\rangle = \frac{|n_+\rangle + A|n_-\rangle}{A + \frac{1}{A}} = \frac{A}{1 + A^2}|n_+\rangle + \frac{A^2}{1+A^2}|n_-\rangle$.

Tại thời điểm t hàm sóng là

$$\Phi = \frac{A}{1 + A^2}|n_+\rangle e^{-iE_+t} + \frac{A^2}{1 + A^2}|n_-\rangle e^{-iE_-t},$$

Trong đó $E_+ = m_n - \mu_n B + A\varepsilon$, $E_- = m_n - \mu_n B - \varepsilon/A$. Vì vậy

$$\Phi = e^{-i(m_n-\mu_n B)t}\left(\frac{A}{1+A^2}|n_+\rangle e^{-iA\varepsilon t} + \frac{A^2}{1+A^2}|n_-\rangle e^{-i\frac{\varepsilon}{A}t}\right)$$

$$= \frac{1}{1+A^2}e^{-i(m_n-\mu_n B)t}\left[(e^{-iA\varepsilon t} + A^2 e^{i\frac{\varepsilon}{A}t})|n\rangle + (Ae^{-iA\varepsilon t} - Ae^{i\frac{\varepsilon}{A}t})|\bar{n}\rangle\right].$$

Xác suất quan sát thấy một hạt $\bar{n}$ tại thời điểm t là

$$P = \frac{A^2}{(1+A^2)^2}|e^{-iA\varepsilon t} - e^{i\frac{\varepsilon}{A}t}|^2$$

$$= \frac{A^2}{(1+A^2)^2}\left[2 - 2\cos\left(A\varepsilon - \frac{\varepsilon}{A}\right)t\right]$$

$$= \frac{4A^2}{(1+A^2)^2}\sin^2\left(\frac{A^2-1}{2A}\varepsilon t\right)$$

$$\approx \frac{4}{A^2}\sin^2\left(\frac{A}{2}\varepsilon t\right).$$

(c) Hạt nhân với spin có từ trường khác 0 và vì vậy có thể sử dụng kết quả trong câu (b). Đối với $\tau_{n-\bar{n}} \geq 3\times 10^6$ s, $\varepsilon \leq 1,73\times 10^{-28}$ MeV, $A = \frac{2\mu_n B}{\varepsilon}$ là một số khá lớn, vì vậy xác suất tìm thấy $\bar{n}$ là gần bằng 0 ($\approx 1/A^2$). Vì vậy khó có thể có sự dao động giữa n và $\bar{n}$; hạt nhân rất bền vững.

(d) Khi hạt nhân với spin 0 có từ trường trung bình $\langle B\rangle$ bằng 0, trung bình bình phương của B, $\langle B^2\rangle$, là khác 0 bởi vì từ trường không bằng 0 ở mọi nơi trong hạt nhân. Xác suất quan sát được một hạt $\bar{n}$, là $P \approx 1/\langle A^2\rangle = \frac{\varepsilon^2}{4\mu_n^2\langle B^2\rangle}$, rất nhỏ và gần như bằng 0. Do đó dao động trong hạt nhân như vậy cũng rất hạn chế.

3071

Người ta dự đoán rằng có thể tồn tại các đơn cực từ bền với từ tích $g = c\hbar/e$ và khối lượng $\approx 10^4$ GeV.

(a) Giả sử có một chùm hạt như vậy. Làm thế nào để chứng minh được rằng chùm hạt đó đúng là gồm các đơn cực? Hãy thực tế đến mức có thể.

(b) Đơn cực có thể được sinh cặp trong va chạm tia vũ trụ. Tìm ngưỡng cho phản ứng này ($p + p \to M + M + p + p$)?

(c) Phương pháp thực tế nào để nhận diện môt đơn cực trong một sự kiện tia vũ trụ?

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Để phát hiện đơn cực từ có thể tận dụng những tính chất đặc trưng được tiên đoán của nó như sau:

(1) Đơn cực từ có năng lượng ion hóa lớn. Độ ion hóa riêng của nó $-\frac{dE}{dx}$ lớn gấp nhiều lần độ ion hóa của một hạt tích điện đơn khi nó đi qua vật chất, chẳng hạn như qua một đầu dò vết hạt nhân như nhũ tương ảnh hạt nhân hoặc buồng bọt.

(2) Một hạt mang điện tích không chịu tác dụng của lực khi chuyển động song song với một từ trường, trong khi đó một đơn cực từ lại được gia tốc hoặc giảm tốc (phụ thuộc vào dấu từ tích của nó) khi chuyển động song song với từ trường. Một đơn cực từ có thể nhận được một năng lượng 400 MeV khi đi qua một từ trường 10 kGs, trong khi đó năng lượng của một điện tích không đổi trong một quá trình tương tự.

(3) Khi một đơn cực từ đi qua một mạch kín, nó sẽ tương đương như một từ thông lớn đi qua vòng dây và một xung dòng điện lớn sẽ xuất hiện trong mạch.

(4) Khi một điện tích và một đơn cực từ chuyển động cắt ngang từ trường, chúng bị lệch khác nhau. Điện tích sẽ bị lệch theo chiều ngang theo phương của $\mathbf{F} = \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, còn đơn cực từ thì lại bị lệch song song hoặc đối song với chiều từ trường.

(b) Xét quá trình $p + p \to M + \bar{M} + p + p$, trong đó một proton ban đầu được xem là đứng yên, như là một trường hợp. Do $E^2 - P^2$ là bất biến và tại ngưỡng các hạt được sinh ra đều đứng yên trong hệ khối tâm, ta có

$$(E + m_p)^2 - P^2 = (2m_M + 2m_p)^2 ,$$

trong đó $E^2 - P^2 = m_p^2$, hay

$$E = \frac{(2m_M + 2m_p)^2 - 2m_p^2}{2m_p} .$$

Lấy $m_M = 10^4$ GeV, $m_p = 1$ GeV, ta có $E \approx 2 \times 10^8$ GeV như là năng lượng ngưỡng trong phòng thí nghiệm.

Nếu trong phản ứng hai proton ban đầu có cùng năng lượng và va chạm trực diện như trong các chùm tia va chạm, năng lượng tối thiểu của mỗi proton

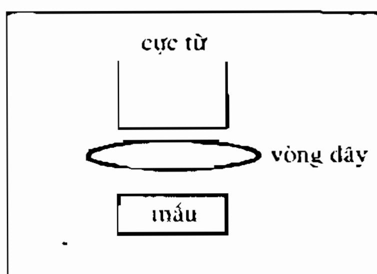
được cho bởi

$$2E = 2m_M + 2m_p ,$$

Do vậy $E \approx m_M = 10^4$ GeV.

(c) Để đo được đơn cực từ trong các sự kiện tia vũ trụ, về nguyên tắc tất cả các phương pháp trong phần (a) đều có thể. Một phương pháp thực tế là là dùng một kính dò vết. Khi một hạt tạo ra một vết lớn trong hệ thống đầu dò, kết hợp một vài đầu dò có thể phân biệt vết do một hạt điện tích lớn với vết do đơn cực từ, do độ đậm của vết do một hạt mang điện là một hàm của vận tốc hạt, nhưng trong trường hợp vết tạo bởi một đơn cực từ lại khác. Việc định dạng hạt sẽ đáng tin cậy hơn nếu ta sử dụng cả từ trường.

Nếu các đơn cực từ được sinh ra liên tục trong va chạm tia vũ trụ ở phía trên trái đất thì chúng có thể được phát hiện theo cách sau. Do một đơn cực mất năng lượng nhanh do tương tác với vật chất nên nó sẽ rơi xuống bề mặt trái đất. Theo chiều hướng chuyển động của chúng về phía các cực từ của trái đất dưới tác dụng của từ trường, ta có thể thu các đơn cực ở gần cực trái đất. Để phát hiện các đơn cực trong mẫu, ta có thể đặt một vòng dây và một mẫu giữa các cực của một nam châm mạnh (hình 3.23). Do đơn cực từ chuyển động từ mẫu tới một cực nên một xung điện sẽ xuất hiện trong vòng dây.



Hình 3.23

3. CẤU TRÚC CỦA HAĐRON VÀ MÔ HÌNH QUAC (3072–3090)

3072

Mô tả bằng chứng (ví dụ cho mỗi câu trả lời) cho những kết luận sau đây:

(a) Sự tồn tại của các quac (cấu trúc con hay bản chất phức hợp của các meson và baryon).

(b) Sự tồn tại của các số lượng tử "màu".

(c) Sự tồn tại của "gluon".

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Bằng chứng quan trọng cho lý thuyết quac là phân bố không đều của điện tích trong proton và nơtron được thấy trong tán xạ của electron năng lượng cao trên nucleon, điều đó chỉ ra rằng một nucleon có cấu trúc bên trong. Nhóm Gell-Mann vào năm 1961 đã phát hiện ra tính đối xứng SU(3) của hadron, điều đó chứng tỏ tính quy luật bên trong của cấu trúc hadron. Dựa trên những phát hiện này, Gell-Mann và Zweig độc lập đề xuất lý thuyết quac. Trong đó họ cho rằng tồn tại 3 loại quac u, d, s và các phản hạt của chúng. Các hạt này có điện tích phân số và các số lượng tử nhất định, giống như cấu tạo của các hadron: một baryon gồm có 3 quac: một meson, một quac và một phản quac. Lý thuyết quac đã có thể giải thích cấu trúc, spin và tích chẵn lẻ của hadron. Nó cũng dự đoán sự tồn tại của hạt Ω, mà sự phát hiện của nó đã củng cố mạnh mẽ cho lý thuyết quac. Sau này ba loại quac nặng c, b, t được thêm vào danh sách quac.

(b) Mục đích chính của việc đưa ra tiên đề về số lượng tử màu là để vượt qua khó khăn về thống kê do theo lý thuyết quac thì Δ^{++}, một hạt có spin 3/2, phải gồm có ba quac u với spin song song, trong khi nguyên lý loại trừ Pauli không cho phép 3 fecmion có spin song song cùng nằm trên một trạng thái cơ bản. Để vượt qua khó khăn ấy vào năm 1964 Greenberg đã đề xuất chiều màu cho quac. Ông cho rằng mỗi quac phải có một trong 3 màu. Mặc dù 3 quac của Δ^{++} có spin song song nhưng chúng có màu khác nhau, và vì vậy không vi phạm nguyên lý loại trừ Pauli. Đề xuất về tính tự do "màu" cũng

giải thích tiết diện hiệu dụng tương đối của R cho việc sinh hadron trong va chạm e^+e^-. Điện động lực học lượng tử cho ta, với $E_{cm} < 3$ GeV, $R = \sum_i Q_i^2$, lấy tổng theo tất cả các quac có thể được sinh ra tại năng lượng đó, trong đó Q_i là điện tích của quac thứ i. Không có sự tự do màu, $R = 2/3$. Xét cả sự đóng góp của tính tự do màu, $R = 2$, phù hợp với thực nghiệm.

(c) Theo sắc động lực học lượng tử, tương tác mạnh xảy ra thông qua trao đổi gluon. Lý thuyết tiên đoán quac phát raugluon cứng. Trong máy va chạm electron-positron PETRA ở DESY người ta phát hiện ra hiện tượng "ba luồng" trong trạng thái cuối của hadron đã cung cấp thêm một bằng chứng mạnh cho sự tồn tại của gluon. Hiện tượng đó được giải thích là một electron và một positron va chạm với nhau tạo ra một cặp quac-phản quac, một trong hai hạt đó phát ra một gluon. Gluon và hai quac ban đầu phân tách riêng rẽ thành luồng hadron, tạo ra ba luồng trong trạng thái cuối. Từ tốc độ quan sát được của sự kiện 3 luồng người ta thu được hằng số liên kết α_s cho tương tác mạnh.

3073

Giải thích tại sao theo mô hình quac thì mỗi hạt sau đâu không thể tồn tại.

(a) Một baryon có spin 1.

(b) Một phản baryon có điện tích +2.

(c) Một meson có điện tích +1 và số lạ −1.

(d) Một meson có số duyên và số lạ ngược dấu.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Theo mô hình quac, một baryon chứa 3 quac. Do quac có spin 1/2, nên chúng không thể kết hợp để tạo nên một baryon có spin 1.

(b) Một phản baryon gồm 3 phản quac. Để kết hợp 3 phản quac tạo thành một phản baryon điện tích +2, ta cần phản quac điện tích +2/3. Tuy nhiên, không có phản quac như thế trong mô hình quac.

(c) Một meson gồm có một quac và một phản quac. Do chỉ có quac s ($S = -1, Z = -\frac{1}{3}$) là có số lạ khác không, nên để tạo ra một meson có số lạ −1 và điện tích 1, ta cần một quac s và một phản quac có điện tích 4/3. Tuy nhiên, không có phản quac nào như vậy.

(d) Một meson với số lạ và số duyên trái dấu phải gồm môt quac lạ (phản quac lạ) và một phản quac duyên (quac duyên). Do số lạ của quac lạ và số

duyên của quac duyên là trái dấu nên một meson sẽ luôn có số lạ và số duyên cùng dấu. Do đó không thể có một meson với số lạ và số duyên trái dấu.

3074

Mối quan hệ Gell-Mann-Nishijima cho ta điện tích của meson và baryon dựa vào các số lượng tử nhất định là

$$q = e(I_3 + B/2 + S/2) .$$

(a) Xác định các thành phần I_3, B và S, và giải thích ngắn gọn tính hữu dụng của chúng trong việc nghiên cứu phản ứng hạt.

(b) Lập một bảng giá trị của các số lượng tử đó cho họ: proton, phản proton, nơtron, phản nơtron.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) I_3 là thành phần thứ 3 của spin đồng vị và biểu thị trạng thái điện tích của spin đồng vị I. Trong tương tác mạnh và tương tác điện từ I_3 được bảo toàn, trong khi tương tác yếu thì không.

B là số baryon. $B = 0$ đối với meson và $B = 1$ đối với baryon. $\Delta B = 0$ đối với mọi tương tác. Sự bảo toàn số baryon có nghĩa là proton là bền vững.

Số lượng tử	p	$\bar{p}$	n	$\bar{n}$
I_3	1/2	-1/2	-1/2	1/2
B	1	-1	1	-1
S	0	0	0	0

S là số lạ, được đưa ra để biểu thị cho sản phẩm liên quan của các hạt lạ. S bảo toàn trong tương tác mạnh và tương tác điện từ, nó chỉ ra rằng các hạt lạ phải được sinh theo cặp. S không bảo toàn trong tương tác yếu, vì vậy một hạt lạ có thể phân rã qua tương tác yếu thành hạt cơ bản.

(b) Giá trị I_3, B, và S cho nucleon được cho trong Bảng 3.7.

3075

Hãy trình bày các số lượng tử và thành phần quac của 5 hađron khác nhau

bất kì. (*Wisconsin*)

Lời giải:

Các số lượng tử và thành phần quac của năm hađron phổ biến nhất được cho trong Bảng 3.8

Hađron	Điện tích (Q)	Số Baryon (B)	Spin(J)	Spin đồng vị (I)	I_3	thành phần quac
n	0	1	1/2	1/2	-1/2	udd
p	1	1	1/2	1/2	1/2	uud
π^-	-1	0	0	1	-1	$d\bar{u}$
π^0	0	0	0	1	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$
π^+	1	0	0	1	1	$u\bar{d}$

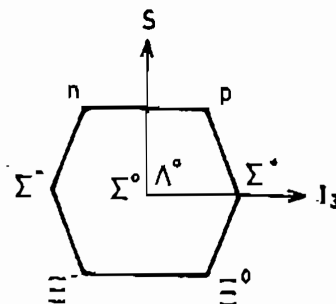
3076

Hãy cho ví dụ cụ thể của một bội tám SU(3) bằng cách nêu tên cả 8 hạt. Nêu giá trị của các số lượng tử chung cho tất cả các hạt của bội tám vừa tìm được.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

8 nucleon và hyperon tạo nên một bội tám SU(3), được cho trong hình 3.24. Các số lượng tử chung của chúng là $J^) = \frac{1^+}{2}$, $B = 1$.



Hình 3.24

3077

Tính tỉ số $R = \frac{\sigma(e^+e^- \to \text{hadron})}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)}$

(a) ngay dưới ngưỡng của quá trình sinh "duyên",

(b) ngay trên ngưỡng đó nhưng dưới ngưỡng sinh quac b.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Động lực học lượng tử (QED) cho ta

$$\sigma(e^+e^- \to q_i\bar{q}_i \to \text{hadron}) = \frac{4\pi\alpha^2}{S}Q_i^2,$$

Trong đó S là bình phương của năng lượng trong hệ quy chiếu khối tâm của e^+, e^-, α là hằng số kết hợp, và Q_i là điện tích (đơn vị e) của quac thứ i, và

$$\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3S}.$$

Do đó

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \to \text{hadron})}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)} = \sum_i \frac{\sigma(e^+e^- \to q_i\bar{q}_i \to \text{hadron})}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)} = 3\sum_i Q_i^2.$$

với $\sum_i$ lấy tổng theo toàn bộ các quac có thể sinh ra với năng lượng cho trước.

(a) Với năng lượng đó các quac có thể sinh ra là u, d và s. Do vậy

$$R = 3\sum_i Q_i^2 = 3 \times \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}\right) = 2.$$

(b) Các quac có thể sinh ra bây giờ là u, d, s và c. Do điện tích của quac c là 2/3 nên

$$R = 3\sum_i Q_i^2 = 3 \times \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}\right) = \frac{10}{3}.$$

3078

(a) Người ta thường coi hadron là các trạng thái liên kết của các fecmion cơ bản, có spin 1/2, tương tác mạnh và được gọi là quac. Mô tả ngắn gọn một số bằng chứng cho giả thuyết này.

Các meson và baryon nằm thấp nhất được cho là trạng thái liên kết của quac u, d, và s (hay một cách kí hiệu khác là p, n, và λ) chúng tạo nên bội ba SU(3).

(b) Hãy định nghĩa thế nào là tính đối xứng SU(3) phổ biến Gell-Mann-Neeman gần đúng của tương tác mạnh. Điều tồi tệ gì sẽ xảy ra nếu tính đối xứng này bị phá vỡ?

(c) Xây dựng trạng thái đa bội SU(3) của baryon và meson nằm thấp nhất, đưa ra thành phần quac cho mỗi trạng thái và các số lượng tử tương ứng J, P, I, Y, S, B và G khi có thể.

(d) Nêu bằng chứng cho một số lượng tử màu khác, mà trong đó các tương tác mạnh hoàn toàn đối xứng. Bao nhiêu màu có thể có? Dữ liệu nào dùng để xác định con số này?

(e) Giờ đây người ta đã biết rõ rằng có một quac đơn bội spin SU(3) phổ biến c với điện tích 2/3 và một số lượng tử mới C cho bởi tương tác mạnh. Xây dựng trạng thái baryon và meson $C = 1$ nằm thấp nhất, và đưa ra J, P, I, Y, S và B tương ứng.

(f) Kiểu phân rã bán lepton (những phân rã chứa lepton và hadron trong trạng thái cuối) nào là kiểu chính của meson $C = 1$?

(g) Kí hiệu các meson duyên có số lạ $J = 1$ và $J = 0$ tương ứng là F^* và F và giả thiết rằng $m_{F^*} > m_F + m_\pi$ (một số chưa xác nhận được bằng thực nghiệm), bạn chờ đón tốc độ của phương trình $F^* \to F\pi$ là bao nhiêu. Phân rã chính của F^* là gì?

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Bằng chứng chứng minh mô hình quac bao gồm những điều sau: (1) Dữ liệu tán xạ không đàn hồi sâu của electron trên nucleon chỉ ra rằng nucleon có cấu trung bên trong. (2) Tính đối xứng SU(3) của hadron có thể giải thích bằng mô hình quac. (3) Mô hình quac cho mối liên hệ đúng về tiết diện của phản ứng hadron. (4) Mô hình quac có thể giải thích được momen từ dị thường của nucleon.

(b) Tính đối xứng SU(3) gần đúng của tương tác mạnh nghĩa là trạng thái đa bội spin đồng vị với cùng một spin và tính chẵn lẻ, có nghĩa là cùng J^P, nhưng các số lạ khác nhau có thể biến đổi qua lại. Chúng được coi như là trạng thái siêu bội của cùng một hạt gốc U với điện tích (I_3) và siêu tích (Y) khác nhau.

Nếu tính đối xứng SU(3) hoàn hảo thì các hạt có cùng siêu bội phải có cùng khối lượng. Trong thực tế sự khác biệt về khối lượng có thể là khá lớn, điều đó cho thấy tính siêu đối xứng chỉ là gần đúng. Sự mở rộng của việc phá vỡ đối xứng có thể thấy ở sự khác biệt về khối lượng của chúng, ví dụ với siêu

bội của meson 0^-, $m_{\pi^0} = 135$ MeV, $m_{K^0} = 498$ MeV.

(c) Các nhóm bội SU(3) thấp nhất của meson và baryon được tạo bởi các quac u, d và s như dưới đây.

Với meson, các quac có thể tạo thành bội tám và bội đơn với J^P bằng 0^- và 1^-. Chúng nằm ở trạng thái cơ bản với $l = 0$, với thành phần quac và các số lượng tử liệt kê trong Bảng 3.9. Với baryon, mỗi hạt gồm có 3 quac, trạng thái nằm thấp nhất là một bội tám có $J^P = \frac{1}{2}^+$ và bội mười $J^P = \frac{3}{2}^+$. Đó là các trạng thái cơ bản với $l = 0$ và các đặc trưng khác cho trong Bảng 3.10.

(d) Mục đích của việc đưa ra tính tự do màu là để giải quyết khó khăn thống kê. Trong mô hình quac, một quac có spin 1/2 và do vậy phải tuân theo thống kê Fermi, yêu cầu hàm sóng của một baryon phải phản đối xứng đối với bất cứ việc trao đổi 2 quac bất kì. Tuy nhiên trong thực tế có một vài baryon có thành phần quac sss hoặc uuu, theo đó hàm sóng là đối xứng với trao đổi quac.

	0^-	1^-	thành phần quac	I	I_3	Y	B	S	G
bội tám	π^+	ρ^+	$d\bar{u}$	1	+1	0	0	0	-1
	π^0	ρ^0	$(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$	1	0	0	0	0	-1
	π^-	ρ	$\bar{u}d$	1	-1	0	0	0	-1
	K^+	K^{*+}	$\bar{s}u$	1/2	1/2	1	0	0	
	K^-	K^{*-}	$s\bar{u}$	1/2	-1/2	-1	0	0	
	K^0	K^{*0}	$\bar{s}d$	1/2	-1/2	1	0	0	
	$\bar{K}^0$	$\bar{K}^{*0}$	$s\bar{d}$	1/2	1/2	-1	0	0	
	$\eta(549)$		$\frac{(u\bar{u}+\bar{d}d-2\bar{s}s)}{\sqrt{6}}$	0	0	0	0	0	+1
		$\omega(783)$	$\frac{u\bar{u}+dd}{\sqrt{2}}$	0	0	0	0	0	-1
đơn bội	$\eta(958)$		$\frac{(u\bar{u}+dd+\bar{s}s)}{\sqrt{3}}$	0	0	0	0	0	+1
		$\psi(1020)$	$\bar{s}s$	0	0	0	0	0	-1

J^P	hạt	thành phần quac	I	I_3	Y	B	S
	p	uud	1/2	1/2	1	1	0
	n	udd	1/2	-1/2	1	1	0
	Σ^+	uus	1	1	0	1	-1
$\frac{1}{2}^+$	Σ^0	$s(ud+du)/\sqrt{2}$	1	0	0	1	-1
	Σ^-	dds	1	-1	0	1	-1
	Ξ^0	uss	1/2	1/2	-1	1	-2
	Ξ^-	dss	1/2	-1/2	-1	1	-2
	Λ^0	$s(du-ud)/\sqrt{2}$	0	0	0	1	-1
	Δ^-	ddd	3/2	-3/2	1	1	0
	Δ^0	ddu	3/2	-1/2	1	1	0
	Δ^+	duu	3/2	1/2	1	1	0
	Δ^{++}	uuu	3/2	3/2	1	1	0
$\frac{3}{2}^+$	Σ^{*-}	sdd	1	-1	0	1	-1
	Σ^{*0}	sdu	1	0	0	1	-1
	Σ^{*+}	suu	1	1	0	1	-1
	Ξ^{*-}	ssd	1/2	-1/2	-1	1	-2
	Ξ^{*0}	ssu	1/2	1/2	-1	1	-2
	Ω	sss	0	0	-2	1	-3

Để giải quyết điểm mâu thuẫn đó, người ta giả thiết có thêm một số lượng tử nữa gọi là "màu", số lượng tử này có ba giá trị. Giả thuyết về màu có thể được kiểm chứng qua phép đo R trong va chạm e^+e^- năng lượng cao, R là tỉ số tiết diện sinh hadron và sinh cặp muyon

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \to \text{hadron})}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)}\,.$$

Giả sử năng lượng của hệ e^+e^- đủ để sinh ra cả ba loại vị của quac. Nếu quac không có màu thì,

$$R = \sum_i Q_i^2 = \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}\right) = \frac{2}{3}\,;$$

nếu quac có ba màu thì

$$R = 3\sum_i Q_i^2 = 3 \times \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}\right) = 2\,,$$

Kết quả sau phù hợp với thực nghiệm.

(e) Quac $c(\bar{c})$ và một phản quac (quac) thông thường có thể kết hợp tạo thành một meson duyên với J^P bằng 0^- hoặc 1^-. Các đặc điểm khác được cho trong Bảng 3.11. Chúng có thể coi như kết quả của việc trao đổi một quac $u(\bar{u})$ với một quac c $(\bar{c})$ trong meson thông thường. Có 6 trạng thái meson với $C = 1$, đó là $D^+, D^0, F^+, D^{*+}, D^{*0}$ và F^{*+}. Và một quac c và hai quac thông thường cũng có thể kết hợp thành baryon duyên có $J^P = \frac{1}{2}^+$ hoặc $\frac{3}{2}^+$. Theo lý thuyết có thể có 9 baryon duyên với $J^P = \frac{1}{2}^+$, mà đặc điểm của nó nêu trong Bảng 3.12. Thực nghiệm cho thấy bằng chứng đầu tiên cho baryon duyên Λ_c^+, Σ_c^{++} xuất hiện vào năm 1975, bằng chứng về meson duyên D^+, D^0, F^+ xuất hiện vào năm 1976–77.

Tương ứng như vậy, baryon với $C = 1$ và $J^P = \frac{3}{2}^+$ cũng tồn tại. Theo lý thuyết thì có 6 baryon như vậy, với thành phần quac (ddc), (duc), (uuc), (cds), (css), (cus). Các số lượng tử số dự kiến của chúng, ngoại trừ $J = 3/2$, chưa được khẳng định bằng thực nghiệm, nhưng chúng sẽ phải tương ứng giống như lượng tử số của Σ_c^0, Σ_c^+, Σ_c^{++}, S^0, T^0 và S^+.

(f) Phân rã sinh nửa lepton của meson với $C = 1$ thực tế là xuất phát từ phân rã sinh nửa lepton của quac c của nó

$$c \to s\, l^+\, \nu_e, \quad \text{với biên độ} \sim \cos\theta_c\,,$$

$$c \to d\, l^+\, \nu_e, \quad \text{với biên độ} \sim \sin\theta_c\,,$$

Trong đó θ_c là góc Cabibo. Ví dụ, phản ứng $D^0 \to K^- e^+ \nu_e$, là phân rã góc được phép Cabibbo, và $D^0 \to \pi^- e^+ \nu_e$, là phân rã bị cấm góc Cabibbo.

(g) Nếu tồn tại F^* và $m_{F^*} > m_F + m_\pi$, thì $F^* \to \pi^0 F$ là phân rã mạnh vì thế cũng là kênh phân rã chính, do nó tuân theo tất cả các định luật bảo toàn. Ví dụ, F^* có $J^{PC} = 1^{--}$, F có $J^{PC} = 0^{-+}$, pion có $J^{PC} = 0^{-+}$. Trong phân rã $F^* \to \pi^0 F$, momen động lượng quỹ đạo của hệ πF là $l = 1$, số chẵn lẻ của trạng thái cuối là $P(\pi^0)P(F)(-1)^l = -1$. Và cũng có $C(\pi^0)C(F) = 1$. Do vậy trạng thái cuối có $J^P = 1^-$, giống như $J^P(F^*)$.

Một kênh phân rã cạnh tranh khác là $F^* \to \gamma + F$, là một phân rã điện từ với độ lớn tương đối xác định bởi hằng số tương tác và thừa số không gian pha.

3079

Tưởng tượng ta đã thực hiện một thí nghiệm đo tiết diện hiệu dụng của

J^P	hạt	thành phần quac	I	I_3	Y	S	C	B
	D^0	$\bar{u}c$	1/2	-1/2	1	0	1	0
	D^+	$\bar{d}c$	1/2	1/2	1	0	1	0
	$\bar{D}^0$	$\bar{c}u$	1/2	1/2	-1	0	-1	0
0^-	D^-	$\bar{c}d$	1/2	-1/2	-1	0	-1	0
	F^+	$\bar{s}c$	0	0	2	1	1	0
	F^-	$\bar{c}s$	0	0	-2	-1	-1	0
	η_0	cc	0	0	0	0	0	0
	D^{*0}	$\bar{u}c$	1/2	-1/2	1	0	1	0
	D^{*+}	dc	1/2	1/2	1	0	1	0
	D^{*0}	$\bar{c}u$	1/2	1/2	-1	0	-1	0
1^-	D^{*-}	$\bar{c}d$	1/2	-1/2	-1	0	-1	0
	F^{*+}	$\bar{s}c$	0	0	2	1	1	0
	F^{*-}	$\bar{c}s$	0	0	-2	-1	-1	0
	J/ψ	$\bar{c}c$	0	0	0	0	0	0

Bảng 3.8 Đặc trưng của meson với quac duyên

hạt	thành phần quac	I	I_3	Y	S	C	B
Σ_c^{++}	cuu	1	1	2	0	1	1
Σ_c^+	$c(ud+du)/\sqrt{2}$	1	0	2	0	1	1
Σ_c^0	cdd	1	-1	2	0	1	1
S^+	$c(us+su)/\sqrt{2}$	1/2	1/2	1	-1	1	1
S^0	$c(ds+sd)/\sqrt{2}$	1/2	-1/2	1	-1	1	1
T^0	css	0	0	0	-2	1	1
Λ_c^+	$c(ud-du)/\sqrt{2}$	0	0	2	0	1	1
A^+	$c(us-su)/\sqrt{2}$	1/2	1/2	1	-1	1	1
A^0	$c(ds-sd)/\sqrt{2}$	1/2	-1/2	1	-1	1	1

Bảng 3.9 Đặc trưng của baryon duyên ($C = 1$) có $J^P = \frac{1}{2}^+$

quá trình "bao hàm"

$$a + N \to \mu^+ + \mu^- + \text{cái gì đó}$$

Trong đó $a = p, \pi^+$ hoặc π^-, và N là một bia mà hạt nhân của nó có số proton và nơtron bằng nhau.

Bạn đã đo 3 tiết diện hiệu dụng đó như là hàm của m, khối lượng bất biết của cặp muyon và của s, bình phương năng lượng trong hệ khối tâm.

Các câu hỏi sau đây được thiết kế để kiểm tra sự hiểu biết của bạn về mô hình phổ biến nhất được sử dụng để mô tả các quá trình trên, mô hình hủy cặp quac và phản quac của Drell và Yan.

(a) Trong bức tranh quac đơn giản nhất (baryon được tạo bởi 3 quac và meson bởi cặp quac và phản quac), dự đoán tỉ số sau

$$\frac{d\sigma_{pN}(s,m)}{dm} : \frac{d\sigma_{\pi^+N}(s,m)}{dm} : \frac{d\sigma_{\pi^-N}(s,m)}{dm} ?$$

(b) Một phép đo chính xác chỉ ra rằng mỗi phần tử của tỉ số đều khác không. Phải thay đổi câu trả lời cho câu (a) như thế nào trong trường hợp này? (Trả lời định tính bằng một hoặc hai câu là đủ).

(c) Cho trước sự biến đổi đó, tỉ số đó sẽ phụ thuộc thế nào vào m (với s cố định)? (Một lần nữa chỉ cần trả lời định tính bằng một đến hai câu là đủ.)

(d) Giá trị tiên đoán của ba tiết diện hiệu dụng sẽ thay đổi thế nào nếu đưa vào khái niệm màu trong mẫu thô sơ?

(e) Một sự tiên đoán quan trọng của Drell và Yan là khái niệm định tỉ lệ. Minh họa điều này bằng công thức hoặc đồ thị (đánh tên tung độ và hoành độ).

(f) Làm thế nào để xác định cấu trúc quac của π^+ từ dữ liệu đã có?

(g) Làm thế nào để ước lượng thành phần phản quac trong proton?

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Theo mô hình của Drell và Yan, những phản ứng như vậy là các quá trình hủy cặp của quac và phản quac sinh ra một cặp lepton. Tính toán QED cho thấy nếu bình phương năng lượng trong hệ khối tâm của muyon $s_{\mu\mu} \gg m_\mu^2, m_q^2$, ảnh hưởng của m_μ, m_q có thể bỏ qua, ta có

$$\sigma(\mu^+\mu^- \to \gamma \to q_i\bar{q}_i) = \frac{4\pi}{3s_{\mu\mu}}\alpha^2 Q_i^2 ,$$

Trong đó Q_i là số điện tích của quac i, α là hằng số cấu trúc tinh tế. Sử dụng

nguyên lý cân bằng chi tiết, ta tìm được

$$\sigma(q_i\bar{q}_i \to \gamma \to \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi}{3s}\alpha^2 Q_i^2 = Q_i^2\sigma_0\,,$$

Trong đó s là bình phương năng lượng toàn phần trong hệ khối tâm của 2 quac, $s = s_{\mu\mu} = m^2$, m là năng lượng toàn phần trong hệ khối tâm của $\mu^+\mu^-$ (trong hệ khối tâm của $q_i\bar{q}_i$). Do vậy ở bức tranh quac đơn giản nhất, ta có

$$\sigma(d\bar{d} \to \mu^+\mu^-) \approx \frac{1}{9}\sigma_0\,,$$

$$\sigma(u\bar{u} \to \mu^+\mu^-) \approx \frac{4}{9}\sigma_0\,,\ .$$

Với $pN \to \mu^+\mu^- + X$, do không có phản quac trong proton và trong nơtron nên

$$\frac{d\sigma(s,m)}{dm} = 0\,.$$

Với s và m như nhau, nhớ lại rằng thành phần quac của p, n, π^+ và π^- là uud, udd, $u\bar{d}$, $\bar{u}d$ ta tìm được

$$\sigma(\pi^+N) = \sigma\left[(u\bar{d}) + \frac{1}{2}(uud + udd)\right] = \frac{1}{2}\sigma(d\bar{d})(1+2) \approx \frac{1}{6}\sigma_0\,,$$

$$\sigma(\pi^-N) = \sigma\left[(\bar{u}d) + \frac{1}{2}(uud + udd)\right] = \frac{1}{2}\sigma(u\bar{u})(2+1) \approx \frac{2}{3}\sigma_0\,,$$

và do vậy

$$\frac{d\sigma_{pN}(s,m)}{dm} : \frac{d\sigma_{\pi^+N}(s,m)}{dm} : \frac{d\sigma_{\pi^-N}(s,m)}{dm} = 0 : 1 : 4\,.$$

(b) Kết quả $\frac{d\sigma_{pN}(s,m)}{dm}$ khác không cho thấy rằng có phản quac trong proton và nơtron. Gọi thành phần phản quac trong proton hay nơtron là α, với $\alpha \ll 1$. Khi đó thành phần quac là $(1-\alpha)$ và do vậy

$$\sigma_{pN} = \sigma\Big\{2\alpha\bar{u} + \frac{1}{2}[2(1-\alpha)u + (1-\alpha)u] + 2(1-\alpha)u$$

$$+ \frac{1}{2}(2\alpha\bar{u} + \alpha\bar{u}) + \alpha\bar{d} + \frac{1}{2}[(1-\alpha)d + 2(1-\alpha)d] + (1-\alpha)d$$

$$+ \frac{1}{2}(\alpha\bar{d} + 2\alpha\bar{d})]\Big\}$$

$$= \sigma(u\bar{u})[3\alpha(1-\alpha) + 3(1-\alpha)\alpha] + \sigma(d\bar{d})\left[\frac{3}{2}\alpha(1-\alpha) + \frac{3}{2}(1-\alpha)\alpha\right]$$

$$= 6\alpha(1-\alpha)\sigma(u\bar{u}) + 3\alpha(1-\alpha)\sigma(d\bar{d})$$

$$= 3\alpha(1-\alpha)[2\sigma(u\bar{u}) + \sigma(d\bar{d})] \approx 3\alpha(1-\alpha)\sigma_0\,,$$

$$\sigma_{\pi^+N} = \sigma\left\{\bar{d} + \frac{1}{2}[(1-\alpha)d + 2(1-\alpha)d] + u + \frac{1}{2}(2\alpha\bar{u} + \alpha\bar{u})\right\}$$

$$= \frac{3}{2}(1-\alpha)\sigma(d\bar{d}) + \frac{3}{2}\alpha\sigma(u\bar{u})$$

$$= \frac{3}{2}\sigma(d\bar{d}) + \frac{3}{2}\alpha[\sigma(u\bar{u}) - \sigma(d\bar{d})] \approx \frac{1}{6}(1+3\alpha)\sigma_0\,,$$

$$\sigma_{\pi^-N} = \sigma\left\{\bar{u} + \frac{1}{2}[2(1-\alpha)u + (1-\alpha)u] + d + \frac{1}{2}(\alpha\bar{d} + 2\alpha\bar{d})\right\}$$

$$= \frac{3}{2}(1-\alpha)\sigma(u\bar{u}) + \frac{3}{2}\alpha\sigma(d\bar{d})$$

$$= \frac{3}{2}\sigma(u\bar{u}) + \frac{3}{2}\alpha[\sigma(d\bar{d}) - \sigma(uu)] \approx \frac{1}{6}(4-3\alpha)\sigma_0\,.$$

Do đó ta có

$$\frac{d\sigma_{pN}(s,m)}{dm} : \frac{d\sigma_{\pi^+N}(s,m)}{dm} : \frac{d\sigma_{\pi^-N}(s,m)}{dm} = 18\alpha(1-\alpha) : (1+3\alpha) : (4-3\alpha)\,.$$

Ví dụ với $\alpha = 0,01$, các tiết diện hiệu dụng có tỉ số là $0,17 : 1 : 3,85$. Như vậy tiết diện hiệu dụng, nhất là $\frac{d\sigma_{pN}(s,m)}{dm}$, là rất nhạy với thành phần phản quac trong nucleon.

(c) Một kết quả chính xác của tỉ số là rất phức tạp, do nó liên quan tới hàm cấu trúc của hạt (sự phân bố quac và động lượng của chúng trong nucleon và meson). Nếu ta giả thiết rằng động lượng của quac trong nucleon là giống nhau, thì khi đó tiết diện hiệu dụng trong hệ khối tâm của quac–phản quac cho va chạm trực diện là

$$\sigma(q_i\bar{q}_i \to \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi}{3m^2}\alpha^2 Q_i^2\,,$$

hay

$$\frac{d\sigma}{dm} \sim m^{-3}\alpha^2 Q_i^2\,.$$

Do vậy σ tỉ lệ với m^{-2}, phù hợp với thực nghiệm.

(d) Tỉ số không bị ảnh hưởng bởi việc đưa vào khái niệm màu.

(e) Khái niệm định tỉ lệ có nghĩa là trong một thang đo năng lượng nào đó thì ảnh hưởng của các năng lượng nhỏ hơn lên các quá trình Drell-Yan có thể bỏ qua. Ví dụ, với quá trình điện từ bậc hai, ta có công thức tổng quát là $d\sigma_{em} = \alpha^2 f(s, q^2, m_l)$, trong đó s là bình phương năng lượng trong hệ khối tâm, q^2 là bình phương động lượng 4 chiều được trao đổi, và m_l là khối lượng của một hạt mang điện. Nếu s và $|q^2| \gg m_l^2$, ta có thể lấy xấp xỉ $m_l = 0$, từ đó cho ta

$$d\sigma = \alpha^2 f(s, q^2)\,.$$

Vì vậy, như trong quá trình $q_i\bar{q}_i \to \mu^+\mu^-$, nếu $m \gg m_\mu$, m_q ta có thể cho $m_\mu \approx m_q \approx 0$ và thu được

$$\sigma(q_i\bar{q}_i \to \mu^+\mu^-) \propto Q_i^2/m^2\,.$$

(f) Sự phù hợp tốt giữa kết quả tính toán

$$\frac{d\sigma_{\pi^+N}(s,m)}{dm} : \frac{d\sigma_{\pi^-N}(s,m)}{dm} = 1 : 4$$

với thực nghiệm củng cố cho giả thiết thành phần quac của $\pi^+(u\bar{d})$ và $\pi^-(\bar{u}d)$.

(g) Bằng cách so sánh tính toán trong câu (b) với thực nghiệm ta có thể xác định được phần α của phản quac trong thành phần quac của proton.

3080

Mô hình túi của cấu trúc hadron có các quac màu chuyển động như là những hạt Dirac spin-$\frac{1}{2}$ độc lập trong một hốc bán kính R. Sự hạn chế của quac trong hốc đó thu được bằng cách cho các quac thỏa mãn phương trình Dirac tự do với một khối lượng phụ thuộc vào vị trí: $m = 0$ với $r < R$ và $m = \infty$ với $r > R$. Toán tử năng lượng cho quac có chứa thành phần $\int d^3r m(r)\bar{\psi}\psi$. Để thành phần này cho một phân bố năng lượng hữu hạn, hàm sóng Dirac cho phép phải thỏa mãn $\bar{\psi}\psi = 0$ trong đó $m = \infty$ (tức là $r > R$), điều này thu được bằng cách chọn một điều kiện biên tại R đối với nghiệm của phương trình Dirac.

(a) Chỉ ra rằng các điều kiện biên

(1) $\psi(|\mathbf{x}| = R) = 0$, (2) $i\hat{\mathbf{x}} \cdot \gamma\psi(|\mathbf{x}| = R) = \psi(|\mathbf{x}| = R)$, trong đó $\hat{\mathbf{x}}$ là một vectơ đơn vị theo phương bán kính từ tâm hốc, đều thu được kết quả của việc đặt $\bar{\psi}\psi = 0$ tại $|\mathbf{x}| = R$. Điều kiện nào chấp nhận được về mặt vật lý?

(b) Nghiệm sóng s tổng quát cho phương trình Dirac không khối lượng tự do có thể viết dưới dạng (sử dụng quy ước Bjorken-Drell)

$$\psi = N \begin{pmatrix} j_0(kR)x \\ i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{x}} j_1(kR)x \end{pmatrix},$$

Trong đó x =spinơ 2 thành phần, j_l =hàm Bessel cầu, N = hằng số chuẩn hóa. (Quy ước của ta là $\gamma_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$, $\gamma = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\sigma}$ =ma trận Pauli). Sử dụng điều kiện biên tại $|\mathbf{x}| = R$ để thu được một điều kiện xác định k (không cần giải phương trình).

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Rõ ràng rằng điều kiện (1), $\psi(X = R) = 0$, thỏa mãn điều kiện $\bar{\psi}\psi|_{X=R} = 0$. Với điều kiện (2), ta có (tại $X = R$)

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\psi &= (i\hat{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\gamma}\psi)^+ \beta (i\hat{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\gamma}\psi) \\ &= (-i\psi^+ \hat{\mathbf{x}} \cdot \beta\boldsymbol{\gamma}\beta)\beta(i\hat{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\gamma}\psi) \\ &= \psi^+ \beta(\hat{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\gamma})(\hat{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\gamma})\psi . \end{aligned}$$

Do

$$(\hat{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\gamma})(\hat{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\gamma}) = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{x}} \\ -\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{x}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{x}} \\ -\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{x}} & 0 \end{pmatrix} = -1 ,$$

nên ta có

$$\bar{\psi}\psi = -\psi^+ \beta\psi = -\bar{\psi}\psi ,$$

do đó

$$\bar{\psi}\psi|_{X=R} = 0 .$$

Điều kiện thứ hai có thể chấp nhận được về mặt vật lý. Phương trình Dirac gồm 4 phương trình vi phân riêng phân, mỗi phương trình chứa các vi phân riêng bậc nhất của các tọa độ. Do vậy bốn điều kiện biên cần phải có. Yêu cầu hàm sóng phải tiến tới 0 tại vô cùng đặt giới hạn cho một nửa số nghiệm. Điều này tương đương với hai điều kiện biên, và ta chỉ cần 2 điều kiện nữa. $\Psi(X = R) = 0$ tương tương với 4 điều kiện biên, trong khi điều kiện

$$i\hat{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\gamma}\psi(X = R) = \psi(X = R) ,$$

tức là

$$i\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{x}} \\ -\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{x}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix},$$

hay

$$i(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{x}})\beta = \alpha,$$

chỉ có hai phương trình cho mối quan hệ giữa thành phần chính và phụ. Vì thế, chỉ có điều kiện (2) là có tính vật lý chấp nhận được. Từ biểu thức tường minh của nghiệm trong phần (b) ta có thể thấy rằng các thành phần chính và phụ của spinơ Dirac chứa hàm Bessel có các bậc khác nhau và vì vậy không thể cùng bằng 0 tại $X = R$. Điều kiện(1) do đó không thích hợp.

(b) Điều kiện $\alpha = i(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{x}})\beta$ cho ta

$$j_0(kR)x = i\cdot i(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{x}})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{x}})j_1(kR)x,$$

hay

$$j_0(kR) = -j_1(kR),$$

được dùng để xách định k.

3081

Mô hình túi của cấu trúc hadron có quac màu chuyển động như là một hạt Dirac nửa spin độc lập trong một hốc hình cầu bán kính R. Để thu được hàm sóng cho một trạng thái hadron cụ thể, các "obitan" quac riêng biệt phải được kết hợp lại với nhau để tạo nên trạng thái có màu toàn phần bằng 0 và các giá trị thích hợp của các số lượng tử spin và vị (spin đồng vị, điện tích, số lạ).

Trong sự gần đúng khá tốt cho rằng các quac "lên" và "xuống" là không có khối lượng, ta có thể dễ dàng thu được các obitan túi (sóng s) năng lượng thấp nhất. Điều này được cho bởi spinơ Dirac

$$\psi = N\begin{pmatrix} j_0(kr)x \\ i\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{r}}j_1(kr)x\end{pmatrix},$$

Trong đó x là spinơ hai thành phần, $k = 2,04/R$, $j_l =$ hàm Bessel cầu.

(a) Các baryon nằm thấp nhất (proton và nơtron) thu được bằng cách đặt 3 quac trong obitan này. Làm thế nào để xây dựng hàm sóng cho proton và cho nơtron, nghĩa là những quac nào được kết hợp và cấu trúc của hàm sóng

spin phù hợp với các số lượng tử của proton và nơtron và nguyên lý Pauli như thế nào?

(b) Toán tử momen từ được định nghĩa là $\mu = \int_{|\mathbf{x}|<R} d^3\mathbf{x}\frac{1}{2}\mathbf{r} \times \mathbf{J}_{EM}$, trong đó $\mathbf{J}_{EM}$ là một toán tử dòng điện Dirac thông thường. Tìm một biểu thức cho toán tử này theo các toán tử spin của các quac thành phần. (Có thể cứ để nguyên tích phân theo hàm Bessel.)

(c) Chứng minh rằng $\mu_n/\mu_p = -2/3$.

Bạn có thể sử dụng các hệ số Clebsch-Gordon sau

$$\langle 1/2, 1/2|1, 1; 1/2, 1/2\rangle = (2/3)^{1/2},$$

$$\langle 1/2, 1/2|1, 0; 1/2, 1/2\rangle = -(1/3)^{1/2}.$$

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Nếu ta không để ý tới tính độc lập màu, trạng thái thấp nhất của một baryon (p và n) sẽ đối xứng với việc trao đổi quac. Do thành phần thứ 3 của spin đồng vị của p là $I_3 = 1/2$, trong khi u có $I_3 = \frac{1}{2}$, d có $I_3 = -\frac{1}{2}$, nên thành phần quac của nó phải là uud. Do hệ có spin đồng vị $\frac{1}{2}$ không thể hoàn toàn đối xứng với trao đổi ud (nghĩa là hàm sóng không thể có dạng $uud + udu + duu$ bởi vì điều đó sẽ tạo ra một bội mười với $I = 3/2$). Vì vậy hàm sóng phải có các thành phần dạng $uud - udu$. Nhưng như đề cập tới ở trên, baryon trạng thái thấp nhất là đối xứng hoàn toàn với trao đổi quac. Ta phải nhân dạng hàm trên với hàm sóng spin phản đối xứng với trao đổi quac thứ 2 và thứ 3 ($\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow$) để thu được hàm sóng đối xứng với những trao đổi như vậy

$$u\uparrow(1)u\uparrow(2)d\downarrow(3) - u\uparrow(1)d\uparrow(2)u\downarrow(3)$$
$$- u\uparrow(1)u\downarrow(2)d\uparrow(3) + u\uparrow(1)d\downarrow(2)u\uparrow(3).$$

Chú ý rằng điều này cũng thỏa mãn điều kiện spin đồng vị. Khi đó sử dụng trình tự sau đây để tạo nên hàm sóng đối xứng cho sự trao đổi quac thứ nhất và thứ hai, và quac thứ nhất và thứ ba. Sự trao đổi quac thứ nhất và thứ hai cho ta

$$u\uparrow u\uparrow d\downarrow - d\uparrow u\uparrow u\downarrow - u\downarrow u\uparrow d\uparrow + d\downarrow u\uparrow u\uparrow,$$

và sự trao đổi quac thứ nhất và thứ ba cho

$$d\downarrow u\uparrow u\uparrow - u\downarrow d\uparrow u\uparrow - d\uparrow u\downarrow u\uparrow + u\uparrow d\downarrow u\uparrow.$$

Kết hợp ba hàm sóng trên và chuẩn hóa, ta thu được

$$\frac{1}{\sqrt{18}}(2u\uparrow u\uparrow d\downarrow +2u\uparrow d\downarrow u\uparrow +2d\downarrow u\uparrow u\uparrow -u\uparrow u\downarrow d\uparrow -u\uparrow d\uparrow u\downarrow$$
$$-u\downarrow u\uparrow d\uparrow -u\downarrow d\uparrow u\uparrow -d\uparrow u\uparrow u\downarrow -d\uparrow u\downarrow u\uparrow).$$

Hàm sóng màu phản đối xứng với việc trao đổi bất cứ hai quac nào có dạng

$$\frac{1}{\sqrt{6}}(RGB - RBG + GBR - GRB + BRG - BGR).$$

Đặt

$$\psi_\uparrow = \begin{pmatrix} j_0(kr)x(\uparrow) \\ ij_1(kr)\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{r}}x(\uparrow) \end{pmatrix}, \qquad x(\uparrow) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\psi_\downarrow = \begin{pmatrix} j_0(kr)x(\downarrow) \\ ij_1(kr)\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{r}}x(\downarrow) \end{pmatrix}, \qquad x(\downarrow) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Để bao hàm cả các hàm sóng obitan, ta chỉ cần đổi $\uparrow$ thành $\psi\uparrow$, và $\downarrow$ thành $\psi\downarrow$. Khi đó kết quả cuối cùng là

$$\frac{1}{6\sqrt{3}}(RGB - RBG + GBR - GRB + BRG - BGR)$$
$$\times (2u\psi\uparrow u\psi\uparrow d\psi\downarrow +2u\psi\uparrow d\psi\downarrow u\psi\uparrow +2d\psi\downarrow u\psi\uparrow u\psi\uparrow$$
$$-u\psi\uparrow u\psi\downarrow d\psi\uparrow -u\psi\uparrow d\psi\uparrow u\psi\downarrow -u\psi\downarrow u\psi\uparrow d\psi\uparrow$$
$$-u\psi\downarrow d\psi\uparrow u\psi\uparrow -d\psi\uparrow u\psi\uparrow u\psi\downarrow -d\psi\uparrow u\psi\downarrow u\psi\uparrow).$$

Hàm sóng của nơtron có thể thu được bằng cách tác dụng toán tử đảo spin đồng vị lên hàm sóng của proton ($u \leftrightarrow d$), kết quả là

$$\frac{1}{6\sqrt{3}}(RGB - RBG + GBR - GRB + BRG - BGR)$$
$$\times (2d\psi\uparrow d\psi\uparrow u\psi\downarrow +2d\psi\uparrow u\psi\downarrow d\psi\uparrow +2u\psi\downarrow d\psi\uparrow d\psi\uparrow$$
$$-d\psi\uparrow d\psi\downarrow u\psi\uparrow -d\psi\uparrow u\psi\uparrow d\psi\downarrow -d\psi\downarrow d\psi\uparrow u\psi\uparrow$$
$$-d\psi\downarrow u\psi\uparrow d\psi\uparrow -u\psi\uparrow d\psi\uparrow d\psi\downarrow -u\psi\uparrow d\psi\downarrow d\psi\uparrow).$$

Các hàm sóng trên chỉ đúng cho proton spin lên và nơtron spin lên. Đối với các nucleon spin xuống, các hàm sóng sẽ thu được bằng việc đổi ↑ thành ↓, ↓ thành ↑ trong hàm sóng spin lên.

(b) Toán tử dòng Dirac được định nghĩa là

$$\mathbf{J} = Q\bar{\psi}^*\gamma\psi = Q\psi^*\beta\boldsymbol{\alpha}\psi = Q\psi_\downarrow^+\boldsymbol{\alpha}\psi = Q\psi_\downarrow^+\begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma}\\ \boldsymbol{\sigma} & 0\end{pmatrix}\psi\,.$$

trong đó $\boldsymbol{\sigma}$ là ma trận Pauli. Cho biểu thức ψ vào công thức trên ta được

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_{EM} &= QN^+N(j_0(kr)x_\downarrow^+, -ij_1(kr)x_\downarrow^+\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{r}})\\ &\quad\times\begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma}\\ \boldsymbol{\sigma} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}j_0(kr)x\\ ij_1(kr)\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{r}}x\end{pmatrix}\\ &= iQ|N|^2j_0(kr)j_1(kr)x_\downarrow^+[\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{r}}]x\\ &= iQ|N|^2j_0(kr)j_1(kr)x_\downarrow^+(-2i\boldsymbol{\sigma}\times\hat{\mathbf{r}})x\\ &= 2Q|N|^2j_0(kr)j_1(kr)x_\downarrow^+(\boldsymbol{\sigma}\times\hat{\mathbf{r}})x\,,\end{aligned}$$

và do đó

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu} &= \int_{|X|<R}\frac{1}{2}\mathbf{r}\times J_{EM}d^3X\\ &= \int_{|X|<R}Q|N|^2j_0(kr)j_1(kr)x_\downarrow^+[r\boldsymbol{\sigma}-(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}]xd^3X\,.\end{aligned}$$

Khi ta lấy tích phân theo góc, thành phần thứ hai trong ngoặc sẽ bằng 0. Do vậy ta có

$$\boldsymbol{\mu} = 4\pi Q|N|^2\left[\int_{r<R}r^3j_0(kr)j_1(kr)\right]x_\downarrow^+\boldsymbol{\sigma}xdr\,.$$

(c) Giá trị mong đợi của momen từ của proton spin lên là

$$\begin{aligned}\langle p\uparrow|\boldsymbol{\mu}|p\uparrow\rangle = \frac{Q}{18}\bigg[&4\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)+4\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)\\ &+4\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)\\ &+\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)\end{aligned}$$

$$+\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)\Bigg]$$

$$= Q\,.$$

Tương tự

$$\langle n\uparrow|\mu|n\uparrow\rangle = \frac{Q}{18}\left[3\times 4\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right)+6\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right)\right]$$

$$= -\frac{2}{3}Q\,.$$

Do vậy ta thu được

$$\frac{\mu_n}{\mu_p} = \frac{\langle n\uparrow|\mu|n\uparrow\rangle}{\langle p\uparrow|\mu|p\uparrow\rangle} = -\frac{2}{3}\,.$$

3082

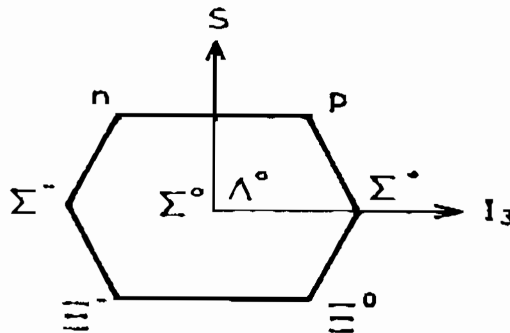
Các bài báo gần đây viết nhiều về sự phát hiện ra bằng chứng của gluon, đưa ra từ các thí nghiệm chùm e^+e^- va chạm. Những bài báo này chắc chắn là bị cắt xén và bạn được yêu cầu làm cho nó tốt hơn.

(a) Theo các ý tưởng lý thuyết gần đây về sắc động lực học lượng tử (dựa trên nhóm cỡ SU(3)): Gluon là gì? Có bao nhiêu loại gluon? Điện tích của chúng bằng bao nhiêu? Spin của gluon là bao nhiêu?

(b) Người ta nói có nhiều loại quac hay các "vị", như là quac "lên", quac "xuống", ... Theo QCD thì có bao nhiêu loại quac cho mỗi vị? Điện tích của chúng bằng bao nhiêu? QCD có nêu ra bao nhiêu loại vị khác nhau không? Theo những bằng chứng có giá trị gần đây thì có bao nhiêu loại vị trong thực tế đã được biết? Thảo luận những bằng chứng đó. Ý tưởng về tương tác yếu nói gì về việc liệu có lý do để chờ đợi có thêm các vị khác nữa và đặc trưng "morez"? Kết quả của tiết diện bao hàm cho $e^+ + e^- +$ hadron ở các năng lượng khác nhau liên quan thế nào tới số lượng vị?

(c) Ở năng lượng cao vừa phải người ta thấy rằng các hadron tới từ va chạm e^+e^- tạo nên hai luồng (hình 3.25). Điều này làm cho mọi người phấn khích. Trong bức tranh quac-gluon thì điều gì là nguyên nhân của hiện tượng hai luồng này? Vẫn ở năng lượng cao, đôi khi có thể xuất hiện 3 luồng. Và điều này càng làm người ta vui vẻ. Giải thích về hiện tượng 3 luồng này.

(*Princeton*)



Hình 3.25

Lời giải:

(a) Theo QCD, hadron gồm có các quac và tương tác giữa các quac có trung gian là trường gluon. Tương tự như vai trò của photon trong tương tác điện từ, gluon là phần tử truyền của tương tác mạnh. Có 8 loại gluon, tất cả đều là các hạt vectơ điện tích 0 và spin 1.

(b) Trong lý thuyết QCD, mỗi loại quac có ba màu, và các quac có cùng vị nhưng khác màu thì có cùng điện tích. Một đặc trưng quan trọng của quac là chúng có điện tích phân số. QCD cho ta một giới hạn yếu về số lượng quac, nghĩa là nếu số lượng vị quac lớn hơn 16 thì tính tự do tiệm cận bị phá vỡ. Tương tác yếu không hạn chế số lượng vị quac. Tuy nhiên, vũ trụ học yêu cầu số nơtrino chỉ khoảng 3 hoặc 4 và sự đối xứng giữa lepton và quac khi đó giới hạn số vị của quac phải không nhiều hơn 6 tới 8. Ở nhiều năng lượng thì tiết diện tương đối sinh hadron toàn phần là

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \to \text{hadron})}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)}$$

cho thấy phù hợp với

$$R(E) = 3\sum_i Q_i^2 ,$$

trong đó tổng được lấy theo tất cả các quac có thể sinh ra ở năng lượng E, Q_i là điện tích của quac thứ i, và thừa số 3 là tính cho 3 màu **(Bài tập 3078 (d))**.

(c) Hiện tượng hai luồng trong va chạm e^+e^- có thể giải thích bằng mô hình quac. e^+, e^- năng lượng cao va chạm trước tiên sẽ sinh ra một cặp quac và phản quac với động lượng p và $-$p. Khi mỗi quac phân vào trong hadron

thì tổng động lượng của hadron theo phương **p** sẽ là $\sum p_{\|} = |\mathbf{p}|$, và trong phương ngang **p** sẽ là $\sum p_{\perp} = 0$. Nói cách khác, các hadron được tạo ra trong sự phân tách của quac và phản quac sẽ xuất hiện như là hai luồng với trục là phương của **p** và $-\mathbf{p}$. Các phép đo phân bố góc của luồng quanh phương của chùm electron đã chỉ ra rằng quac là các fecmion có spin 1/2.

Hiện tượng 3 luồng có thể giải thích bằng cách chỉ ra việc phát ra gluon cứng trong lý thuyết QCD. Ở năng lượng cao, giống như electron phát ra photon, quac có thể phát ra gluon. Trong va chạm e^+e^- một gluon được phát ra với cặp quac có thể phân mảnh độc lập thành một luồng hadron. Từ tốc độ của sự kiện 3 luồng ta có thể tính được α_s, hằng số liên kết của tương tác mạnh.

3083

Sự phát hiện của các trạng thái hẹp thời gian sống lâu ($J/\psi, \psi'$) sự tồn tại của một số lượng tử mới (số duyên). Gần đây một chuỗi rất nhiều trạng thái đã được quan sát thông qua phân rã của chúng thành các cặp lepton ($\Upsilon, \Upsilon', \ldots$ với khối lượng ~ 10 GeV/c^2). Giả thiết rằng quan sát được tiến hành để đưa ra một số lượng tử khác (số đẹp).

(a) Ước lượng thô khối lượng của quac đẹp.

(b) Nếu quac này có điện tích $-1/3$ hãy chỉ ra cần phải biến đổi công thức Gell-Mann-Nishijima như thế nào để phù hợp với số lượng tử mới?

(c) Trong khuôn khổ của mô hình quac (màu) quy ước, hãy ước tính giá trị của tỉ số

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \to \text{hadron})}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)}$$

trong vùng năng lượng ngay trên ngưỡng sinh ra hạt đẹp.

(d) Bạn sẽ chờ đợi tiết diện sinh một Υ (trạng thái liên kết $b\bar{b}$) trong va chạm chùm e^+e^- sẽ thay đổi thế nào nếu điện tích của quac b là $+2/3$ thay vì $-1/3$? Tỉ số phân nhánh thành cặp lepton sẽ thay đổi thế nào? Sẽ có thay đổi gì trong tiết diện sinh của nó trong va chạm hadron? Trả lời câu hỏi cuối một cách ngắn gọn.

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Một meson nặng Υ được tạo bởi $b\bar{b}$. Bỏ qua năng lượng liên kết của

quac b, chúng ta có

$$m_b \approx \frac{1}{2}M_\Upsilon \approx 5\ \text{GeV}/c^2\,.$$

(b) Với quac u, d, và s, công thức Gell-Mann-Nishijima có thể viết như sau

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}(B + S)\,.$$

Cho số duyên c của c là 1, số đẹp b của quac b là -1. Khi đó công thức Gell-Mann-Nishijima có thể tổng quát hóa thành

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}(B + S + c + b)\,,$$

Áp dụng cho quac c ta có $Q(c) = 0 + \frac{1}{2}(\frac{1}{3} + 0 + 1 + 0) = \frac{2}{3}$; cho quac b ta được $Q(b) = 0 + \frac{1}{2}(\frac{1}{3} + 0 + 0 - 1) = -\frac{1}{3}$

(c) Nếu một quac q_i nào đó được sinh ra, thì đóng góp của nó cho R là

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \to q_i\bar{q}_i)}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)} = 3Q_i^2\,.$$

Trong đó Q_i là điện tích của nó, và thừa số 3 xuất hiện là do có 3 màu. Nếu năng lượng khối tâm ở trên ngưỡng sinh hạt đẹp thì 5 vị của quac u, d, s, c, và b có thể được sinh ra. Do vậy

$$R(E) = 3\sum_i Q_i^2 = 3\left[3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2\right] = \frac{11}{3}\,.$$

(d) Tiết diện cho trạng thái cộng hưởng Υ được cho bởi

$$\sigma = \frac{\pi(2J+1)}{m^2}\frac{\Gamma_{ee}\Gamma}{(E-m)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}\,,$$

Trong đó J và m là spin và khối lượng của Υ, Γ là độ rộng toàn phần của trạng thái cộng hưởng, Γ_{ee} là độ rộng riêng phần của kênh e^+e^-. Độ rộng riêng phần của $\Upsilon \to e^+e^-$ là

$$\Gamma_{ee}(\Upsilon \to e^+e^-) = 16\pi\frac{\alpha^2 Q_b^2}{m_b^2}|\psi(0)|^2\,,$$

Trong đó $\Psi(0)$ là hàm sóng trạng thái cơ bản, Q_b và m_b là điện tích và khối lượng tương ứng của b, và α là hằng số cấu trúc tinh tế. Ở $E \approx m$,

$$\sigma = \frac{12\pi\Gamma_{ee}}{m^2\Gamma} \propto Q_b^2\,,$$

và do Υ có spin $J = 1$, ta có

Khi điện tích của quac b đổi từ $-\frac{1}{3}$ thành $\frac{2}{3}$, Q_p^2 thay đổi từ $\frac{1}{9}$ thành $\frac{4}{9}$ và σ tăng 3 lần. Điều này có nghĩa là cả tiết diện toàn phần và độ rộng riêng phần của kênh lepton tăng 3 lần.

Không có cộng hưởng trong tiết diện sinh trong va chạm hadron, bởi vì va chạm hadron là một quá trình phản ứng $h + \bar{h} \rightarrow \Upsilon + X$, nhưng không phải là quá trình sinh giống như $e^+ + e^- \rightarrow \Upsilon$. Tuy nhiên, trong phổ khối lượng bất biến của cặp μ (hoặc cặp e) trong va chạm hadron chúng ta có thể thấy một đỉnh nhỏ tại khối lượng bất biến $m(\mu\mu) = m_\Upsilon$. Độ cao của đỉnh này cũng tăng 3 lần.

3084

Gần đây các hạt $\psi(M = 3,1\ \text{GeV}/c^2)$ và $\psi^*(M = 3,7\ \text{GeV}/c^2)$ được phát hiện và người ta tin rằng cả hai đều có các số lượng tử sau:

$$J^P = 1^-\,,$$

$$C = -1(\text{liên hợp điện tích})\,,$$

$$I = 0(I\text{-spin})\,,$$

$$Q = 0\,.$$

Hãy chỉ ra kiểu phân rã nào sau đây được phép bởi tương tác mạnh, kiểu nào được phép bởi tương tác điện từ, và kiểu nào bởi tương tác yếu, và kiểu nào hoàn toàn bị cấm. Nếu phân rã mạnh bị cấm hoặc nếu phân rã hoàn toàn bị cấm, hãy nêu quy tắc lựa chọn.

$$\psi \rightarrow \mu^+\mu^-$$

$$\psi \rightarrow \pi^0\pi^0$$

$$\psi^* \rightarrow \psi\pi^+\pi^-$$

$$\psi^* \rightarrow \psi + \eta'(0,96\ \text{GeV}/c^2)$$

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Quá trình $\psi \rightarrow \mu^+\mu^-$ là kết quả của tương tác điện từ và phân rã $\psi^* \rightarrow \psi\pi^+\pi^-$ là một quá trình tương tác mạnh. Kiểu phân rã $\psi \rightarrow \pi^0\pi^0$ bị cấm bởi

tương tác mạnh do tính chẵn lẻ C của ψ là -1 và tính chẵn lẻ của hai hạt π^0 trong trạng thái cuối là $+1$, vi phạm bảo toàn tính chẵn lẻ C trong tương tác mạnh. Kiểu phân rã $\psi^* \to \psi + \eta'(0.96\ \text{GeV}/c^2)$ là bị cấm hoàn toàn vì nó vi phạm định luật bảo toàn năng lượng.

3085

Tại SPEAR (vành tích chùm e^+e^- va chạm) một vài trạng thái được gọi là ψ, χ đã được phát hiện. Các hạt ψ có các số lượng tử của photon ($J^P = 1^-$, $I^G = 0^-$) và có khối lượng tại 3,1 và 3,7 GeV/c^2. Giả thiết rằng phản ứng sau đây xảy ra

$$e^+e^- \to \psi(3,7) \to \gamma + \chi$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \longmapsto \pi^+\pi^-$$

trong đó $E_\gamma^* = 0,29$ GeV. Tìm khối lượng, spin, tính chẵn lẻ, spin đồng vị, tính chẵn lẻ G và các khả năng liên hợp điện tích của χ? Giả thiết rằng một chuyển tiếp $E1$ lưỡng cực điện cho việc phát ra tia γ và phân rã mạnh của χ thành 2π.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Trước hết ta tìm khối lượng của χ. Trong hệ quy chiếu đứng yên của ψ

$$E_\chi + E_\gamma = m_\psi\,,$$

hay

$$E_\chi = 3,7\ \text{GeV} - 0,29\ \text{GeV} = 3,41\ \text{GeV}\,.$$

Bảo toàn động lượng cho ta

$$p_\chi = p_\gamma = 0,29\ \text{GeV}/c\,.$$

Do

$$E_\chi^2 = p_\chi^2 + m_\chi^2\,,$$

ta thu được

$$m_\chi = \sqrt{E_\chi^2 - p_\chi^2} = \sqrt{3,4^2 - 0,29^2} = 3,40\ \text{GeV}/c^2\,.$$

Để tìm các số lượng tử khác của χ. Do $\psi(3,7) \to \gamma\chi$ là một chuyển tiếp $E1$, từ quy tắc lựa chọn ta thấy rằng tính chẵn lẻ của ψ và χ là trái dấu và sự thay đổi spin là 0 hoặc ± 1. Do đó giá trị có thể của spin χ là $J = 0, 1, 2$ và tính chẵn lẻ của nó là dương, do ψ có $J^P = 1^-$.

Xét phân rã mạnh $\chi \to \pi^+\pi^-$. Do tính chẵn lẻ của χ là $+1$, nên sự bảo toàn tính chẵn lẻ cần có $P(\pi^+)P(\pi^-)(-1)^l = (-1)^{2+l} = (-1)^l = +1$, suy ra $l = 0$ hoặc 2. Do vậy spin của χ chỉ có thể là $J = 0$ hoặc 2. Hơn nữa,

$$C(\chi) = (-1)^{l+s} = (-l)^l = +1\,.$$

Do π có tính chẵn lẻ G dương, bảo toàn tính chẵn lẻ G yêu cầu

$$G(\chi) = G(\pi^+)G(\pi^-) = +1\,.$$

Đối với meson với tính chẵn lẻ C tính chẵn lẻ G và tính chẵn lẻ C liên hệ thông qua spin đồng vị I

$$G(\chi) = (-1)^I C(\chi)\,.$$

Do

$$G(\chi) = C(\chi) = 1\,,$$

$(-1)^I = +1$, nên ta có $I = 0$ hoặc bằng 2 đối với χ.

Cho đến hiện nay không có meson nào có $I = 2$ được phát hiện, nên ta có thể cho $I = 0$. Vì vậy các số lượng tử của χ có thể là

$$m_\chi = 3,40\ \text{GeV}/c^2, \quad I^G(J^P)C = 0^+(0^+)+ \quad \text{hay} \quad 0^+(2^+)+\,.$$

Phân bố góc của γ phát ra trong phân rã ψ cho thấy spin của χ (3,40) có thể là $J = 0$.

3086

Ta biết rằng có 3 trạng thái $c\bar{c}$ trung gian khối lượng giữa $\psi(3095)$ và $\psi'(3684)$, cụ thể là,

$$\chi_0(3410): \quad J^{PC} = 0^{++}\,,$$

$$\chi_1(3510): \quad J^{PC} = 1^{++}\,,$$

$$\chi_2(3555): \quad J^{PC} = 2^{++}\,.$$

Các con số trong ngoặc là khối lượng theo MeV/c^2.

(a) Tìm đa cực điện và từ được phép cho mỗi chuyển tiếp phóng xạ sau

$$\psi' \to \gamma + \chi_{0,1,2}?$$

(b) Giả sử rằng ψ' được sinh ra trong va chạm e^+e^- ctrong một vành chứa electron-positron. Tìm phân bố góc của photon so với phương của chùm hạt trong phân rã $\psi' \to \gamma + \chi_0$?

(c) Trong điều kiện của phần (b), ta có thể sử dụng phân bố góc của photon để xác định tính chẵn lẻ của χ_0 được không?

(d) Đối với các trạng thái riêng biệt χ_0 và χ_1 kiểu phân rã nào sau đây là lớn, nhỏ hoặc bị cấm?

$$\pi^0\pi^0,\ \gamma\gamma,\ p\bar{p},\ \pi^+\pi^-\pi^0,\ 4\pi^0,\ D^0\bar{K}^0,\ e^+e^-, \psi\eta^0 .$$

$$(\textit{Dúliệu}: M_p = 938\ \text{MeV}/c^2; \quad M_{\pi^0} = 135\ \text{MeV}/c^2, \quad M_\eta = 549\ \text{MeV}/c^2)$$

(e) Các phân rã mạnh của các trạng thái χ được mô tả như quá trình đi qua trạng thái trung gian gồm có một lượng nhỏ gluon và sau đó tương tác để tạo ra quac nhẹ, các quac này lại tiếp tục tương tác và vật chất hóa thành hadron. Nếu gluon là không có khối lượng và có $J^P = 1^-$, tìm số lượng gluon nhỏ nhất được phép trong trạng thái trung gian gluon thuần nhất của mỗi $\chi_{0,1,2}$? Bạn có gợi ý gì về độ rộng phân rã hadron tương đối cho ba trạng thái này hay không?

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Do γ và ψ đều có $J^P = 1^-$, nên trong phân rã $|\Delta J| = 0, 1$ và tính chẵn lẻ thay đổi. Do vậy nó là một chuyển tiếp lưỡng cực điện.

(b) Độ rộng riêng phần của chuyển tiếp lưỡng cực điện được cho bởi

$$\Gamma(2^3S_1 \to \gamma 2^3P_J) = \left(\frac{16}{243}\right)\alpha(2J+1)k^3|\langle 2P|\gamma|2S\rangle|^2 ,$$

trong đó α là hằng số cấu trúc tinh tế. Do vậy

$$\Gamma(2^3S_1 \to \gamma_0 2^3P_0) : \Gamma(2^3S_1 \to \gamma_1 2^3P_1) : \Gamma(2^3S_1 \to \gamma_2 2^3P_2)$$
$$= k_0^3 : 3k_1^3 : 5k_2^3 ,$$

Trong đó k là động lượng của photon phát ra (lấy $\hbar = 1$). Phân bố góc của photon được tính như sau

$$1 + \cos^2\theta \quad \text{đối với quá trình } \psi' \to \gamma_0 + \chi_0 ,$$

$$1 - (1/3)\cos^2\theta \quad \text{đối với quá trình } \psi' \to \gamma_1 + \chi_1 ,$$

$$1 + (1/13)\cos^2\theta \quad \text{đối với quá trình } \psi' \to \gamma_2 + \chi_2 .$$

(c) Do phân bố góc của γ_1, γ_2, và γ_3 khác nhau, nên chúng có thể đo được bằng thực nghiệm và có thể sử dụng để xác định spin của χ_i. Các số lượng tử khác của χ_i có thể được rút ra từ các kiểu phân rã của chúng. Ví dụ, trạng thái χ_0 phân rã thành $\pi^+\pi^-$ hoặc K^+K^-, và như thế $J^P = 0^+, 1^-, 2^+ \cdots$. Do vậy từ phân bố góc chúng ta có thể lấy $J^P = 0^+$. Do $C(\pi^+\pi^-) = (-1)^l$, $J^{PC} = 0^{++}$. Đối với trạng thái χ_1, $\pi^+\pi^-$ và K^+K^- không phải là trạng thái cuối nên $J^P = 0^-, 1^+, 2^-$. Phân bố góc cho ta $J = 1$ và như vậy $J^P = 1^+$. Không thể xác định J^P của chúng chỉ dựa vào phân bố góc.

(d) $\chi_1 \to \pi^0\pi^0$ bị cấm. Do π^0 có $J^P = 0^-$ nên $\pi^0\pi^0$ chỉ có thể kết hợp thành các trạng thái $0^+, 1^-, 2^+$. Do χ_1 có $J^P = 1^+$, nên cả động lượng và tính chẵn lẻ không thể cả hai đều bảo toàn.

$\chi_0 \to \pi^0\pi^0$ thỏa mãn rất nhiều định luật bảo toàn. Tuy nhiên rất khó để phát hiện. Toàn bộ quá trình là $\psi' \to \gamma\chi_0 \to \gamma\pi^0\pi^0 \to \gamma\gamma\gamma\gamma\gamma$ và ta sẽ phải đo năm photon và thử tất cả các sự kết hợp của khối lượng bất biến đồng thời để kiểm tra xem liệu kiểu trên có thỏa mãn hay không. Kiểu này cho đến giờ vẫn chưa phát hiện được. Tương tự chúng ta có các phân rã tiếp theo:

$\chi_1 \to \gamma\gamma$ bị cấm. $\chi_0 \to \gamma\gamma$ là một chuyển tiếp điện từ được phép. Tuy nhiên χ_0 có một kênh phân rã khác mạnh hơn, tỉ số phân nhánh của kiểu này là rất nhỏ.

$\chi_0, \chi_1 \to pp$ là các phân rã được phép. Tuy nhiên, không gian pha của chúng rất nhỏ hơn so với $\chi_0 \to \pi^0\pi^0$, và vì vậy độ rộng phân rã tương đối cũng vậy.

$\chi_0, \chi_1 \to \pi^+\pi^-\pi^0$ bị cấm do tính chẵn lẻ G không được bảo toàn;

$\chi_0, \chi_1 \to \pi^0\psi$ bị cấm do tính chẵn lẻ C không được bảo toàn;

$\chi_0, \chi_1 \to D^0\bar{K}^0$ là phân rã yếu với tỉ số phân nhánh rất nhỏ.

$\chi_0 \to e^+e^-$ là phân rã điện từ bậc cao với tỉ số phân nhánh rất nhỏ.

$\chi_1 \to e^+e^-$ là phân rã điện từ, nhưng nó bị cấm do không bảo toàn tính chẵn lẻ C.

$\chi_0, \chi_1 \to \eta\psi$ bị cấm do không bảo toàn năng lượng.

(e) Do gluon có $J^P = 1^-$, nó là một hạt vectơ và hàm sóng toàn phần của một hệ gluon phải đối xứng. Do một hệ hai gluon chỉ có thể có trạng thái 0^{++} hoặc 2^{++}, một hệ 3 gluon chỉ có thể có trạng thái 1^{++}, χ_0 và χ_2 có phân rã mạnh thông qua trạng thái trung gian 2 gluon và χ_1 có phân rã mạnh thông qua trạng thái trung gian 3 gluon. Nên do xác suất phân rã tỉ lệ với α_s^n, trong đó α_s là một hằng số tương tác mạnh. ($\alpha_s \approx 0,2$ trong miền năng lượng của J/ψ) và n là số gluon ở trạng thái trung gian, độ rộng phân rã mạnh của

χ_1 là nhỏ hơn α_s lần so với các trạng thái χ_0, χ_2. Theo QCD ta có kết quả là $\Gamma(\chi_0 \to ha\emptyset ron) : \Gamma(\chi_2 \to ha\emptyset ron) : \Gamma(\chi_1 \to ha\emptyset ron) = 15 : 4 : 0.5$.

3087

Gần đây mới phát hiện các hạt có một số lượng tử mới gọi là số duyên D^+, một loại hạt như thế, được phát hiện sinh ra trong hủy cặp e^+e^- ở năng lượng khối tâm $E = 4,03$ GeV, như là một đỉnh tại $M_{K\pi\pi} = 1,87$ GeV trong phổ khối lượng $K^-\pi^+\pi^+$. Đồ thị Dalitz đối với phân rã 3 thành phần cho thấy độ cư trú gần như là đồng nhất.

(a) Sử dụng mô hình quac đơn giản nhất trong đó meson là trạng thái liên kết của một quac và phản quac, hãy chứng minh rằng D^+ không thể là một cộng hưởng hạt lạ thông thường (K^{*+}).

(b) Tìm spin và tính chẵn lẻ (J^P) của trạng thái cuối $K\pi\pi$?

(c) Một hạt khác là D^0, được phát hiện gần như có cùng khối lượng trong phổ khối lượng $K^-\pi^+$ trong cùng một thí nghiệm. Giá trị cho phép của J^P gán cho trạng thái $K\pi$ là bao nhiêu?

(d) Giả sử rằng hai hạt có cùng trạng thái bội spin đồng vị, có thể rút ra được điều gì về loại tương tác mà chúng phân rã?

(e) Giả sử rằng phân rã $K_s \to 2\pi$ là một dạng tiêu biểu của phân rã yếu bảo số toàn duyên làm thay đổi số lạ. Hãy ước lượng thời gian sống của D^0, giả thiết rằng tỉ số phân nhánh $(D^0 \to K^-\pi^+)/(D^0 \to \text{tất cả}) \approx 5\%$. Thời gian sống của K_s là $\sim 10^{-10}$ s.

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Theo mô hình quac đơn giản nhất, meson K gồm một quac $\bar{s}$ và một quac u. Tất cả các meson lạ đều cấu tạo gồm một quac $\bar{s}$ và một quac thông thường, và chỉ có phân rã yếu có thể thay đổi vị quac. Nếu quac s trong meson lạ biến đổi thành quac u hoặc d thì meson là sẽ trở thành meson thông thường. Mặt khác, các phân rã mạnh và phân rã điện từ không thể thay đổi vị quac. $D^+ \to K\pi\pi$ là một phân rã yếu. Vì vậy nếu có một quac $\bar{s}$ trong D^+, thì sản phẩm phân rã của nó sẽ không thể có meson K bởi nó cũng có một quac $\bar{s}$. Do vậy không có $\bar{s}$ trong D^+ mà phải là một loại quac vị mới, mà có thể chuyển thành quac $\bar{s}$ trong phân rã yếu, tạo ra meson K trong trạng thái cuối.

(b) Đồ thị Dalitz cho thấy $J = 0$ đối với hệ $K\pi\pi$. Do momen động lượng

toàn phần của ba hạt là 0, nên spin của D^+ là 0. Gọi momen động lượng quỹ đạo của hệ hai π là l, momen động lượng quỹ đạo của K so với π là l'. Do spin của K, π đều là 0, $\mathbf{J} = \mathbf{l} + \mathbf{l}' = 0$, nghĩa là, $\mathbf{l} = -\mathbf{l}'$, hay $|\mathbf{l}| = |\mathbf{l}'|$. Vì vậy

$$P(K\pi\pi) = (-1)^{l+l'} P^2(\pi)P(K) = (-1)^2(-1) = (-1)^3 = -1\,.$$

Do đó trạng thái cuối $K\pi\pi$ có $J^P = 0^-$.

(c) Đối với trạng thái $K\pi$,

$$P(K\pi) = (-1)^l P(\pi)P(K) = (-1)^l\,, \qquad J = 0 + 0 + l\,.$$

Vì vậy

$$J^P = 0^+, 1^-, 2^+ \cdots .$$

Nếu $J(D) = 0$, thì $l = 0$ và $J^P = 0^+$.

(d) Nếu D^+, D^0 thuộc về một trạng thái bội spin đồng vị, chúng sẽ phải có cùng J^P. Bởi vì đã đề cập ở trên, hệ $K\pi\pi$ và hệ $K\pi$ tương ứng có tính lẻ và tính chẵn, nên các phân rã phải diễn ra thông qua tương tác yếu trong đó tính chẵn lẻ không bảo toàn.

(e) Vị của quac thay đổi trong cả hai trường hợp $D^0 \to K\pi$ và $K_s^0 \to \pi^+\pi^-$, và đều là các phân rã Cabibbo được phép. Nếu ta có thể giả thiết rằng các phần tử ma trận của chúng là như nhau, thì sự khác biệt trong thời gian sống là do sự khác biệt ở thừa số không gian pha. Đối với các phân rã hai thành phần, bỏ qua sự khác biệt về khối lượng của trạng thái cuối, ta có

$$\Gamma(D_1^0 \to K^-\pi^+) = f_D^2 \cdot m_D \cdot m_K^2 \left(1 - \frac{m_K^2}{m_D^2}\right)^2 = f_D^2 \cdot \frac{m_K^2}{m_D^3}(m_D^2 - m_K^2)^2\,,$$

$$\Gamma(K_S \to 2\pi) = f_K^2 \cdot m_K \cdot m_\pi^2 \left(1 - \frac{m_\pi^2}{m_K^2}\right)^2 = f_K^2 \cdot \frac{m_\pi^2}{m_K^3}(m_K^2 - m_\pi^2)^2\,,$$

trong đó f_D và f_K là các hằng số liên kết gắn với các phân rã. Lấy $f_D = f_K$ và giả sử rằng tỉ số phân nhánh của $K_S^0 \to 2\pi$ là gần bằng 100%, ta có

$$\frac{\tau_{D^0}}{\tau_K} = \frac{\Gamma(K \to 2\pi)}{\Gamma(D \to all)} = \frac{\Gamma(K \to 2\pi)}{20\Gamma(D \to K\pi)} = \frac{m_\pi^2 m_D^3 (m_K^2 - m_\pi^2)^2}{20 m_K^5 (m_D^2 - m_K^2)^2}\,,$$

Và do vậy

$$\tau_{D^0} = \frac{140^2 \times 1870^3}{20 \times 494^5}\left(\frac{494^2 - 140^2}{1870^2 - 494^2}\right)^2 \times 10^{-10} = 1{,}0 \times 10^{-13}\ s\,,$$

Kết quả này có thể so sánh với giá trị thực nghiệm

$$\tau_{D^0} = \left(4,4 \begin{matrix} +0,8 \\ -0,6 \end{matrix}\right) \times 10^{-13}\ s\,.$$

3088

Tiến bộ mới đây trong vật lý hạt cơ bản là sự phát hiện meson không lạ duyên (gọi là D^+, D^0, và liên hợp điện tích của chúng) với khối lượng cỡ 1870 MeV/c^2.

(a) Biết điện tích của quac duyên là 2/3, hãy đưa ra thành phần của meson D^+ and D^0.

(b) Meson D phân rã yếu thành meson thông thường $(\pi, K, \cdots)$. Ước lượng (với sự lập luận của bạn) các tỉ số phân nhánh của các phân rã hai thành phần sau:

$$\frac{BR(D^0 \to K^+K^-)}{BR(D^0 \to K^-\pi^+)}\,, \qquad \frac{BR(D^0 \to \pi^+\pi^-)}{BR(D^0 \to K^-\pi^+)}\,, \qquad \frac{BR(D^0 \to K^+\pi^-)}{BR(D^0 \to K^-\pi^+)}\,.$$

(c) Làm thế nào để chứng minh được D phân rã bằng tương tác yếu?

(d) Trong chùm hạt va chạm ở năng lượng khối tâm 4,03 GeV, một meson D^+ (khối lượng = 1868,3 MeV/c^2) và một meson D^{*-} (khối lượng = 2008,6 MeV/c^2) được sinh ra. D^{*-} phân rã thành $\bar{D}^0$ (khối lượng = 1863,3 MeV/c^2) và một π^-. Động lượng cực đại trong phòng thí nghiệm của D^{*-} là bao nhiêu? của π là bao nhiêu?

(*Princeton*)

Lời giải:

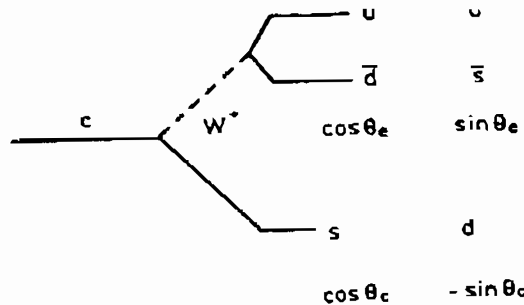
(a) Một meson D gồm một quac duyên c (điện tích $\frac{2}{3}$) và một phản hạt quac nhẹ u (điện tích $\frac{2}{3}$) hoặc d (điện tích $-\frac{1}{3}$). Để thỏa mãn yêu cầu điện tích, thì thành phần quac của D^+ và D^0 tương ứng là $c\bar{d}$ và $c\bar{u}$.

(b) Điều kiện cần của một phân rã meson D là một trong các quac của nó biến đổi vị thông qua tương tác yếu, kiểu phân rã chính xuất phát từ phân rã của quac c như trong hình 3.26.

Gọi θ_c là góc pha trộn Cabibbo. Ta có

$c \to su\bar{d}$, biên độ $\sim \cos^2\theta_c$,

$c \to su\bar{s}$, biên độ $\sim \sin\theta_c \cos\theta_c$,



Hình 3.26

$c \to du\bar{d}$, biên độ $\sim -\sin\theta_c\cos\theta_c$,

$c \to du\bar{s}$, biên độ $\sim \sin^2\theta_c$,

Và tương ứng ta có

$D^0 \to K^- + \pi^-$, phân rã Cabibbo cho phép,

$D^0 \to K^- + K^+$, phân rã Cabibbo không cho phép bậc nhất,

$D^0 \to \pi^+ + \pi^-$, phân rã Cabibbo không cho phép bậc nhất,

$D^0 \to K^+ + \pi^-$, phân rã Cabibbo không cho phép bậc hai.

Giá trị θ_c lấy từ thực nghiệm là $\theta_c = 13.1^0$. Do vậy

$$\frac{BR(D^0 \to K^+K^-)}{BR(D^0 \to K^-\pi^+)} = \text{tg}\,^2\theta_c \approx 0,05.$$

$$\frac{BR(D^0 \to \pi^+\pi^-)}{BR(D^0 \to K^-\pi^+)} = \text{tg}\,^2\theta_c \approx 0,05,$$

$$\frac{BR(D^0 \to K^+\pi^-)}{BR(D^0 \to K^-\pi^+)} = \text{tg}\,^4\theta_c \approx 2,5 \times 10^{-3}.$$

(c) Trong phân rã D^0, số lượng tử duyên C thay đổi. Do chỉ có các phân rã yếu mới làm thay đổi vị của quac, nên các phân rã đều phải là phân rã yếu.

(d) Trong va chạm chùm hạt trực diện, hệ phòng thí nghiệm chính là hệ khối tâm. Gọi khối lượng, năng lượng và động lượng của D^{*-} và D^+ là m^*, m, E^*, E, p^*, p và kí hiệu năng lượng toàn phần là E_0. Bảo toàn động lượng và năng lượng cho ta

$$p^* = p, \qquad E^* + \sqrt{p^2 + m^2} = E_0\,.$$

Do vậy

$$E^{*2} + E_0^2 - 2E^* E_0 = p^{*2} + m^2 .$$

Với $E^{*2} = p^{*2} + m^{*2}$, ta có

$$E^* = \frac{m^{*2} - m^2 + E_0^2}{2E_0} = \frac{2,0086^2 - 1,8683^2 + 4,03^2}{2 \times 4,03} = 2,08 \text{ GeV},$$

$$p^* = \sqrt{2,08^2 - 2,008^2} = 0,54 \text{ GeV}/c ,$$

suy ra

$$\beta = p^*/E^* = 0,26, \qquad \gamma = E^*/m^* = 1,04 .$$

Trong hệ đứng yên của D^{*-} phân rã diễn ra ở trạng thái nghỉ nên năng lượng toàn phần bằng m^*. Từ những điều trên ta có

$$\bar{E}_\pi = \frac{m_\pi^2 - m_D^2 + m^{*2}}{2m^*} = 0,145 \text{ GeV},$$

$$\bar{p}_\pi = \sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2} = 38 \text{ MeV}/c .$$

Trong phòng thí nghiệm, meson π có động lượng cực đại nếu nó chuyển động theo chiều của D^{*-}. Gọi nó là P_{max}. Khi đó

$$p_{\text{max}} = \gamma(\bar{p}_\pi + \beta \bar{E}_\pi)$$

$$= 1,04(38 + 0,26 \times 145) = 79 \text{ MeV}/c .$$

Vì vậy động năng cực đại của D^{*-} và π^- tương ứng là 540 MeV/c và 79 MeV/c.

3089

Trong thí nghiệm hủy cặp e^+e^- một cộng hưởng hẹp (độ rộng nhỏ hơn độ phân tán năng lượng riêng của hai chùm hạt) được quan sát ở $E_{CM} = 9,5$ GeV cho cả hai

$$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$$

và

$$e^+e^- \to \text{hadron} .$$

Lấy tiết diện tích phân cho các phản ứng như thế đo được là

$$\int \sigma_{\mu\mu}(E)dE = 8,5 \times 10^{-33} \text{ cm}^2 \cdot \text{MeV},$$

$$\int \sigma_h(E)dE = 3,3 \times 10^{-31} \text{ cm}^2 \cdot \text{MeV}.$$

Sử dụng công thức cộng hưởng Breit-Wigner để xác định độ rộng riêng phần $\Gamma_{\mu\mu}$ và Γ_h cho phân rã $\mu\mu$ và phân rã hađron của cộng hưởng.

Lời giải:

Công thức Breit-Wigner có thể được viết cho hai trường hợp như sau

$$\sigma_\mu(E) = \frac{\pi(2J+1)}{M^2}\frac{\Gamma_{ee}\Gamma_{\mu\mu}}{(E-M)^2+\frac{\Gamma^2}{4}},$$

$$\sigma_h(E) = \frac{\pi(2J+1)}{M^2}\frac{\Gamma_{ee}\Gamma_h}{(E-M)^2+\frac{\Gamma^2}{4}},$$

Trong đó M và J là khối lượng và spin của trạng thái cộng hưởng, Γ, Γ_{ee}, Γ_h và $\Gamma_{\mu\mu}$ tương ứng là độ rộng toàn phần, và độ rộng riêng phần của phân rã thành electron, hađron, và muyon. Ta có

$$\Gamma = \Gamma_{ee} + \Gamma_{\tau\tau} + \Gamma_{\mu\mu} + \Gamma_h ,$$

trong đó $\Gamma_{\tau\tau}$ là độ rộng riêng phần của phân rã thành các hạt τ. Bởi vì tính phổ biến của các tương tác lepton, nên nếu ta bỏ qua sự khác biệt về thừa số không gian pha, ta có $\Gamma_{ee} = \Gamma_{\tau\tau} = \Gamma_{\mu\mu}$, và do đó

$$\Gamma = 3\Gamma_{\mu\mu} + \Gamma_h .$$

Đối với một cộng hưởng tại $M = 9,5$ GeV, $J = 1$. Ta có

$$\int \sigma_{\mu\mu}(E)dE = \frac{3\pi\Gamma_{\mu\mu}^2}{M^2}\int\frac{dE}{(E-M)^2+\frac{\Gamma^2}{4}}$$

$$= \frac{6\pi^2\Gamma_{\mu\mu}^2}{M^2\Gamma} = 8{,}5\times 10^{-33}\ \text{cm}^2\cdot\text{MeV},$$

$$\int \sigma_h(E)dE = \frac{3\pi\Gamma_{\mu\mu}\Gamma_h}{M^2}\int\frac{dE}{(E-M)^2+\frac{\Gamma^2}{4}}$$

$$= \frac{6\pi^2\Gamma_{\mu\mu}\Gamma_h}{M^2\Gamma} = 3{,}3\times 10^{-31}\ \text{cm}^2\cdot\text{MeV},$$

tỉ số của chúng là

$$\Gamma_h = 38{,}8\Gamma_{\mu\mu} .$$

Do vậy

$$\Gamma = \Gamma_h + 3\Gamma_{\mu\mu} = 41{,}8\Gamma_{\mu\mu} ,$$

và

$$\Gamma_{\mu\mu} = \frac{M^2}{6\pi^2}\frac{\Gamma}{\Gamma_h} \times 3,3 \times 10^{-31} = 5,42 \times 10^{-26}\ \mathrm{MeV^3cm^2}\,.$$

Để đổi sang hệ đơn vị thông thường ta để ý rằng

$$1 = \hbar c = 197 \times 10^{-13}\ \mathrm{MeV \cdot cm}\,,$$

hay

$$1\ \mathrm{cm} = \frac{1}{197 \times 10^{-13}}\ \mathrm{MeV^{-1}}\,.$$

Do đó

$$\Gamma_{\mu\mu} = 1,40 \times 10^{-3}\ \mathrm{MeV}\,,$$

và

$$\Gamma_h = 38,8\Gamma_{\mu\mu} = 5,42 \times 10^{-2}\ \mathrm{MeV}\,,$$

$$\Gamma = 41,8\Gamma_{\mu\mu} = 5,84 \times 10^{-2}\ \mathrm{MeV}\,.$$

3090

Giả thiết rằng tự nhiên cung cấp cho chúng ta "quac" Q^+ và phản quac Q spin 1 tích điện nặng. Sử dụng một mô hình giống như mô hình chacmoni phi tương đối tính mà mô tả thành công họ J/ψ, hãy dự đoán phổ của cộng hưởng QQ trung hòa. Lập sơ đồ của một vài trạng thái mong đợi thấp nhất, chỉ ra spin, tính chẵn lẻ liên hợp điện tích, và chuyển tiếp điện từ cho phép cũng như bậc mong đợi của các mức.

(Princeton)

Lời giải:

Mô hình phi tương đối tính hiện tại, dùng để làm việc với các quac nặng, sử dụng một thế tương tác mạnh, gần đúng bằng một thế hướng tâm. Khi đó thành phần góc của hàm sóng có dạng hàm điều hòa cầu. Để tính đến sự giam quac, một thế tốt hơn được đưa ra bởi mô hình Cornell là $V(r) = -k/r + r/a^2$, chính là sự chồng chập của một thế Coloumb và một thế tuyến tính, với thế ban đầu cho tính tự do tiệm cận, và thành phần sau cho sự giam quac. Bằng cách xét tương quan spin, bậc của các mức có thể được tính toán bằng số. Đối với hệ quac-phản quac ta có

spin: $\mathbf{J} = \mathbf{S} + \mathbf{l}$, trong đó $\mathbf{S} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$, $s_1 = s_2 = 1$,

Tính chẵn lẻ P: $P(Q^+Q^-) = P(Q^+)P(Q^-)(-1)^l = (-1)^l$, do với boson spin 1, $P(\bar{Q}) = P(Q)$,
Tính chẵn lẻ C: $C(Q^+Q^-) = (-1)^{l+S}$.

Như thế hệ có thể có J^{PC} như sau

$l = 0,$	$S = \lvert \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 \rvert = 0,$	n^1S_0	$J^{PC} = 0^{++}$
	$S = \lvert \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 \rvert = 1$	n^3S_1	1^{+-}
	$S = \lvert \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 \rvert = 2$	n^5S_2	2^{++}
$l = 1,$	$S = \lvert \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 \rvert = 0$	n^1P_1	1^{--}
	$S = \lvert \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 \rvert = 1$	n^3P_0	0^{-+}
		n^3P_1	1^{-+}
		n^3P_2	2^{-+}
	$S = \lvert \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 \rvert = 2$	n^5P_1	1^{--}
		n^5P_2	2^{--}
		n^5P_3	3^{--}

	2^1S_0	2^3S_1	2^5S_2							
				1^1P_1	1^3P_0	1^3P_1	1^3P_2	1^5P_1	1^5P_2	1^5P_3
	1^1S_0	1^3S_1	1^5S_2							
J^{PC} :	0^{++}	1^{+-}	2^{++}	1^{--}	0^{-+}	1^{-+}	2^{-+}	1^{--}	2^{--}	3^{--}

(3.3)

Ở trên chúng ta đã sử dụng các kí hiệu phổ $n^{2S+1}S_J$, $n^{2S+1}P_J$ v.v. để kí hiệu cho các trạng thái, với n là số lượng tử chính, $2S + 1$ là bội, bội đơn, bội ba hay bội bốn, và J là momen động lượng toàn phần. Bậc của các mức được cho trong hình 3.27 (chỉ thể hiện các trạng thái S và P).

Do bậc của các trạng thái P liên hệ với số hạng tương quan spin nên bậc cho ở đây chỉ là một giá trị có thể. Bậc thực sự phải được tính toán bằng cách sử dụng thế giả định. Thậm chí các mức cho ở đây nhìn còn phức tạp hơn mức của một hệ phản duyên-duyên spin 1/2 với sự thêm vào của phổ $^5S_2$ và ^5P_J. Theo quy tắc chọn lọc của các chuyển tiếp điện từ, các chuyển tiếp được liệt kê trong Bảng 3.13.

Chuyển tiếp	Δ J	Δ P	Δ C	Loại chuyển tiếp
$2^3S_1 \rightarrow 1^3P_J$	0,1	-1	-1	E1
$1^3P_J \rightarrow 1^3S_1$	0,1	-1	-1	E1
$2^5S_2 \rightarrow 2^3S_1 \rightarrow 2^1S_0$	1	1	-1	M1(E2)
$1^5S_2 \rightarrow 1^3S_1 \rightarrow 1^1S_0$	1	1	-1	M1(E2)
$2^5S_2 \rightarrow 1^3S_1$	1	1	-1	M1(E2)
$2^3S_1 \rightarrow 1^1S_1$	1	1	-1	M1(E2)
$2^5S_2 \rightarrow 1^5P_J$	0,1	-1	-1	E1
$1^5P_J \rightarrow 1^5S_2$	0,1	-1	-1	E1
$2^1S_0 \rightarrow 1^1P_1, 1^5P_1$	1	-1	-1	E1
$1^1P_1, 1^5P_1 \rightarrow 1^1S_0$	1	-1	-1	E1
$2^5S_2 \rightarrow 1^1P_1$	1	-1	-1	E1
$1^1P_1 \rightarrow 1^5S_2$	1	-1	-1	E1

Chú ý rằng các chuyển tiếp điện từ giữa các trạng thái P không được liệt kê trong bảng bởi vì bậc của mức không thể làm sáng tỏ. Các chuyển tiếp bậc cao hơn ($M2$, $E3$, v.v.) giữa $2^1S_0 \rightarrow 1^5P_{2,3}$ cũng được loại ra. Chuyển tiếp $^5S_2 \rightarrow {}^1S_0$, $^3S_1 \rightarrow {}^5P_2, {}^1P_1$, v.v. do tính chẵn lẻ C bị cấm nên cũng được loại ra.

PHẦN IV

PHƯƠNG PHÁP THỰC NGHIỆM VÀ CÁC CHỦ ĐỀ ĐA DẠNG

1. ĐỘNG HỌC CỦA CÁC HẠT NĂNG LƯỢNG CAO (4001–4061)

4001

Một máy gia tốc được nghiên cứu tai SLAC (Standford Linear Accelerator Center – Trung tâm máy gia tốc tuyến tính Standford) đã tạo ra các chùm electron và positron va chạm trực diện với nhau. Các hạt có năng lượng 50 GeV. Thí nghiệm cho thấy mỗi chùm chứa 10^{10} hạt và có thể tạo nên dưới dạng một hình trụ tích điện đều bán kính 1 micron và dài 2 mm.

(a) Đối với một người quan sát chuyển động cùng với chùm hạt thì bán kính và chiều dài của nó là bao nhiêu? Đối với chùm hạt trái dấu thì sao?

(b) Đối với người quan sát chuyển động theo một chùm hạt, phải mất bao nhiêu thời gian để hai chùm hạt vượt qua nhau?

(c) Vẽ sự phụ thuộc của từ trường vào bán kính trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm khi hai chùm hạt phủ nhau. Giá trị của B là bao nhiêu gaoxơ khi bán kính bằng 1 micron.

(d) Trong gần đúng xung lượng, tính góc lệch của electron trên bề mặt của chùm hạt khi nó vượt qua chùm hạt kia. (Bỏ qua tương tác hạt-hạt).

(*UC, Berkeley*)

Lời giải:

(a) Trong một chùm hạt, xét hạt P chuyển động cùng người quan sát. Gọi Σ, Σ_0 lần lượt là hệ quy chiếu gắn với phòng thí nghiệm và người quan sát, chọn chiều x là chiều chuyển động cả hạt P. Hệ số Lorentz cho P và Σ_0, trong Σ là

$$\gamma = \frac{E}{mc^2} = \frac{50 \times 10^9}{0,5 \times 10^6} = 1 \times 10^5 .$$

Đối với một người quan sát trong Σ, chiều dài chùm hạt sẽ bị co ngắn lại thành

$$L = \frac{1}{\gamma} L_0 ,$$

ở đây L_0 là chiều dài trong Σ_0. Do đó

$$L_0 = \gamma L = 1 \times 10^5 \times 2 \times 10^{-3} = 200 \text{ m} .$$

Bán kính của chùm hạt là

$$r_0 = r = 1\ \mu m\,,$$

bởi vì không có sự co ngắn theo phương vuông góc.

Chùm hạt mang điện tích trái dấu chuyển động với vận tốc $-\beta c$ trong Σ, trong đó β được cho bởi

$$\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2}\,.$$

Vận tốc của nó trong Σ_0 được tính theo phép biến đổi Lorentz cho vận tốc

$$\beta' = \frac{-\beta-\beta}{1-\beta(-\beta)} = -\frac{2\beta}{1+\beta^2}\,.$$

Do đó chiều dài của nó trong hệ quy chiếu Σ_0 là

$$L' = \frac{1}{\gamma'}L_0 = L_0\sqrt{1-\beta'^2} = L_0\sqrt{1-\left(\frac{2\beta}{1+\beta^2}\right)^2}$$

$$= L_0\left(\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}\right) = \frac{L_0}{2\gamma^2-1}$$

$$= \frac{200}{2\times 10^{10}-1} \approx 10^{-8} = 0{,}01\ \mu\text{m}\,.$$

(b) Đối với người quan sát trong Σ_0 thời gian để hai chùm hạt vượt qua nhau hoàn toàn là

$$t' = \frac{L_0+L'}{\beta' c}\,.$$

Do

$$\beta = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} \approx 1$$

và như thế

$$\beta' = \frac{2\beta}{1+\beta^2} \approx 1\,,$$

$$t' \approx \frac{200+10^{-8}}{c}$$

$$= \frac{200}{3\times 10^8} = 6{,}67\times 10^{-7}\ \text{s}\,.$$

(c) Xét chùm positron và gọi độ dài, bán kính, số hạt và mật độ điện tích lần lượt là l, r_0, N và ρ. Khi đó ta có

$$\rho = \frac{eN}{\pi r_0^2 l}.$$

Hai chùm hạt positron và electron mang điện tích trái dấu và chuyển động ngược chiều nên mật độ điện tích toàn phần là

$$J = 2\rho\beta c,$$

trong đó βc là vận tốc chuyển động của các hạt, được cho bởi

$$\gamma = \frac{E}{mc^2} = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Áp dụng định luật rota Ampére

$$\oint_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I,$$

chúng ta tìm được đối với $r > r_0$,

$$2\pi r B = \mu_0 \cdot \frac{2eN}{\pi r_0^2 l}\beta c \cdot \pi r_0^2,$$

hoặc

$$B = \frac{\mu_0 eN}{\pi l}\frac{\beta c}{r};$$

với $r < r_0$ ta có

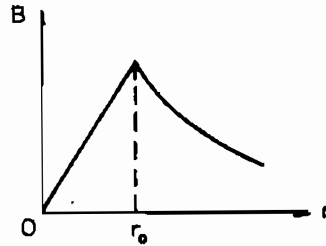
$$2\pi r B = \mu_0 \cdot \frac{2eN}{\pi r_0^2 l}\beta c \pi r^2$$

hoặc

$$B = \frac{\mu_0 eN}{\pi l}\frac{\beta c r}{r_0^2}.$$

Hình 4.1 chỉ ra sự phụ thuộc của B theo r. Tại vị trí $r = r_0 = 1$ μm ta có

$$B = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 1,6 \times 10^{-19} \times 10^{10}}{\pi \times 2 \times 10^{-3} \times 10^{-6}} \times 1 \times 3 \times 10^8 = 96 \text{ T}$$
$$= 9,6 \times 10^5 \text{ Gs}.$$



Hình 4.1

(d) Từ trường tác dụng một lực bằng vB vuông góc với chuyển động của electron. Gọi Δt là thời gian va chạm giữa hai chùm hạt, ta thu được động lượng vuông góc

$$p_\perp = evB\Delta t\,.$$

Do đó

$$\theta \approx \frac{p_\perp}{p} = \frac{evB\Delta t}{m\gamma v} = \frac{eBl}{m\gamma v} = \frac{eBcl}{pc}$$
$$= \frac{1,6\times 10^{-19}\times 96\times 3\times 10^{8}\times 2\times 10^{-3}}{50\times 10^{9}\times 1,6\times 10^{-19}} = 1,15\times 10^{-3}\ \text{rad} = 39,6'\,.$$

4002

Hạt meson tương đối tính tạo ra từ một quá trình cơ bản nào đó chuyển động trong từ trường B với quỹ đạo có độ cong cho bởi $(\rho B)_1 = 2,7$ tesla-mét.

Sau quá trình chuyển động trong môi trường năng lượng của nó giảm đi đáng kể, độ cong quỹ đạo của nó lúc này là $(\rho B)_2 = 0,34$ tesla-mét. Đo thời gian bay của meson người ta tính được vận tốc của meson "chậm" này là $v_2 = 1,8\times 10^8$ m/s.

(a) Tìm khối lượng nghỉ và động năng của hạt meson (tính theo MeV) trước và sau khi giảm vận tốc (với độ chính xác hai con số).

(b) Nếu xác suất phân rã của meson "chậm" này trên quãng đường 4 m là 50%, tính thời gian sống thực của meson này trong hệ quy chiếu

riêng đứng yên của nó và tính quãng đường để 50% meson đầy năng lượng ban đầu phân rã khi xét trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm.

(*UC, Berkeley*)

Lời giải:

(a) Do $evB = \frac{\gamma m v^2}{\rho}$, hay $\rho B = \frac{\gamma \beta m c}{e}$ nên ta có

$$\frac{(\rho B)_1}{(\rho B)_2} = \frac{\gamma_1 \beta_1}{\gamma_2 \beta_2}.$$

Với $\beta_2 = \frac{v_2}{c} = \frac{1,8\times 10^8}{3\times 10^8} = 0,6$, hay $\gamma_2\beta_2 = \frac{\beta_2}{\sqrt{1-\beta_2^2}} = 0,75$, ta có

$$\begin{aligned} p_2 c = \gamma_2 \beta_2 m c^2 &= ec(\rho\beta)_2 \\ &= 1,6 \times 10^{-19} \times 0,34c \text{ Jun} \\ &= 0,34 \times 3 \times 10^8 \text{ eV} \\ &= 0,102 \text{ GeV}. \end{aligned}$$

Và vì thế khối lượng nghỉ của meson là

$$m = \frac{p_2 c}{\gamma_2 \beta_2 c^2} = \frac{0,102}{0,75} \text{ GeV}/c^2 = 0,14 \text{ GeV}/c^2.$$

Trước khi vận tốc giảm, động lượng của meson là

$$p_1 c = ec(\rho B)_1 = 2,7 \times 0,3 = 0,81 \text{ GeV},$$

từ đó động năng của nó là

$$T_1 = \sqrt{p_1^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2 = \sqrt{0,81^2 + 0,14^2} - 0,14 = 0,68 \text{ GeV}.$$

Sau khi giảm vận tốc, động năng của meson là

$$T_2 = \sqrt{p_2^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2 = \sqrt{0,102^2 + 0,14^2} - 0,14 = 0,033 \text{ GeV}.$$

(b) Thời gian sống τ được xác định bởi công thức

$$\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = \exp\left(-\frac{l}{\beta c \tau}\right) = \frac{1}{2},$$

hay

$$\tau = \frac{l}{\beta c \ln 2}\,.$$

Trong hệ quy chiếu đứng yên của meson, thời gian sống khi tính tới sự co giãn của thời gian là

$$\tau_0 = \frac{\tau}{\gamma_2} = \frac{l_2}{\gamma_2\beta_2 c\ln 2} = \frac{4}{0,75\times 3\times 10^8\ \ln 2} = 2,6\times 10^{-8}\ \mathrm{s}\,.$$

Trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm, quãng đường mà meson đầy năng lượng đi được trước khi số lượng của chúng giảm xuống còn 50% được cho bởi

$$l_1 = \tau_1\beta_1 c\ln 2 = \tau_0\gamma_1\beta_1 c\ln 2\,.$$

Do

$$\gamma_1\beta_1 = \frac{p_1 c}{mc^2} = \frac{0,81}{0,14} = 5,8\,,$$

$$l_1 = 2,6\times 10^{-8}\times 5,8\times 3\times 10^8\times \ln 2 = 31\ \mathrm{m}\,.$$

4003

Mới đây máy syncrotron Princeton (PPA) đã được dùng để gia tốc các ion nitơ điện tích lớn. Nếu PPA có thể tạo ra proton với tổng năng lượng danh định là 3 GeV, thì động năng cực đại của ion ^{14}N điện tích 6^+ là bao nhiêu?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Sau khi đi vào máy syncrotron, các ion bị giam giữ bởi từ trường và được gia tốc bằng máy gia tốc tần số vô tuyến (RF). Năng lượng cực đại có thể đạt được bị giới hạn bởi giá trí cực đại B_m của từ trường. Động lượng cực đại p_m được cho bởi

$$p_m = |q|\rho B_m$$

trong đó $|q|$ là điện tích tuyệt đối của ion và ρ là bán kính quỹ đạo của nó. Áp dụng cho photon và ion nitơ ta có

$$\frac{p_p}{p_N} = \frac{|q|_p}{|q|_N}\,, \qquad p_N = 6p_p\,.$$

Bởi vì

$$\sqrt{p_p^2 + m_p^2} = \sqrt{p_p^2 + 0,938^2} = 3\,,$$

ta có

$$p_p = 2,85 \text{ GeV}/c\,,$$

và

$$p_N = 17,1 \text{ GeV}/c\,.$$

Do vậy động năng cực đại có thể gia tốc cho ion nitơ là

$$T = \sqrt{17,1^2 + (0,938 \times 14)^2} - 0,938 \times 14 = 8,43 \text{ GeV}\,.$$

4004

(a) Hạt muyon đứng yên tồn tại trong 10^{-6} s và có khối lượng là 100 MeV/c^2. Một hạt muyon phải có năng lượng là bao nhiêu để có thể đi tới bề mặt trái đất nếu như nó được sinh ra ở trên cao của bầu khí quyển (khoảng $\sim 10^4$ m)?

(b) Dựa vào xấp xỉ bậc 0 cho rằng trái đất có từ trường 1-gaoxơ hướng theo trục và mở rộng tới 10^4 m. Một muyon năng lượng E bay theo hướng tới xích đạo trái đất. Nó sẽ bị lệch bao nhiêu và theo hướng nào dưới tác dụng của từ trường?

(c) Proton năng lượng rất cao trong các tia vũ trụ có thể mất năng lượng do va chạm với bức xạ 3 K (bức xạ nền) theo quá trình $p + \gamma \to p + \pi$. Proton cần có năng lượng bao nhiêu để vượt trên ngưỡng của phản ứng này?

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Gọi năng lượng của muyon là $E \equiv \gamma m$, trong đó m là khối lượng nghỉ của muyon. Trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm, thời gian sống của muon là $\tau = \tau_0\gamma$, τ_0 là thời gian sống trong hệ quy chiếu đứng yên đối với muyon. Khi đó ta có

$$l = \tau\beta c = \tau_0\gamma\beta c\,,$$

từ đó ta thu được

$$E = \frac{lm}{\beta\tau_0 c} \approx \frac{lm}{\tau_0 c} = \frac{10^4 \times 0,1}{10^{-6} \times 3 \times 10^8} = 3,3 \text{ GeV}\,.$$

(b) Xét một hạt μ^+ trong từ trường trái đất. Lực từ tác dụng sẽ cân bằng với lực hướng tâm

$$evB = \frac{m\gamma v^2}{R},$$

từ đó thu được

$$R = \frac{pc}{ecB} \approx \frac{E}{ecB},$$

ở đây p và E là động lượng và năng lượng toàn phần của muyon. Với năng lượng E đo bằng GeV và R đo bằng m ta có

$$\begin{aligned} R &\approx \frac{1,6 \times 10^{-10} E}{1,6 \times 10^{-19} \times 3 \times 10^8 \times 10^{-4}} \\ &= \frac{10^5}{3} \times E . \end{aligned}$$

Hình 4.2

Hạt μ^+ tới theo phương thẳng đứng bị lệch về phía đông và chạm bề mặt trái đất cách đường đi gốc AD một đoạn a (hình 4.2). Gọi O là tâm cong của quỹ đạo muyon và chú ý rằng AD tiếp tuyến với quỹ đạo. Do $\angle OAD = \frac{\pi}{2}$, ta có $\angle GAD = \angle AOH$. Từ đó suy ra ΔGAD và ΔAOH đồng dạng và vì vậy ta có

$$\frac{a}{\sqrt{l^2 + a^2}} = \frac{\sqrt{l^2 + a^2}}{2R},$$

hay

$$a^2 - 2aR + l^2 = 0,$$

suy ra

$$a = \frac{2R \pm \sqrt{4R^2 - 4l^2}}{2} \approx \frac{l^2}{2R}$$

do $a \ll l \ll R$. Vì vậy ta thu được

$$a \approx \frac{3 \times 10^8}{2 \times 10^5 \times E} = \frac{1,5 \times 10^3}{E} \,.$$

Ví dụ, $a \approx 455$ m nếu $E = 3,3$ GeV; $a \approx 75$ m nếu $E = 20$ GeV.

Do từ trường của trái đất hướng tới cực bắc nên đối với μ^+ bay thẳng đứng tới trái đất thì lực từ tác dụng hướng về phía đông. Nó sẽ bị lệch về phía đông, trong khi μ^- sẽ bị lệch về phía tây.

(c) Bức xạ ở $T = 3$ K gồm các photon với năng lượng $E = 3kT/2$, trong đó $k = 8,6 \times 10^{-5}$ eV/K là hằng số Boltzmann. Ta có

$$E_\gamma = 8,6 \times 10^{-5} \times 3/2 \times 3 = 3,87 \times 10^{-4} \text{ eV}\,.$$

Xét phản ứng $\gamma + p = p + \pi$. Lấy $c = 1$ với va chạm trực diện tại ngưỡng ta có

$$(E_p + E_\gamma)^2 - (p_p - E_\gamma)^2 = (m_p + m_\pi)^2 \,.$$

Với proton năng lượng rất cao thì $E_p^2 - p_p^2 = m_p^2$, và $p_p \approx E_p$ công thức rút gọn thành

$$E_p \approx \frac{m_\pi^2 + 2m_p m_\pi}{4E_\gamma} \,.$$

Do $m_p = 0.938$ GeV, $m_\pi = 0,140$ GeV, $E_\gamma = 3,87 \times 10^{-13}$ GeV, năng lượng ngưỡng là

$$E_p \approx \frac{0,14^2 + 2 \times 0,938 \times 0.14}{4 \times 3,87 \times 10^{-13}} = 1,82 \times 10^{11} \text{ GeV}\,.$$

4005

Một muyon có khối lượng gần đúng bằng 100 MeV/c^2 và thời gian sống khi đứng yên là 2 micrô giây. Muyon phải cần phải có năng lượng là bao nhiêu để có thể đi vòng quanh trái đất với một xác suất hoàn thành đường đi là khá cao, giả thiết rằng từ trường trái đất đủ lớn để giữ hạt muyon trên quỹ đạo? Liệu trừ trường trái đất có thực sự đủ lớn?

(*Columbia*)

Lời giải:

Để đi vòng quanh trái đất, thời gian sống của hạt muyon chuyển động phải lớn hơn hoặc bằng thời gian cần thiết để hoàn thành một vòng. Gọi thời gian sống phù hợp của muyon là τ_0. Khi đó ta có

$$\tau_0\gamma \geq \frac{2\pi R}{\beta c},$$

trong đó R là bán kính trái đất, βc là vận tốc của muyon và $\gamma = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$. Do đó động lượng cực tiểu cần thiết cho muyon sẽ là

$$pc = m\gamma\beta c = \frac{2\pi Rmc}{\tau_0},$$

và năng lượng tối thiểu cần thiết là

$$E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} = mc^2\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi R}{\tau_0 c}\right)^2}$$

$$= 100 \times \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi \times 6400 \times 10^3}{2 \times 10^{-6} \times 3 \times 10^8}\right)^2} = 6,7 \times 10^6 \text{ MeV}.$$

Để giữ hạt meson trên quỹ đạo ta cần có

$$evB \geq \frac{m\gamma v^2}{R},$$

hoặc

$$B \geq \frac{pc}{eRc} = \frac{6,7 \times 10^6 \times 1,6 \times 10^{-13}}{1,6 \times 10^{-19} \times 6400 \times 10^3 \times 3 \times 10^8}$$

$$= 3,49 \times 10^{-3}\, T \approx 35 \text{ Gs}.$$

Bởi vì từ trường trung bình trên bề mặt trái đất vào khoảng vài phần mười gaoxơ, nên nó không thể giữ hạt muyon ở trên quỹ đạo.

4006

(a) Một nơtron cách trái đất 5000 năm ánh sáng có khối lượng nghỉ là 940 MeV và nửa thời gian sống 13 phút. Nó phải có năng lượng là bao nhiêu để có thể tới trái đất sau một nửa thời gian sống?

(b) Meson π^+ đứng yên tự phân hủy theo phương trình

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu ,$$

Trong quá trình đó meson μ^+ có động năng bằng 4,0 MeV. Khối lượng nghỉ của μ^+ là 106 MeV. Khối lượng nghỉ của nơtrino bằng không. Khối lượng nghỉ của π^+ là bao nhiêu?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Gọi năng lượng của nơtron là E, vận tốc của nó là βc, nửa thời gian sống trong hệ quy chiếu đứng yên là $\tau_{1/2}$. Khi đó nửa thời gian sống của nó trong hệ quy chiếu trái đất là $\tau_{1/2}\gamma$, trong đó $\gamma = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$. Để nơtron tới trái đất ta cần

$$\gamma\beta c\tau_{\frac{1}{2}} = 5000 \times 365 \times 24 \times 60c ,$$

hay

$$\gamma\beta = 2,02 \times 10^8 .$$

Năng lượng của nơtron là

$$E = \sqrt{m_0^2 + p^2} = m_0\sqrt{1+\gamma^2\beta^2} = 1,9 \times 10^{11} \text{ MeV} .$$

(b) Xét π^+ đứng yên phân rã theo quá trình $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$. Bảo toàn động lượng ta có động lượng của μ và ν_μ là **p** và $-$**p**. Khi đó năng lượng của chúng lần lượt là $E_\mu = \sqrt{m_\mu^2 + p^2}$, $E_\nu = p$. Có $m_\mu = 106$ MeV, $E_\mu = 4 + 106 = 110$ MeV, ta thu được

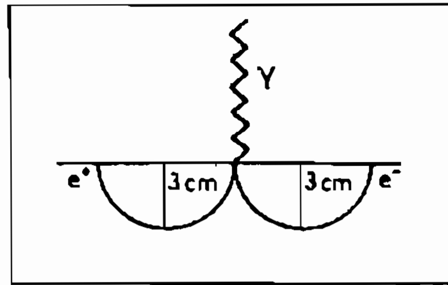
$$p = \sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2} = 29,4 \text{ MeV} .$$

từ đó suy ra

$$m_\pi = E_\mu + E_\nu = 110 + 29,4 = 139,4 \text{ MeV} .$$

4007

Một cặp electron-positron đi vào buồng hơi tạo ra những đường cong bán kính 3 cm nằm trong mặt phẳng vuông góc với từ trường có độ lớn 0,11 tesla (hình 4.3). Năng lượng của tia γ đã tạo ra cặp electron-positron trên là bao nhiêu?



Hình 4.3

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Bởi vì

$$evB = \frac{m\gamma v^2}{\rho} = \frac{pv}{\rho},$$

nên ta có

$$\begin{aligned} pc &= ecB\rho \\ &= \frac{1,6 \times 10^{-19} \times 3 \times 10^8}{1,6 \times 10^{-13}} B\rho \\ &= 300 B\rho \end{aligned}$$

với B tính bằng tesla, ρ tính bằng mét và p tính bằng MeV/c. Đặt $c = 1$, ta thu được động lượng của các hạt e^+ hay e^- là

$$p = 300B\rho = 300 \times 0,11 \times 0,03 = 0,99 \text{ MeV}/c,$$

và năng lượng của chúng là

$$E = \sqrt{p^2 + m_e^2} = \sqrt{0,99^2 + 0,51^2} = 1,1 \text{ MeV}.$$

Từ đó năng lượng của tia γ sinh ra cặp e^+e^- được tính gần đúng bằng

$$E_\gamma = 2E = 2,2 \text{ MeV}.$$

4008

Hạt meson D^0 (khối lượng = 1,86 GeV) được phát hiện gần đây phân rã theo phương trình $D^0 \to K^+\pi^-$ trong thời gian $\tau = 5 \times 10^{-13}$ giây. Chúng

được tạo ra với năng lượng 18,6 GeV trong một buồng bọt. Để quan sát được hơn 50% các phân rã ta cần độ phân giải là bao nhiêu?

(a) 0,0011 mm.

(b) 0,44 mm.

(c) 2,2 mm.

(*CCT*)

Lời giải:

Ta có

$$I = I_0 e^{-t/\tau} \geq 0,5 I_0 ,$$

$$t \leq \tau \ln 2 .$$

Các hạt meson có $\gamma = \frac{18,6}{1,86} = 10$ và $\beta \approx 1$. Thời gian sống phù hợp là $\tau_0 = 5 \times 10^{-13}$ s, suy ra

$$\tau = \gamma \tau_0 = 5 \times 10^{-12} \text{ s} .$$

Do đó quãng đường meson đi được là

$$tc \leq \tau c \ln 2 = 5 \times 10^{-12} \times 3 \times 10^{11} \times \ln 2$$
$$= 1 \text{ mm}$$

Vì vậy độ phân giải phải tốt hơn 1 mm, và câu trả lời là (b).

4009

Một tia kaon chuẩn trực đi ra từ một phổ kế phân tích với năng lượng $E = 2$ GeV. Ở khoảng cách nào thông lượng giảm xuống 10% cho thời gian sống là $1,2 \times 10^{-8}$ s?

(a) 0,66 km.

(b) 33 m.

(c) 8,3 m. (*CCT*)

Lời giải:

Do $m_k = 0,494$ GeV, $\tau_0 = 1,2 \times 10^{-8}$ s, $E_k = 2$ GeV, nên ta có

$$\gamma = \frac{2}{0,494} = 4,05 , \qquad \beta = \sqrt{1 - \gamma^{-2}} = 0,97 ,$$

và thời gian sống trong hệ quy chiều phòng thí nghiệm là

$$\tau = \gamma\tau_0 = 4,8 \times 10^{-8}\ \mathrm{s}\,.$$

Thời gian t để thông lượng kaon giảm từ I_0 tới $I_0/10$ được cho bởi

$$I_0 e^{-t/\tau} = \frac{I_0}{10}\,,$$

hay

$$t = \tau \ln 10 = 11,05 \times 10^{-8}\ \mathrm{s}\,.$$

Quãng đường tia chuẩn trực đi được trong thời gian t là

$$t\beta c = 11,05 \times 10^{-8} \times 0,97 \times 3 \times 10^{8} = 32\ \mathrm{m}\,.$$

Do đó câu trả lời là (b).

4010

Giá trị gần đúng của bước sóng Compton của một proton là

(a) 10^{-6} cm.

(b) 10^{-13} cm.

(c) 10^{-24} cm.

(CCT)

Lời giải:

Bước sóng Compton của một proton được tính theo công thức

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{m_p c} = \frac{2\pi\hbar c}{m_p c^2} \doteq \frac{2\pi \times 197 \times 10^{-13}}{938} = 1,32 \times 10^{-13}\ \mathrm{cm}\,.$$

Vì vậy câu trả lời là (b).

4011

Trong một va chạm đàn hồi hai vật:

(a) Quỹ đạo của các hạt phải nằm trong cùng một mặt phẳng trong hệ quy chiếu khối tâm.

(b) Độ xoáy (hình chiếu của spin lên phương của động lượng, h=Sp) của các hạt không đổi.

(c) Phân bố góc luôn đối xứng cầu.

(*CCT*)

Lời giải:

Từ định luật bảo toàn động lượng ta thấy các hạt phải nằm trên cùng một mặt phẳng. Do đó câu trả lời là (a).

4012

Một proton bay tới va chạm với một proton đứng yên. Sau va chạm, ngoài hai proton ban đầu còn xuất hiện thêm một hạt có khối lượng nghỉ M. Tìm năng lượng tối thiểu của proton chuyển động để quá trình trên có thể xảy ra. Năng lượng tương ứng sẽ là bao nhiêu nếu hai proton ban đầu chuyển động ngược chiều với cùng một vận tốc?

(*Columbia*)

Lời giải:

Tại ngưỡng của phản ứng ta có

$$p + p \to M + p + p \,,$$

các hạt tạo ra bên vế phải của phương trình đều đứng yên. Gọi năng lượng và động lượng của proton chuyển động tương ứng là E_p và p_p. Bình phương khối lượng bất biến (khối lượng toàn phần) của hệ tại ngưỡng là

$$S = (E_p + m_p)^2 - p_p^2 = (2m_p + M)^2 \,.$$

Do

$$E_p^2 = m_p^2 + p_p^2 \,,$$

nên ta có

$$E_p = \frac{(2m_p + M)^2 - 2m_p^2}{2m_p}$$

$$= m_p + 2M + \frac{M^2}{2m_p} \,.$$

Nếu hai proton cùng chuyển động tới nhau với vận tốc bằng nhau thì bình phương khối lượng bất biến (toàn phần) tại ngưỡng là

$$S = (E_p + E_p)^2 - (p_p - p_p)^2 = (2m_p + M)^2 \,,$$

từ đó rút ra

$$E_p = m_p + M/2\,.$$

4013

Một hạt tương đối tính có khối lượng nghỉ là m_0 và động năng $2m_0c^2$ bay tới đập vào và gắn chặt với một hạt đứng yên khối lượng nghỉ $2m_0$.

(a) Tìm khối lượng nghỉ của hạt kết hợp.

(b) Tìm vận tốc của nó.

(*SUNY, Buffalo*)

Lời giải:

(a) Hạt chuyển động có năng lượng toàn phần là $3m_0$ và động lượng

$$p = \sqrt{(3m_0)^2 - m_0^2} = \sqrt{8}m_0\,.$$

Khi đó bình phương khối lượng bất biến là

$$S = (3m_0 + 2m_0)^2 - p^2 = 17m_0^2\,.$$

Gọi khối lượng nghỉ của hạt ghép là M. Theo định luật bảo toàn động lượng thì động lượng của nó cũng là p. Do đó ta có

$$S = (\sqrt{M^2 + p^2})^2 - p^2 = M^2\,,$$

từ đó rút ra

$$M = \sqrt{S} = \sqrt{17}m_0\,.$$

(b) Với hạt ghép ta có

$$\gamma\beta = \frac{p}{M} = \sqrt{\frac{8}{17}}\,,$$

$$\gamma = \sqrt{\gamma^2\beta^2 + 1} = \sqrt{\frac{8}{17} + 1} = \frac{5}{\sqrt{17}}\,.$$

do vậy

$$\beta = \frac{\gamma\beta}{\gamma} = \frac{\sqrt{8}}{5}$$

và vận tốc của nó là

$$v = \beta c = 1,7 \times 10^{10}\ \text{cm/s}\,.$$

4014

Tìm năng lượng ngưỡng (động năng) của một chùm proton để phản ứng sau xảy ra

$$p + p \rightarrow \pi^0 + p + p$$

Với điều kiện bia proton đứng yên.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Sử dụng kết quả **Bài tập 4012** ta có

$$E_p = m_p + 2m_\pi + \frac{m_\pi^2}{2m_p} = 938 + 2 \times 135 + \frac{135^2}{2 \times 938} = 1218 \text{ MeV}.$$

Từ đó động năng ngưỡng của proton là $T_p = 1218 - 938 = 280$ MeV.

4015

Trong va chạm proton – proton năng lượng cao, một hoặc cả hai proton có thể bị phân tách thành hệ gồm một proton và một vài pion tích điện. Các phản ứng đó là

(1) $p + p \rightarrow p + (p + n\pi)$,

(2) $p + p \rightarrow (p + n\pi) + (p + m\pi)$,

trong đó n và m là số các pion được sinh ra.

Trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm, một proton tới (đạn – hạt dùng để bắn) có năng lượng toàn phần E đập vào một proton đứng yên (bia). Tìm

(a) Năng lượng cần thiết để phản ứng 1 xảy ra và bia phân tách thành một proton và 4 pion,

(b) Năng lượng cần thiết để phản ứng 1 xảy ra và proton tới tách thành một proton và 4 pion

(c) Năng lượng cần thiết để xảy ra phản ứng 2 và cả hai proton đều phân tách thành một proton và 4 pion. ($m_\pi = 0,140$ GeV, $m_p = 0,938$ GeV).

(*Chicago*)

Lời giải:

Gọi p_p là động lượng của proton tới, n_p và n_π là số proton và pion ở trạng

thái cuối cùng. Khi đó khối lượng bất biến bình phương của hệ là

$$S = (E + m_p)^2 - p_p^2 = (n_p m_p + n_\pi m_\pi)^2 ,$$

suy ra

$$E = \frac{(n_p m_p + n_\pi m_\pi)^2 - 2m_p^2}{2m_p} ,$$

do

$$E^2 - p_p^2 = m_p^2 .$$

(a) Với phản ứng $p + p \to 2p + 4\pi$ ta có

$$E = \frac{(2m_p + 4m_\pi)^2 - 2m_p^2}{2m_p} = 2,225\ GeV .$$

(b) Do hai proton là không thể phân biệt được nên lời giải giống như trường hợp (a) $E = 2,225$ GeV.

(c) Trường hợp $p + p \to 2p + 8\pi$ ta có

$$E = \frac{(2m_p + 8m_\pi)^2 - 2m_p^2}{2m_p} = 3,847\ \text{GeV} .$$

4016

Proton từ một máy gia tốc bay tới va chạm với hydro. Năng lượng tối thiểu để tạo ra phản proton là bao nhiêu?

(a) 6,6 GeV.

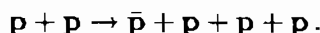
(b) 3,3 GeV.

(c) 2 GeV.

(*CCT*)

Lời giải:

Phản ứng tạo phản proton xảy ra như sau



$$\mathrm{p} + \mathrm{p} \to \bar{\mathrm{p}} + \mathrm{p} + \mathrm{p} + \mathrm{p} .$$

Ta có thể coi nguyên tử hydro đứng yên. Khi đó tại ngưỡng phản ứng ta có

$$(E + m_p)^2 - (E^2 - m_p^2) = (4m_p)^2 ,$$

ta rút ra được

$$E = 7m_p .$$

Vậy năng lượng ngưỡng là

$$E = 7m_p = 6,6 \text{ GeV} ,$$

(a) là câu trả lời đúng.

4017

Xác định năng lượng ngưỡng của một tia gama để khi nó va chạm với một electron đứng yên thì tạo ra một cặp electron – positron.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Từ định luật bảo toàn số lepton ta có phản ứng sẽ là

$$\gamma + e^- \to e^+ + e^- + e^- .$$

Tại ngưỡng, bình phương khối lượng bất biến là

$$S = (E_\gamma + m_e)^2 - p_\gamma^2 = (3m_e)^2 .$$

Với $E_\gamma = p_\gamma$, thay vào công thức trên ta có

$$E_\gamma = 4m_e = 2,044 \text{ MeV} .$$

4018

Xét một chùm tia pion bắn vào bia proton. Tìm ngưỡng tạo ra K^-?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Theo định luật bảo toàn số lạ thì K^+ cũng sẽ được tạo ra. Khi theo đó định luật bảo toàn I_z thì p sẽ chuyển thành n bởi vì π^- có $I_z = -1$. Do đó phản ứng sẽ là

$$\pi^- + p \to K^- + K^+ + n .$$

Gọi năng lượng ngưỡng và động lượng của π^- là E_π và p_π. Khối lượng bất biến bình phương là bảo toàn $S = (\Sigma E)^2 - (\Sigma \mathbf{P})^2$ ta có

$$S = (E_\pi + m_p)^2 - p_\pi^2 = (2m_K + m_n)^2 .$$

Với $E_\pi^2 - p_\pi^2 = m_\pi^2$, ta thu được

$$E_\pi = \frac{(2m_K + m_n)^2 - m_p^2 - m_\pi^2}{2m_p} = \frac{(2 \times 0,494 + 0,94)^2 - 0,938^2 - 0,14^2}{2 \times 0,938}$$

$$= 1,502 \text{ GeV}$$

4019

Một hạt khối lượng nghỉ m có động năng gấp hai lần năng lượng nghỉ. Hạt này va chạm với một hạt đứng yên có cùng khối lượng. Hai hạt kết hợp thành một hạt mới. Chỉ sử dụng những thông tin đã cho, tính toán khối lượng nghỉ của hạt mới đó.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Gọi khối lượng của hạt mới là M và khối lượng của hạt tới là m. Hạt tới có năng lượng toàn phần là $E = m + T = 3m$. Tại ngưỡng, M đứng yên, do đó bình phương khối lượng bất biến là

$$S = (E + m)^2 - p^2 = M^2 .$$

Với $E^2 - p^2 = m^2$, ta thu được

$$M^2 = 2Em + 2m^2 = 8m^2 ,$$

hay

$$M = 2\sqrt{2}m .$$

4020

Cho một hạt proton 1000 GeV đập vào một hạt proton đứng yên, năng lượng tự do để tạo ra khối lượng là bao nhiêu?

(a) 41,3 GeV.

(b) 1000 GeV.

(c) 500 GeV.

(CCT)

Lời giải:

Gọi proton tới và bia tương ứng là 1 và 2. Bởi vì khối lượng bất biến bình phương

$$S = (\Sigma E_i)^2 - (\Sigma \mathbf{p})^2$$

là bất biến Lorentz, nên ta có

$$(E_1 + m_p)^2 - p_1^2 = E^{*2},$$

trong đó E^* là năng lượng toàn phần của hệ trong hệ quy chiếu khối tâm. Nếu ở trạng thái cuối vẫn có hai proton thì năng lượng tự do sinh ra khối lượng là

$$\begin{aligned} E^* - 2m_p &= \sqrt{2m_pE_1 + 2m_p^2} - 2m_p \\ &= \sqrt{2 \times 0,938 \times 1000 + 2 \times 0,938^2} - 2 \times 0,938 \\ &= 41,5 \text{ GeV}. \end{aligned}$$

Do $E_1 \gg m_p$, nên ta có thể sử dụng phép gần đúng

$$\sqrt{2m_pE_1} \approx \sqrt{2000} = 45 \text{ GeV}.$$

Vì vậy câu trả lời là (a).

4021

Bên trong vành chứa các chùm tia va chạm đặt tại CERN, các proton với năng lượng toàn phần 30 GeV được cho va chạm trực diện. Khi đó một hạt proton phải có năng lượng là bao nhiêu để tạo ra cùng một năng lượng khối tâm khi va chạm với một proton đứng yên?

(Wisconsin)

Lời giải:

Xét một proton có năng lượng E và động lượng P bay tới va chạm với một proton đứng yên trong phòng thí nghiệm. Trong hệ quy chiếu khối tâm quá

trình trên sẽ được nhìn thấy như là va chạm trực diện của hai proton với năng lượng $\bar{E}$. Bình phương khối lượng bất biến S là bất biến Lorentz. Vì vậy ta có

$$S = (2\bar{E})^2 = (E + m_p)^2 - P^2 = 2m_pE + 2m_p^2\,,$$

ta rút ra được

$$E = \frac{4\bar{E}^2 - 2m_p^2}{2m_p} = \frac{4 \times 30^2 - 2 \times 0,938^2}{2 \times 0,938}$$
$$= 1,92 \times 10^3 \text{ GeV}\,.$$

4022

Tính tỉ lệ thay đổi động năng của một hạt α khi nó bị tán xạ 180° bởi hạt nhân O^{16}.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Gọi E là động năng của hạt α tới, p là động năng của nó, m_α là khối lượng, và gọi E', p' là động năng và động lượng của nó sau khi bị tán xạ α. Với sự gần đúng không tương đối tính ta có

$$p = \sqrt{2m_\alpha E}\,, \qquad p' = \sqrt{2m_\alpha E'}\,.$$

Gọi động lượng giật lùi của ^{16}O là P_0, theo định luật bảo toàn động lượng và năng lượng ta có

$$P_0 = p + p' = \sqrt{2m_\alpha E} + \sqrt{2m_\alpha E'}\,,$$
$$E = E' + \frac{(\sqrt{2m_\alpha E} + \sqrt{2m_\alpha E'})^2}{2M}\,,$$

Trong đó M là khối lượng của hạt nhân ^{16}O. Với $M \approx 4m_\alpha$ phương trình cuối trở thành

$$E = E' + \frac{1}{4}(\sqrt{E} + \sqrt{E}\,')^2 = \frac{5}{4}E' + \frac{1}{2}\sqrt{EE'} + \frac{1}{4}E\,,$$

hay

$$(5\sqrt{E'} - 3\sqrt{E})(\sqrt{E'} + \sqrt{E}) = 0\,.$$

Do đó ta có $5\sqrt{E'} - 3\sqrt{E} = 0$, suy ra $E' = \frac{9}{25}E$.

Vậy tỉ lệ thay đổi động năng của hạt α là

$$\frac{E' - E}{E} = -\frac{16}{25}.$$

4023

Một tia π^+ với động năng T sinh ra một số μ^+ chuyển động theo hướng ngược lại. Các hạt μ^+ được sinh ra theo phản ứng

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu.$$

Với

$$m_\pi c^2 = 139,57 \text{ MeV},$$

$$m_\mu c^2 = 105,66 \text{ MeV},$$

$$m_\nu c^2 = 0,0 \text{ MeV}.$$

T có thể nằm trong khoảng nào để cho phản ứng thực hiện được?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

μ^+ sinh ra từ phân rã π^+ sẽ chuyển động ngược lại trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm nếu vận tốc của nó trong hệ quy chiếu khối tâm, và cũng là hệ quy chiếu đứng yên của π^+, lớn hơn vận tốc của π^+ trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm. Biểu diễn các đại lượng trong hệ quy chiếu khối tâm bởi gạch ngang trên đầu ta có

$$m_\pi = \sqrt{\bar{\mathrm{p}}_\mu^2 + m_\mu^2} + \bar{\mathrm{p}}_\nu.$$

do nơtrino có khối lượng nghỉ bằng không. Bởi vì $\bar{\mathrm{p}}_\mu = -\bar{\mathrm{p}}_\nu$, $\bar{p}_\mu = \bar{p}_\nu$ cùng với phương trình trên ta có

$$\bar{p}_\mu = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi}.$$

Vì vậy ta thu được

$$\bar{E}_\mu = \sqrt{\bar{p}_\mu^2 + m_\mu^2} = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi},$$

và

$$\bar{\beta}_\mu = \frac{\bar{p}_\mu}{\bar{E}_\mu} = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_\pi^2 + m_\mu^2}.$$

Ta cần $\beta_\pi \leq \bar{\beta}_\mu$ để một số μ^+ có thể chuyển động ngược chiều. Vì vậy ta có

$$E_\pi \leq \frac{m_\pi}{\sqrt{1-\bar{\beta}_\mu{}^2}} = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\mu},$$

hay ta có

$$T_\pi \leq E_\pi - m_\pi = \frac{(m_\pi - m_\mu)^2}{2m_\mu} = 5,44 \text{ MeV}.$$

4024

Các quá trình sau có thể xảy ra hay không? Hãy chứng minh tại sao?

(a) Một hạt photon đập vào một hạt electron đứng yên và truyền toàn bộ năng lượng của nó cho electron đó.

(b) Một hạt photon trong không gian trống rỗng bị biến thành một electron và một positron.

(c) Một positron nhanh và một electron đứng yên triệt tiêu lẫn nhau và chỉ tạo ra một photon.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Tất cả 3 quá trình trên đều không thể xảy ra bởi vì trong mỗi trường hợp năng lượng và động lượng không thể cùng được bảo toàn.

(a) Đối với quá trình

$$\gamma + e \to e',$$

Định luật bảo toàn bình phương khối lượng bất biến cho ta,

$$S = (E_\gamma + m_e)^2 - p_\gamma^2 = 2m_e E_\gamma + m_e^2 = E_{e'}^2 - p_{e'}^2 = m_e^2,$$

dẫn tới $m_e E_\gamma = 0$, điều này trái với thực tế là E_γ và m_e đều khác 0.

(b) Trong quá trình $\gamma \to e^+ + e^-$, gọi năng lượng và động lượng của các hạt e^+ và e^- lần lượt là E_1, E_2, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$. Bình phương khối lượng bất biến của trạng thái ban đầu là

$$S(\gamma) = E_\gamma^2 - p_\gamma^2 = 0,$$

trong khi ở trạng thái cuối ta có

$$S(e^+e^-) = (E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2$$
$$= 2m_e^2 + 2(E_1E_2 - p_1p_2\cos\theta) \geq 2m_e^2 ,$$

trong đó θ là góc giữa $\mathbf{p}_1$ và $\mathbf{p}_2$. Do $S(\gamma) \neq S(e^+e^-)$, như vậy là vi phạm tính bất biến và do đó phản ứng không thể xảy ra.

(c) Phản ứng này là ngược của phản ứng trong phần (b). Như vậy tương tự trên phản ứng này sẽ không thể xảy ra.

4025

(a) Chứng minh rằng cặp electron-positron không thể được sinh ra bởi một photon cô lập, cụ thể là quá trình sinh cặp chỉ có thể xảy ra trong vùng lân cận của một hạt.

(b) Giả thiết rằng hạt đó là hạt nhân của một nguyên tử chì, hãy chỉ ra bằng tính toán số để chứng minh rằng có thể bỏ qua động năng giật lùi của hạt nhân khi ước lượng năng lượng ngưỡng của quá trình sinh cặp.

(*Columbia*)

Lời giải:

(a) Điều đó là không thể bởi vì năng lượng và động lượng không thể cùng được bảo toàn, đã được chứng minh ở **Bài tập 4024**(b). Tuy nhiên, nếu trong lân cận hạt đó có một hạt nào đó lấy bớt đi một ít động lượng thì quá trình đó vẫn có thể xảy ra.

(b) Bỏ qua động năng của hạt nhân khi nó giật lùi lại, năng lượng ngưỡng của photon cho việc sinh cặp e^+e^- là

$$E_\gamma = 2m_e = 1,022 \text{ MeV} .$$

Tối đa, hạt nhân chỉ có thể lấy toàn bộ động lượng p_γ của nó, cụ thể là

$$p_{\text{Pb}} = p_\gamma = E_\gamma ,$$

và động năng giật lùi của hạt nhân Pb là

$$T_{\text{Pb}} = {p_{\text{Pb}}}^2/(2m_{\text{Pb}}) = \left(\frac{E_\gamma}{2m_{\text{Pb}}}\right) E_\gamma .$$

Do $m_{\text{Pb}} \approx 200m_p = 1,88 \times 10^5$ MeV,

$$T_{\text{Pb}} \approx \frac{1,022}{2 \times 1,88 \times 10^5} \times E_\gamma = 2,7 \times 10^{-6} \times E_\gamma \,.$$

Do đó việc bỏ qua động năng của hạt nhân là hợp lý.

4026

(a) Viết phương trình phản ứng phân rã của muyon âm. Xác định (bằng lời) tất cả các hạt có liên quan.

(b) Xét phân rã của một μ^- đứng yên. Liệu một lepton sinh ra từ phân rã này có thể biến một proton đứng yên thành một nơtron được không? Nếu có thì quá trình đó xảy ra như thế nào; và nói một cách cụ thể thì liệu có đủ năng lượng hay không?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Phản ứng phân rã của μ^- là

$$\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \,,$$

trong đó e^- là electron, $\bar{\nu}_e$ là phản nơtrino electron, ν_μ là nơtrino muyon.

(b) Nếu năng lượng của electron hay phản nơtrino electron lớn hơn hoặc bằng năng lượng ngưỡng của phản ứng tiếp theo thì một proton đứng yên có thể bị biến thành một nơtron.

$$e^- + p \to n + \nu_e \,, \qquad (1)$$

$$\bar{\nu}_e + p \to e^+ + n \,. \qquad (2)$$

Năng lượng ngưỡng cho phản ứng (1) là

$$E_1 \approx m_n - m_p - m_e \approx 0,8 \text{ MeV} \,.$$

Năng lượng ngưỡng cho phản ứng (2) là

$$E_2 \approx m_n - m_p + m_e \approx 1,8 \text{ MeV} \,.$$

μ^- phân rã phát ra năng lượng khá lớn, cỡ 105 MeV. Năng lượng cực đại mà ν_μ có thể nhận được là $m_\mu/2 \approx 53$ MeV. Do đó tổng năng lượng của $\bar{\nu}_e$ và

e^- ít nhất sẽ bằng 53 MeV. Trong các phản ứng, do khối lượng của proton lớn hơn rất nhiều khối lượng của muyon và nơtrino nên năng lượng ngưỡng trong hệ khối tâm xấp xỉ bằng năng lượng ngưỡng trong hệ phòng thí nghiệm. Do đó, ít nhất là một trong hai lepton, $\bar{\nu}_e$ hoặc e^-, sinh ra từ phân rã μ^- có năng lượng lớn hơn ngưỡng phản ứng và do đó có thể chuyển một proton đứng yên thành một nơtron.

4027

Có hai thiết bị gia tốc đang được xây dựng để tạo ra một boson vectơ trung gian trung hòa Z^0 nhờ quá trình

$$e^+ + e^- \to Z^0 .$$

Khối lượng của Z^0 là $M_Z = 92$ GeV.

(a) Cần thiết kế một thiết bị bắn tia electron với năng lượng chùm tia là bao nhiêu?

Giả thiết rằng thiết bị cố định bia đã được chế tạo sao cho một chùm tia e^+ sẽ bắn vào một bia e^- đứng yên.

(b) Năng lượng cần thiết cho chùm e^+ trong trường hợp này là bao nhiêu?

(c) Sau khi được sinh ra, năng lượng và vận tốc của Z^0 là bao nhiêu (trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm)?

(d) Trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm, tìm năng lượng cực đại của muyon được sinh ra trong phản ứng tiếp theo $Z^0 \to \mu^+ + \mu^-$.

(*Columbia*)

Lời giải:

(a) Đối với máy chùm va chạm, hệ quy chiếu khối tâm và hệ quy chiếu phòng thí nghiệm là một, do đó năng lượng electron ngưỡng cho việc sinh Z^0 là $E = M_Z/2 = 46$ GeV.

(b) Với thiết bị cố định bia, từ định luật bảo toàn khối lượng bất biến ta có

$$(E_{e^+} + m_e)^2 - p_{e^+}^2 = M_Z^2 .$$

Với $E_{e^+}^2 - p_{e^+}^2 = m_e^2$, ta tìm được năng lượng ngưỡng là

$$E_{e^+} = \frac{M_Z^2 - 2m_e^2}{2m_e} \approx \frac{M_Z^2}{2m_e} = 8,30 \times 10^6 \text{ GeV} .$$

(c) Trong hệ quy chiếu khối tâm, tổng động lượng bằng 0, tổng năng lượng là $2\bar{E}$, $\bar{E}$ là năng lượng của e^+ hay e^-. Tính bất biến của bình phương khối lượng bất biến cho ta

$$S = (E_{e^+} + m_e)^2 - p_{e^+}^2 = (2\bar{E})^2 ,$$

từ đó rút ra

$$\bar{E} = \frac{\sqrt{2m_e E_{e^+} + 2m_e^2}}{2} \approx \sqrt{\frac{m_e E_{e^+}}{2}} = \frac{M_Z}{2} .$$

Thừa số Lorentz của hệ quy chiếu khối tâm sẽ là

$$\gamma_0 = \frac{\bar{E}}{m_e} = \sqrt{\frac{E_{e^+}}{2m_e} + \frac{1}{2}} \approx \frac{M_Z}{2m_e} .$$

Đây cũng chính là thừa số Lorentz của Z^0 bởi vì khi sinh ra nó đứng yên trong hệ quy chiếu khối tâm. Vì vậy Z^0 có năng lượng toàn phần là $\gamma_0 M_z \approx \frac{M_Z^2}{2m_e} \approx E_{e^+}$ và vận tốc

$$\beta c = \left(1 - \frac{1}{\gamma_0^2}\right)^{\frac{1}{2}} c \approx \left[1 - \left(\frac{2m_e}{M_Z}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} c$$

$$\approx \left(1 - \frac{2m_e^2}{M_Z^2}\right) c .$$

(d) Trong hệ quy chiếu đứng yên của Z^0 phân bố góc của phân rã muyon là đẳng hướng. Những muyon chuyển động theo hướng của e^+ tới có năng lượng cực đại trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm.

Trong hệ quy chiếu khối tâm, Z^0 đứng yên phân rã thành hai muyon, do đó

$$\bar{E}_\mu = \frac{M_Z}{2} , \qquad \bar{\gamma}_\mu = \frac{\bar{E}_\mu}{m_\mu} = \frac{M_Z}{2m_\mu} .$$

Đối với muyon chuyển động theo hướng của e^+, phép biến đổi Lorentz nghịch cho ta

$$\gamma_\mu = \gamma_0(\bar{\gamma}_\mu + \beta_0 \bar{\gamma}_\mu \bar{\beta}_\mu) \approx 2\gamma_0 \bar{\gamma}_\mu ,$$

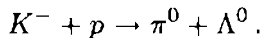
do $\beta_0 \approx \bar{\beta}_\mu \approx 1$. Vì vậy năng lượng cực đại của muyon phân rã, tính trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm là

$$E_\mu = \gamma_\mu m_\mu \approx 2\gamma_0 \bar{\gamma}_\mu m_\mu = \frac{M_Z^2}{2m_e} \approx E_{e^+} .$$

Điều này tương đương với việc vận tốc của Z^0 gần bằng vận tốc ánh sáng c. So sánh với động năng của nó ta thấy khối lượng nghỉ của các muyon được sinh ra trong trong phản ứng là rất nhỏ. Do đó khối lượng nghỉ của muyon tiến có thể coi như bằng 0 sao cho, giống như photon, nó nhận toàn bộ động lượng và năng lượng của Z^0.

4028

Phản ứng hạt cơ bản sau có thể được tiến hành trong phòng thí nghiệm với bia proton đứng yên



$$K^- + p \to \pi^0 + \Lambda^0 .$$

Tìm giá trị năng lượng đặc biệt của K^- tới sao cho có thể sinh ra Λ^0 đứng yên trong phòng thí nghiệm. Tính toán dựa vào các khối lượng nghỉ m_{π^0}, m_{K^-}, m_p và m_{Λ^0}.

(MIT)

Lời giải:

Khối lượng bất biến bình phương $S = (\Sigma E)^2 - (\Sigma \mathbf{p})^2$ được bảo toàn trong phản ứng. Do đó

$$(E_K + m_p)^2 - p_K^2 = (E_\pi + m_\Lambda)^2 - p_\pi^2 .$$

Do Λ^0 đứng yên khi sinh ra, $p_\Lambda = 0$ và động lượng ban đầu p_K được truyền cho π^0. Vì vậy ta có $p_\pi = p_K$ và công thức trên trở thành

$$E_K + m_p = E_\pi + m_\Lambda ,$$

hay

$$E_\pi^2 = p_\pi^2 + m_\pi^2 = p_K^2 + m_\pi^2 = E_K^2 + (m_\Lambda - m_p)^2 - 2E_K(m_\Lambda - m_p) ,$$

hoặc

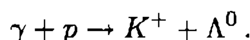
$$2E_K(m_\Lambda - m_p) = m_K^2 - m_\pi^2 + (m_\Lambda - m_p)^2 ,$$

từ đó ta có

$$E_K = \frac{m_K^2 - m_\pi^2 + (m_\Lambda - m_p)^2}{2(m_\Lambda - m_p)} .$$

4029

Meson K^+ có thể được quang tạo nhờ phản ứng



$$\gamma + p \to K^+ + \Lambda^0 .$$

(a) Với p đứng yên, chỉ ra năng lượng tối thiểu của tia γ trong phòng thí nghiệm để phản ứng có thể xảy ra.

(b) Nếu như bia proton không phải là proton tự do mà bị giam cầm trong một hạt nhân, khi đó chuyển động trong hạt nhân của proton (chuyển động Femi) cho phép phản ứng trên diễn ra với một photon tới có năng lượng thấp hơn. Hãy gán cho chuyển động Fermi một giá trị hợp lý và tính năng lượng photon cực tiểu.

(c) Khi đang bay, Λ^0 phân rã thành một proton và một meson π^-. Nếu Λ^0 có vận tốc là $0,8c$, (i) Trong phòng thí nghiệm, động lượng cực đại mà π^- có thể có là bao nhiêu? và (ii) giá trị cực đại của thành phần động lượng phòng thí nghiệm vuông góc với phương Λ^0 là bao nhiêu?

$$(m_{K^+} = 494 \text{ MeV}/c^2\,, m_{\Lambda^0} = 1116 \text{ MeV}/c^2\,, m_{\pi^-} = 140 \text{ Mev}/c^2)$$

(*CUSPEA*)

Lời giải:

(a) Gọi P là động lượng 4 chiều. Ta có bình phương khối lượng bất biến

$$S = -(P_\gamma + P_p)^2 = (m_p + E_\gamma)^2 - E_\gamma^2 = m_p^2 + 2E_\gamma m_p = (m_K + m_\Lambda)^2\,,$$

suy ra

$$E_\gamma = \frac{(m_K + m_\Lambda)^2 - m_p^2}{2m_p} = 913 \text{ MeV}\,.$$

đó chính là năng lượng γ cần có để xảy ra phản ứng.

(b) Nếu ta giả sử proton có động lượng Fermi là $p_p = 200$ MeV/c ta có

$$S = -(P_\gamma + P_p)^2 = (E_\gamma + E_p)^2 - (\mathbf{p}_\gamma + \mathbf{p}_p)^2 = (m_K + m_\Lambda)^2\,.$$

Với $E_\gamma = p_\gamma$, $E_p^2 - p_p^2 = m_p^2$, dẫn tới

$$E_\gamma = \frac{(m_K + m_\Lambda)^2 - m_p^2 + 2\mathbf{p}_\gamma \cdot \mathbf{p}_p}{2E_p}\,.$$

Năng lượng ngưỡng E_γ đạt cực tiểu khi proton chuyển động ngược chiều photon, trong trường hợp đó ta có

$$E_\gamma = \frac{(m_K + m_\Lambda)^2 - m_p^2}{2(E_p + p_p)}$$

$$= \frac{(m_K + m_\Lambda)^2 - m_p^2}{2(\sqrt{p_p^2 + m_p^2} + p_p)} = 739 \text{ MeV}\,.$$

(c) Trong hệ quy chiếu Λ^0 đứng yên, định luật bảo toàn động lượng và năng lượng cho ta

$$\bar{E}_\pi + \bar{E}_p = m_\Lambda\,, \qquad \bar{\mathbf{p}}_\pi + \bar{\mathbf{p}}_p = 0\,.$$

Từ đó ta có

$$(m_\Lambda - \bar{E}_\pi)^2 = \bar{p}_p^2 + m_p^2 = \bar{p}_\pi^2 + m_p^2\,,$$

hay

$$\bar{E}_\pi = \frac{m_\Lambda^2 + m_\pi^2 - m_p^2}{2m_\Lambda} = 173 \text{ MeV}\,,$$

và

$$\bar{p}_\pi = \sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2} = 101 \text{ MeV}/c\,.$$

p_π là giá trị cực đại trong phòng thí nghiệm nếu $\bar{p}_\pi$ trùng phương chuyển động của Λ^0, nó có $\beta_0 = 0{,}8$, $\gamma_0 = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{5}{3}$ trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm. Do đó ta có

$$p_\pi = \gamma_0(\bar{p}_\pi + \beta_0 \bar{E}_\pi) = 399 \text{ MeV}/c\,.$$

Vì $(p_\pi)_\perp = (\bar{p}_\pi)_\perp$, động lượng cực đại trong phương vuông góc được cho bởi giá trị cực đại của $(\bar{p}_\pi)_\perp$, ở đây là 101 MeV/c.

4030

Hạt meson ρ^- là một cộng hưởng meson với khối lượng 769 MeV và bề rộng 154 MeV. Nó có thể được tạo bằng thực nghiệm khi bắn phá bia hydro bằng tia meson π^-,

$$\pi^- + p \to \rho^0 + n\,.$$

(a) Tìm thời gian sống và quãng đường phân rã trung bình cho một ρ^0 5 GeV?

(b) Tìm năng lượng ngưỡng của π^- để sinh ra meson ρ^0?

(c) Cho tiết diện ngang là 1 mb $\equiv 10^{-27}$ cm^2 và chiều dài của bia hydro lỏng là 30 cm, tính số lượng của ρ^0 được tạo ra trung bình trên mỗi hạt π^- bắn tới? (Khối lượng riêng của hydro lỏng là 0,07 g/c.c.)

(d) Gần như ngay lập tức meson ρ^0 phân rã thành $\pi^+ + \pi^-$. Giả thiết ρ^0 được tạo ra theo phương tới trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm với năng

lượng 5 GeV, tìm góc mở cực tiểu giữa π^+ và π^- bắn ra trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm?

(*Columbia*)

Lời giải:

(a) Thừa số Lorentz của ρ^0 là

$$\gamma_0 = \frac{E_\rho}{m_\rho} = \frac{5}{0,769} = 6,50\,.$$

Thời gian sống riêng của nó là

$$\tau_0 = \hbar/\Gamma = \frac{6,58 \times 10^{-22}}{154} = 4,27 \times 10^{-24}\ \text{s}\,.$$

Trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm thời gian sống của nó là

$$\tau = \gamma_0\tau_0 = 2,78 \times 10^{-23}\ \text{s}\,.$$

Quãng đường phân rã trung bình cho ρ^0 năng lượng 5 GeV là

$$\begin{aligned} d &= \tau\beta c = \tau_0\gamma_0\beta c = \tau_0 c\sqrt{\gamma_0^2 - 1} \\ &= 4,27 \times 10^{-24} \times 3 \times 10^{10} \times \sqrt{6,50^2 - 1} \\ &= 8,23 \times 10^{-13}\ \text{cm}\,. \end{aligned}$$

(b) Tại ngưỡng, bình phương khối lượng bất biến là

$$S = (E_\pi + m_p)^2 - p_\pi^2 = (m_\rho + m_n)^2\,.$$

Với $E_\pi^2 = m_\pi^2 + p_\pi^2$ từ công thức trên ta thu được năng lượng ngưỡng của pion

$$\begin{aligned} E_\pi &= \frac{(m_\rho + m_n)^2 - m_\pi^2 - m_p^2}{2m_p} \\ &= \frac{(769 + 940)^2 - 140^2 - 938^2}{2 \times 938} = 1077\ \text{MeV}\,. \end{aligned}$$

(c) Số lượng ρ^- trung bình được sinh ra bởi một π bắn tới là

$$\begin{aligned} N &= \rho l\sigma N_0/A = 0,07 \times 30 \times 10^{-27} \times 6,02 \times 10^{23} \\ &= 1,3 \times 10^{-3}\,, \end{aligned}$$

trong đó $N_0 = 6,023 \times 10^{23}$ là số Avogadro, $A = 1$ là số khối của hydro, và ρ là khối lượng riêng của hydro lỏng

(d) Trong hệ quy chiếu đứng yên $\bar{\Sigma}$ của ρ^0, cặp pion sinh ra chuyển động ngược chiều nhau với động lượng là $\bar{p}_{\pi^+} = -\bar{p}_{\pi^-}$ và năng lượng là $\bar{E}_{\pi^+} = \bar{E}_{\pi^-} = \frac{m_\rho}{2}$, tương ứng với

$$\bar{\gamma}_\pi = \frac{\bar{E}_\pi}{m_\pi} = \frac{m_p}{2m_\pi}, \bar{\beta}_\pi = \sqrt{1 - \frac{1}{\bar{\gamma}_\pi^2}} = \frac{1}{m_\rho}\sqrt{m_\rho^2 - 4m_\pi^2} = 0,93 .$$

$\bar{\Sigma}$ có thừa số Lorentz là $\gamma_0 = 6,50$ trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm, tương ứng với

$$\beta_0 = \sqrt{1 - \frac{1}{6,50^2}} = 0,99 .$$

Trong $\bar{\Sigma}$ xét một cặp pion được phát ra có phương song song với phương chuyển động trong phòng thí nghiệm của ρ^0. Khi đó trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm các hạt pion sẽ chuyển động về phía trước. Do đó góc mở cực tiểu giữa cặp pion bằng 0.

4031

(a) Hạt Ω^- được phát hiện trong phản ứng $K^- + p \to \Omega^- + K^+ + K^0$. Dựa vào khối lượng của các hạt, hãy tìm động năng ngưỡng để phản ứng có thể xảy ra trong trường hợp proton đứng yên?

(b) Giả sử K^0 chuyển động với vận tốc $0,8c$. Trong quá trình chuyển động nó bị phân rã thành hai pion trung hòa. Tìm góc lệch cực đại tạo bởi các hạt pion và đường đi của K^0 (trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm). Trình bày lời giải theo khối lượng của π và K.

(*Columbia*)

Lời giải:

(a) Tại ngưỡng, bình phương khối lượng bất biến là

$$S = (E_K + m_p)^2 - p_K^2 = (m_\Omega + 2m_K)^2 .$$

Với $E_K^2 = p_K^2 + m_K^2$, từ đó suy ra

$$E_K = \frac{(m_\Omega + 2m_K)^2 - m_p^2 - m_K^2}{2m_p}$$

Do đó động năng ngưỡng là

$$T_K = E_K - m_K = \frac{(m_\Omega + 2m_K)^2 - (m_p + m_K)^2}{2m_p} .$$

(b) Kí hiệu hệ quy chiếu trong đó K^0 đứng yên là $\bar{\Sigma}$ và hai π^0 được tạo ra là 1 và 2. Khi đó trong $\bar{\Sigma}$ ta có

$$\bar{\mathbf{p}}_1 = -\bar{\mathbf{p}}_2, \qquad \bar{E}_1 + \bar{E}_2 = m_K ,$$

và do đó

$$\bar{E}_1 = \bar{E}_2 = \frac{m_K}{2} ,$$

$$\bar{p}_1 = \bar{p}_2 = \sqrt{\bar{E}^2 - m_\pi^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{m_K^2 - 4m_\pi^2} .$$

Xét một pion, chẳng hạn là hạt 1. Sử dụng phép biến đổi Lorentz

$$p_1 \cos\theta_1 = \gamma_0(\bar{p}_1 \cos\bar{\theta}_1 + \beta_0 \bar{E}_1) ,$$

$$p_1 \sin\theta_1 = \bar{p}_1 \sin\bar{\theta}_1 ,$$

cho ta công thức

$$\text{tg}\,\theta_1 = \frac{\sin\bar{\theta}_1}{\gamma_0\left(\cos\bar{\theta}_1 + \frac{\beta_0}{\bar{\beta}}\right)} ,$$

trong đó γ_0 và β_0 là thừa số Lorentz và vận tốc của K^0 trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm và bar $\bar{\beta} = \frac{\bar{p}_1}{\bar{E}_1}$ là vận tốc của pion trong $\bar{\Sigma}$.

Để tìm góc lệch cực đại θ_1, đặt $\frac{d\,\text{tg}\,\theta_1}{d\theta_1} = 0$, từ đó ta có

$$\cos\bar{\theta}_1 = -\frac{\bar{\beta}}{\beta_0} .$$

Chú ý rằng biểu thức trên tuân theo điều kiện $\frac{d^2\text{tg}\,\theta_1}{d\theta_1^2} < 0$. Ta đồng thời ta cũng thu được $\beta_0 = 0,8$,

$$\bar{\beta} = \frac{\bar{p}_1}{\bar{E}_1} = \frac{1}{m_K}\sqrt{m_K^2 - 4m_\pi^2}$$

$$= \sqrt{494^2 - 135^2 \times 4}/494 = 0,84 .$$

Do $|\cos\bar{\theta}_1| \leq 1$, nên điều kiện không thể thỏa mãn. Tuy nhiên ta thấy rằng khi $\bar{\theta}_1 \rightarrow \pi$, $\cos\bar{\theta}_1 \rightarrow -1$, $\sin\bar{\theta}_1 \rightarrow 0$ và $\operatorname{tg}\theta_1 \rightarrow 0$, hay $\theta_1 \rightarrow \pi$. Vì vậy góc lệch cực đại mà pion có thể tạo ra so với đường đi của K^0 là π.

4032

Cho phản ứng



$$p + p \rightarrow \pi^+ + D\,, \tag{1}$$

trong đó các proton mang năng lượng cao được bắn ra từ một máy gia tốc đập vào các proton đứng yên sinh ra các cặp đơteron-meson- π dương. Đây là một phản ứng quan trọng trong thời kì đầu của vật lý năng lượng cao.

(a) Tính động năng ngưỡng T của proton tới trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm. Điều đó có nghĩa là T là động năng thấp nhất trong phòng thí nghiệm để có phản ứng xảy ra. Biểu diễn T theo khối lượng m_p của proton, khối lượng m_π, của pion, và khối lượng m_D của đơteron. Ước lượng T khi $m_p = 938$ MeV/c^2, $m_D = 1874$ MeV/c^2, $m_\pi = 140$ MeV/c^2.

(b) Giả sử trong hệ khối tâm phản ứng trên là đẳng hướng. Có nghĩa là xác suất sinh ra một π^+ trong một đơn vị góc khối $d\Omega^* = d\phi^* d(\cos\theta^*)$ là hằng số theo mọi phương. Tìm biểu thức của xác suất chuẩn hóa của π^+ trên một đơn vị góc khối trong phòng thí nghiệm theo $\cos\theta_{\text{lab}}$, vận tốc $\bar{\beta}c$ của khối tâm, vận tốc βc của π^+ trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm và động lượng p^* trong hệ quy chiếu khối tâm.

(c) Trong phản ứng thu nhiệt hai thành phần như (1) một khả năng có thể xảy ra là xác suất trên một đơn vị góc khối trong phòng thí nghiệm đối với một sản phẩm phản ứng có thể là kì dị tại góc $\theta \neq 0$. Điều này liên hệ thế nào với kết quả của câu (b)? Trình bày một cách ngắn gọn, không cần nêu tất cả các thành phần động học liên quan.

(*CUSPEA*)

Lời giải:

(a) Tại ngưỡng, bình phương khối lượng bất biến là

$$(E + m_p)^2 - p^2 = (m_\pi + m_D)^2\,,$$

trong đó E và p là năng lượng và động lượng trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm của proton bắn tới. Với

$$E^2 = p^2 + m_p^2$$

từ đó suy ra

$$E = \frac{(m_\pi + m_D)^2 - 2m_p^2}{2m_p},$$

hay ta có động năng ngưỡng là

$$T = E - m_p = \frac{(m_\pi + m_D)^2 - 4m_p^2}{2m_p} = 286,2\ \text{MeV}.$$

(b) Gọi $\frac{dP}{d\Omega^*}$ và $\frac{dP}{d\Omega}$ lần lượt là xác suất được chuẩn hóa sinh ra π^+ trên một đơn vị góc khối trong hệ quy chiếu khối tâm và hệ quy chiếu phóng thí nghiệm. Khi đó ta có

$$\frac{dP}{d\Omega^*} = \frac{1}{4\pi},$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{dP}{d\Omega^*}\frac{d\Omega^*}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi}\frac{d\cos\theta^*}{d\cos\theta}.$$

Trong đó dấu sao biểu diễn các đại lượng trong hệ quy chiếu khối tâm.

Áp dụng phép biến đổi Lorentz cho π^+ được sinh ra

$$p^*\sin\theta^* = p\sin\theta, \quad (1)$$

$$p^*\cos\theta^* = \bar\gamma(p\cos\theta - \bar\beta E), \quad (2)$$

$$E^* = \bar\gamma(E - \bar\beta p\cos\theta), \quad (3)$$

trong đó $\bar\gamma$ và $\bar\beta$ là thừa số Lorentz và vận tốc của khối tâm trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm. Lấy đạo hàm theo $\cos\theta$ phương trình (2), do p^* và E^* không phụ thuộc và θ^* và vì vậy cũng không phụ thuộc và θ, nên ta có

$$p^*\frac{d\cos\theta^*}{d\cos\theta} = \bar\gamma\left(p + \cos\theta\frac{dp}{d\cos\theta} - \bar\beta\frac{dE}{dp}\frac{dp}{d\cos\theta}\right).$$

Do $E = (m^2 + p^2)^{1/2}$, $dE/dp = p/E = \beta$ và phương trình trên trở thành

$$p^*\frac{d\cos\theta^*}{d\cos\theta} = \bar\gamma\left(p + \cos\theta\frac{dp}{d\cos\theta} - \bar\beta\beta\frac{dp}{d\cos\theta}\right). \quad (4)$$

Đạo hàm phương trình (3) theo $\cos\theta$, ta thu được

$$0 = \bar\gamma\left(\frac{dE}{d\cos\theta} - \bar\beta p - \bar\beta\cos\theta\frac{dp}{d\cos\theta}\right)$$

$$= \bar\gamma\left(\beta\frac{dp}{d\cos\theta} - \bar\beta p - \bar\beta\cos\theta\frac{dp}{d\cos\theta}\right),$$

hay

$$\frac{dp}{d\cos\theta} = \frac{p\bar{\beta}}{\beta - \bar{\beta}\cos\theta}.$$

thay vào phương trình (4) ta được

$$p^* \frac{d\cos\theta^*}{d\cos\theta} = \bar{\gamma}\left[p + \frac{(\cos\theta - \bar{\beta}\beta)\bar{\beta}p}{\beta - \bar{\beta}\cos\theta}\right]$$

$$= \frac{(1-\bar{\beta}^2)\bar{\gamma}\beta p}{\beta - \bar{\beta}\cos\theta} = \frac{p}{\bar{\gamma}(1 - \bar{\beta}\cos\theta/\beta)}.$$

Vì vậy xác suất sinh ra một hạt π^+ trên một đơn vị góc khối trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm là

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi}\frac{d\cos\theta^*}{d\cos\theta}$$

$$= \frac{p}{4\pi\bar{\gamma}p^*(1 - \bar{\beta}\cos\theta/\beta)}$$

$$= \frac{m_\pi\beta\gamma}{4\pi\bar{\gamma}p^*(1 - \bar{\beta}\cos\theta/\beta)}.$$

(c) Kết quả câu (b) cho thấy $\frac{dP}{d\Omega}$ là kì dị nếu $1 - \frac{\bar{\beta}}{\beta}\cos\theta = 0$ để có điều này ta cần $\bar{\beta} > \beta$. Khi π^+ chuyển động ngược chiều trong hệ quy chiếu khối tâm thì $\beta < \bar{\beta}$. Do vậy trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm sẽ một góc θ thỏa mãn điều kiện đó. Về phương diện vật lý, đó là "góc chuyển vòng", đây chính là góc có xác suất sinh π^+ lớn nhất trong phòng thí nghiệm.

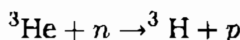
4033

Giá trị-Q (năng lượng được phát ra) của phản ứng $He^3(n,p)$ được ghi nhận là 0,770 MeV. Từ điều kiện đó kết hợp với thực tế là động năng cực đại của hạt β phát ra bởi triti (H^3) là 0,018 MeV, tính chênh lệch khối lượng giữa nơtron và hạt nhân hydro (^1H). (Tính theo đơn vị khối lượng nguyên tử (đvklnt), 1 đvklnt = 931 MeV).

(SUNY, Buffalo)

Lời giải:

Xét phản ứng



$$^3\text{He} + n \rightarrow ^3\text{H} + p$$

Phản ứng này có giá trị-Q là

$$Q = [M(^3\text{He}) + M(n) - M(^3\text{H}) - M(^1\text{H})] = 0,770 \text{ MeV},$$

từ đó ta có

$$M(n) - M(^3\text{H}) = 0,770 + M(^1\text{H}) - M(^3\text{He}).$$

Do trong phân rã $^3\text{H} \rightarrow ^3\text{He} + e^- + \bar{\nu}$ electron đạt năng lượng cực đại

$$E_{\text{max}} = [M(^3\text{H}) - M(^3\text{He})] = 0,018 \text{ MeV},$$

nên ta thu được

$$M(n) - M(^1\text{H}) = 0,770 + 0,018 = 0,788 \text{ MeV}$$
$$= 8,46 \times 10^{-4} \text{ đvklnt}.$$

4034

Giả sử có một phản proton vận tốc chậm va chạm với một proton và bị triệt tiêu, sinh ra 2 pion âm và 2 pion dương. ($m_\pi c^2 = 140$ MeV)

(a) Động năng trung bình của một pion là bao nhiêu (MeV)?

(b) Với năng lượng đó động năng của pion có độ lớn là bao nhiêu (MeV/c)?

(c) Vận tốc là bao nhiêu? (Theo đơn vị c)

(d) Nếu việc triệt tiêu giữa phản proton và proton sinh ra 2 photon thay vì hai pion thì bước sóng của photon là bao nhiêu? (cm)

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a)

$$p + \bar{p} \rightarrow 2\pi^+ + 2\pi^-,$$

Do $\bar{p}$ tới chuyển động chậm nên ta có thể coi $T_{\bar{p}} \approx 0$. Khi đó mỗi pion sẽ có năng lượng là $E_\pi \approx \frac{2m_p}{4} = \frac{1}{2}m_p$, và do đó động năng là

$$\bar{T}_\pi \approx \frac{1}{2}m_p - m_\pi = \frac{1}{2}(938 - 2 \times 140) = 329 \text{ MeV}.$$

(b) Động lượng của mỗi pion là

$$p = \sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2} \approx \frac{1}{2}\sqrt{m_p^2 - 4m_\pi^2} = 448 \text{ MeV}/c.$$

(c) Vận tốc của nó là

$$\beta = \frac{p}{E} \approx \frac{2p}{m_p} = 0,955\,.$$

(d) Nếu việc triệt tiêu sinh ra hai photon, thì năng lượng của mỗi photon là

$$E_\gamma = \frac{2m_p}{2} = m_p = 938 \text{ MeV}\,.$$

Bước sóng của mỗi photon sẽ là

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{2\pi\hbar c}{h\nu} = \frac{2\pi\hbar c}{E_\gamma} = \frac{2\pi \times 197 \times 10^{-13}}{938} = 1,32 \times 10^{-13} \text{ cm}\,.$$

4035

Xét tán xạ Compton trong đó một photon bước sóng λ bị tán xạ bởi một electrong tự do ban đầu đứng yên. Gọi λ' là bước sóng của photon sau khi bị tán xạ theo hướng θ.

(a) Tính λ' dựa vào λ, θ và các tham số thông thường.

(b) Tính động năng của electron khi giật lùi.

(*CUSPEA*)

Lời giải:

(a) Từ định luật bảo toàn năng lượng ta có (hình 4.4)

$$pc + mc^2 = p'c + \sqrt{p_e^2c^2 + m^2c^4}\,,$$

hay

$$(p - p' + mc)^2 = p_e^2 + m^2c^2\,, \qquad (1)$$

trong đó m là khối lượng electron. Sử dụng định luật bảo toàn động lượng ta có

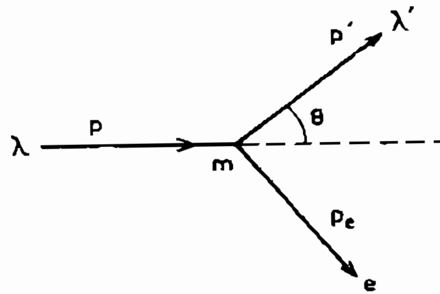
$$\mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{p}_e$$

hay

$$(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 = \mathbf{p}_e^2\,. \qquad (2)$$

Sự sai khác giữa phương trình (1) và (2) cho ta biểu thức

$$pp'(1 - \cos\theta) = (p - p')mc\,,$$



Hình 4.4

từ đó ta có

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{mc}(1 - \cos\theta)\,,$$

hay

$$\frac{h}{p'} - \frac{h}{p} = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)\,.$$

Do đó ta có

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)\,.$$

(b) Từ kết quả của câu (a) ta có

$$p'c = \frac{mc^2}{1 - \cos\theta + \dfrac{mc}{p}}\,.$$

Động năng của electron khi giật lùi là

$$T = \sqrt{p_e^2c^2 + m^2c^4} - mc^2 = pc - p'c$$

$$= \frac{pc(1 - \cos\theta)}{1 - \cos\theta + \dfrac{mc}{p}}$$

$$= \frac{(1 - \cos\theta)\dfrac{hc}{\lambda}}{1 - \cos\theta + \dfrac{mc\lambda}{h}}\,.$$

4036

Một photon tia X với tần số ban đầu là 3×10^{19} Hz va chạm với một electron đứng yên và bị tán xạ một góc 90°. Tìm tần số mới của tia X. Cho bước sóng Compton của electron là $2,4 \times 10^{-12}$ m.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Giả sử electron làm bia là electron tự do. Khi đó bước sóng tán xạ của photon được tính giống như (**Bài tập 4035(a)**)

$$\lambda' = \lambda_0 + \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)\,,$$

trong đó λ_0 của photon tới, $h/(mc)$ là bước sóng Compton λ_c của electron. Khi góc tán xạ là 90° bước sóng tán xạ của photon là

$$\lambda' = \lambda_0 + \lambda_c\,,$$

và tần số mới là

$$\nu' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{\dfrac{c}{\nu_0} + \lambda_c} = 2,42 \times 10^{19}\ \text{Hz}\,.$$

4037

Xét tán xạ Compton của các photon va chạm trực diện với các electron đang chuyển động. Tìm năng lượng của photon bị phản xạ (tán xạ ngược) ($\theta = 180°$) cho năng lượng của các photon tới là $h\nu = 2$ eV và electron có động năng là 1 GeV.

(*Wisconsin, MIT, Columbia, Chicago, CCT*)

Lời giải:

Kí hiệu năng lượng và động lượng của electron và photon trước và sau khi va chạm là E_e, p_e, E_γ, p_γ, E'_e, p'_e, E'_γ, p'_γ. Định luật bảo toàn năng lượng cho ta biểu thức

$$E_\gamma + E_e = E'_\gamma + E'_e\,,$$

hay ta có

$$p_\gamma + E_e = p'_\gamma + E'_e\,,$$

và

$$-p_\gamma + p_e = p'_\gamma + p'_e\,.$$

Cộng và trừ hai phương trình cuối với nhau ta có

$$E'_e + p'_e = -2p'_\gamma + E_e + p_e\,,$$

$$E'_e - p'_e = 2p_\gamma + E_e - p_e\,,$$

từ đó nhân các vế tương ứng ta có

$$E'^2_e - p'^2_e = E^2_e - p^2_e + 2p_\gamma(E_e + p_e) - 2p'_\gamma(E_e - p_e + 2p_\gamma)\,.$$

Với $E'^2_e - p'^2_e = E^2_e - p^2_e = m^2_e$, ta có

$$p'_\gamma = \frac{p_\gamma(E_e + p_e)}{E_e - p_e + 2p_\gamma} \approx \frac{2p_\gamma E_e}{\frac{m^2_e}{2E_e} + 2p_\gamma}$$

$$= \frac{2 \times 2 \times 10^{-6} \times 10^3}{\frac{0,511^2}{2 \times 10^3} + 2 \times 2 \times 10^{-6}} = 29,7\ \text{MeV}/c\,,$$

do $E_e - p_e = E_e - \sqrt{E^2_e - m^2_e} \approx E_e - E_e(1 - \frac{m^2_e}{2E^2_e}) = \frac{m^2_e}{2E_e}$, $E_e + p_e \approx 2E_e$, $E_e \approx T_e$ do $m_e \ll E_e$. Vì thế photon tán xạ ngược có năng lượng là 29,7 MeV.

4038

(a) Hai photon có năng lượng lần lượt là ε và E va chạm trực diện với nhau. Hãy chứng minh rằng trong hệ tọa độ mà động lượng bằng 0 thì vận tốc được cho bởi

$$\beta = \frac{E - \varepsilon}{E + \varepsilon}$$

(b) Nếu hai photon va chạm sinh ra một cặp electron-positron thì năng lượng E phải có giá trị tối thiểu là bao nhiêu? Cho ε là 1 eV.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Gọi **P**, **p** là động lượng của hai photon, trong đó $P = E$, $p = \varepsilon$. Tổng động lượng của hệ là $|\mathbf{P} + \mathbf{p}|$, và năng lượng tổng cộng là $E + \varepsilon$. Từ đó ta có vận tốc chuyển động của toàn bộ hệ là

$$\beta = \frac{|\mathbf{P} + \mathbf{p}|}{E + \varepsilon} = \frac{E - \varepsilon}{E + \varepsilon}\,.$$

(b) Tại ngưỡng bình phương khối lượng bất biến của hệ là

$$S = (E + \varepsilon)^2 - (\mathbf{P} + \mathbf{p})^2 = (2m_e)^2\,,$$

trong đó m_e là khối lượng electron.

Do $(\mathbf{P} + \mathbf{p})^2 = (P - p)^2 = (E - \varepsilon)^2$, nên biểu thức trên suy ra:

$$E = \frac{m_e^2}{\varepsilon} = 261 \text{ GeV}\,.$$

4039

Vũ trụ có chứa đầy bức xạ vi ba của vật đen. Năng lượng photon trung bình là $E \sim 10^{-3}$ eV. Mật độ photon là ~ 300 cm^{-3}. Các tia γ năng lượng cao có những tương tác sinh cặp electron-positron với những photon này. Tiết diện của sự sinh cặp này là $\sigma_T/3$, với σ_T là tiết diện tán xạ electron-positron không tương đối tính $\sigma_T = (8\pi/3)r_e^2$, ở đây $r_e = e^2/mc^2$ là bán kính cổ điển của electron.

(a) Với năng lượng là bao nhiêu thì thời gian sống của tia γ bị giới hạn bởi quá trình trên?

(b) Tìm quãng đường trung bình tia γ đi được trước khi bị chuyển thành cặp e^+e^-?

(c) So sánh kết quả tìm được với kích thước của vũ trụ?

(d) Quá trình vật lý nào giới hạn thời gian sống của các hạt proton năng lượng cực cao (năng lượng $\geq 10^{20}$ eV) trong cùng một điều kiện bức xạ vi ba như trên? (Giả thiết rằng tán xạ photon-proton là nhỏ không đáng kể).

(*CUSPEA*)

Lời giải:

(a) Gọi năng lượng và động lượng của photon năng lượng cao và photon của bức xạ vi ba là E_1, $\mathbf{p}_1$, E_2, $\mathbf{p}_2$. Sự sinh cặp e^+e^- cần có điều kiện

$$(E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 \geq (2m)^2 \,,$$

trong đó m là khối lượng của electron. Do $E_1 = p_1$, $E_2 = p_2$, ta có

$$2E_1E_2 - 2\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_2 \geq (2m)^2 \,,$$

nếu góc hợp bởi $\mathbf{p}_1$ và $\mathbf{p}_2$ là θ ta có,

$$E_1E_2(1 - \cos\theta) \geq 2m^2 \,.$$

Do đó ta có

$$E_1 \geq \frac{2m^2}{E_2(1 - \cos\theta)} \,.$$

E_1 đạt cực tiểu khi $\theta = \pi$, tức là $\cos\theta = -1$. Vì vậy ta thu được năng lượng tối thiểu để diễn ra quá trình sinh cặp là

$$E_{\text{min}} = \frac{m^2}{E_2} = \frac{(0,51 \times 10^6)^2}{10^{-3}} = 2,6 \times 10^{14} \text{ eV} \,.$$

Với photon có năng lượng lớn hơn giá trị trên thì thời gian sống của photon sẽ bị hạn chế bởi quá trình sinh cặp.

(b) Quãng đường tự do trung bình cho quá trình sinh cặp là

$$l = \frac{1}{\rho\sigma} \approx \frac{1}{\frac{\rho\sigma_T}{3}} = \frac{9}{8\pi\rho r_e^2}$$

$$= \frac{9}{8\pi \times 300 \times (2,8 \times 10^{-13})^2} = 1,5 \times 10^{22} \text{ cm} = 1,6 \times 10^4 \text{ năm ánh sáng} \,.$$

(c) Kích thước vũ trụ của chúng ta là $R \approx 10^{10}$ năm ánh sáng. Từ đó ta thấy

$$l \ll R \,.$$

(d) Giả sử proton va chạm trực diện với một photon của bức xạ vi ba. Năng lượng toàn phần $\bar{E}$ trong hệ quy chiếu khối tâm được cho bởi bình phương khối lượng bất biến

$$(E_p + E_\gamma)^2 - (p_p - p_\gamma)^2 = \bar{E}^2 \,,$$

hay

$$2E_pE_\gamma + 2p_pp_\gamma + m_p^2 = \bar{E}^2 \,.$$

Do $p_\gamma = E_\gamma$, $p_p \approx E_p$,

$$\begin{aligned}\bar{E} &= \sqrt{4E_pE_\gamma + m_p^2} \\ &= \sqrt{4 \times 10^{20} \times 10^{-3} + (10^9)^2} \\ &= 1,18 \times 10^9 \text{ eV}.\end{aligned}$$

Bỏ qua quá trình $\gamma p \to \gamma p$, do số baryon là bảo toàn nên trong sản phẩm của quá trình phải có 1 baryon, nên những phản ứng có thể là

$$\gamma p \to \pi^0 p, \qquad \gamma p \to \pi^+ n.$$

4040

Xét phản ứng quang sinh ra pion

$$\gamma + p \to \pi^0 + p,$$

trong đó năng lượng nghỉ là 938 MeV đối với proton và 135 MeV đối với pion trung hòa.

(a) Nếu proton ban đầu đứng yên trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm, hãy tìm năng lượng ngưỡng của tia gama trong phòng thí nghiệm để phản ứng có thể diễn ra.

(b) Bức xạ đẳng hướng 3 K của vật đen vũ trụ có năng lượng photon trung bình khoảng 0,001 eV. Xét va chạm trực diện giữa một proton và một photon năng lượng 0,001 eV. Tìm năng lượng thấp nhất của proton để cho phép diễn ra phản ứng quang sinh pion.

(c) Đoán một cách ngắn ngọn sự liên quan của kết quả trên [cho tới câu (b)] với phổ năng lượng của proton tia vũ trụ.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Bình phương khối lượng bất biến của phản ứng ở ngưỡng là

$$(E_\gamma + m_p)^2 - p_\gamma^2 = (m_p + m_\pi)^2.$$

Với $E_\gamma = p_\gamma$, ta có

$$E_\gamma = \frac{(m_p + m_\pi)^2 - m_p^2}{2m_p} = m_\pi + \frac{m_\pi^2}{2m_p} = 145 \text{ MeV}.$$

(b) Đối với va chạm trực diện, bình phương khối lượng bất biến tại ngưỡng là

$$S = (E_\gamma + E_p)^2 - (p_\gamma - p_p)^2 = (m_\pi + m_p)^2 \,,$$

ta rút ra

$$E_p - p_p = \frac{(m_p + m_\pi)^2 - m_p^2}{2E_\gamma} = 1.36 \times 10^{14}\ \text{MeV}\,.$$

Đặt $E_p - p_p = A$, ta có

$$p_p^2 = (E_p - A)^2 \,,$$

hay

$$m_p^2 - 2AE_p + A^2 = 0 \,,$$

từ đó ta có năng lượng proton thấp nhất để xảy ra phản ứng là

$$E_p = \frac{1}{2A}(A^2 + m_p^2) \approx \frac{A}{2} = 6,8 \times 10^{13}\ \text{MeV}\,.$$

(c) Mật độ bức xạ vật đen 3 K là rất lớn. Proton với năng lượng $> E_p$ ở trong bức xạ vũ trụ sẽ mất năng lượng do luôn tương tác với bức xạ này. Do đó giới hạn trên của phổ năng lượng của proton tia vũ trụ là E_p.

4041

Hạt J/ψ có khối lượng 3,097 GeV/c^2 và độ rộng 63 keV. Một hạt J/ψ được tạo ra với động lượng 100 GeV/c và tiếp đó phân rã theo phương trình

$$J/\psi \to e^+ + e^- \,.$$

(a) Tìm quãng đường trung bình hạt J/ψ đi được trong phòng thí nghiệm trước khi bị phân rã.

(b) Đối với phân rã đối xứng (có nghĩa là e^+ và e^- có cùng động lượng trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm), tìm năng lượng của electron phân rã trong phòng thí nghiệm.

(c) Tìm góc tương ứng giữa electron với phương chuyển động của J/ψ trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm.

(*Columbia*)

Lời giải:

(a) Bề rộng toàn phần của phân rã Γ của J/ψ là 63 keV, vì vậy thời gian sống riêng của nó là

$$\tau_0 = \hbar/\Gamma = \frac{6,58 \times 10^{-16}}{63 \times 10^3} = 1,045 \times 10^{-20} \text{ s}.$$

Thời gian sống trong phòng thí nghiệm là $\tau = \tau_0\gamma$, với γ là thừa số Lorentz của nó. Do vậy quãng đường trung bình mà J/ψ đi được trong phòng thí nghiệm trước khi phân rã là

$$l = \tau\beta c = \tau_0\gamma\beta c = \frac{\tau_0 pc}{m} = 1,045 \times 10^{-20} \times \frac{100}{3,097} \times 3 \times 10^8$$
$$= 1,012 \times 10^{-10}\ m.$$

(b) Trong trường hợp phân rã đối xứng, bảo toàn năng lượng và động lượng cho ta

$$E_J = 2E_e,$$
$$p_J = 2p_e \cos\theta,$$

trong đó θ là góc tạo bởi electron và phương của hạt J/ψ. Do vậy

$$E_e = \frac{1}{2}E_J = \frac{1}{2}\sqrt{p_J^2 + m_J^2} = \frac{1}{2}\sqrt{100^2 + 3,097^2} = 50,024 \text{ GeV}.$$

(c) Các phương trình trên cho ta

$$\left(\frac{E_J}{2}\right)^2 - \left(\frac{p_J}{2\cos\theta}\right)^2 = E_e^2 - p_e^2 = m_e^2,$$

hay suy ra

$$\cos\theta = \frac{p_J}{\sqrt{p_J^2 + m_J^2 - 4m_e^2}}$$
$$= \frac{100}{\sqrt{100^2 + 3,097^2 - 4 \times (0,511 \times 10^{-3})^2}} = 0,9995,$$

tính cụ thể ta có

$$\theta = 1,77^\circ.$$

(b) Đối với va chạm trực diện, bình phương khối lượng bất biến tại ngưỡng là

$$S = (E_\gamma + E_p)^2 - (p_\gamma - p_p)^2 = (m_\pi + m_p)^2 ,$$

ta rút ra

$$E_p - p_p = \frac{(m_p + m_\pi)^2 - m_p^2}{2E_\gamma} = 1.36 \times 10^{14} \text{ MeV} .$$

Đặt $E_p - p_p = A$, ta có

$$p_p^2 = (E_p - A)^2 ,$$

hay

$$m_p^2 - 2AE_p + A^2 = 0 ,$$

từ đó ta có năng lượng proton thấp nhất để xảy ra phản ứng là

$$E_p = \frac{1}{2A}(A^2 + m_p^2) \approx \frac{A}{2} = 6,8 \times 10^{13} \text{ MeV} .$$

(c) Mật độ bức xạ vật đen 3 K là rất lớn. Proton với năng lượng $> E_p$ ở trong bức xạ vũ trụ sẽ mất năng lượng do luôn tương tác với bức xạ này. Do đó giới hạn trên của phổ năng lượng của proton tia vũ trụ là E_p.

4041

Hạt J/ψ có khối lượng 3,097 GeV/c^2 và độ rộng 63 keV. Một hạt J/ψ được tạo ra với động lượng 100 GeV/c và tiếp đó phân rã theo phương trình

$$J/\psi \to e^+ + e^- .$$

(a) Tìm quãng đường trung bình hạt J/ψ đi được trong phòng thí nghiệm trước khi bị phân rã.

(b) Đối với phân rã đối xứng (có nghĩa là e^+ và e^- có cùng động lượng trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm), tìm năng lượng của electron phân rã trong phòng thí nghiệm.

(c) Tìm góc tương ứng giữa electron với phương chuyển động của J/ψ trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm.

(*Columbia*)

4042

Một hạt Ξ âm phân rã thành một Λ^0 và một π^-

$$\Xi^- \to \Lambda^0 + \pi^- .$$

Ξ^- chuyển động theo chiều dương của phương x trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm và có động lượng là 2 GeV/c. Trong hệ quy chiếu khối tâm Ξ^- phân rã xảy ra theo một quá trình mà Λ^0 chuyển động tạo thành góc 30° so với phương Ξ^- ban đầu.

Tìm động lượng và góc tạo bởi Λ^0 và π^- trong phòng thí nghiệm sau khi phân rã.

Năng lượng nghỉ

$$M_\Xi c^2 = 1,3 \text{ GeV},$$

$$M_\Lambda c^2 = 1,1 \text{ GeV},$$

$$M_\pi c^2 = 0,14 \text{ GeV}.$$

(*Columbia*)

Lời giải:

Các tham số động học β, γ và năng lượng E_Ξ của Ξ^- được cho bởi các phương trình sau

$$E_\Xi = \sqrt{p_\Xi^2 + m_\Xi^2} = 2,385 \text{ GeV},$$

$$\beta_\Xi = \frac{p_\Xi}{E_\Xi} = 0,839,$$

$$\gamma_\Xi = \frac{E_\Xi}{m_\Xi} = 1,835.$$

Kí hiệu các đại lượng trong hệ quy chiếu Ξ^- đứng yên bằng dấu gạch ngang. Theo định luật bảo toàn động lượng và bảo toàn năng lượng ta có

$$\mathbf{p}_\pi + \bar{\mathbf{p}}_\Lambda = 0,$$

$$\bar{E}_\pi + \bar{E}_\Lambda = m_\Xi .$$

Từ đó ta có

$$\bar{p}_\Lambda = \bar{p}_\pi ,$$

và như vậy

$$\bar{E}_\Lambda = \sqrt{\bar{p}_\pi^2 + m_\Lambda^2} = m_\Xi - \bar{E}_\pi .$$

Giải phương trình này, với $\bar{E}_\pi^2 - \bar{p}_\pi^2 = m_\pi^2$ ta có

$$\bar{E}_\pi = \frac{m_\Xi^2 + m_\pi^2 - m_\Lambda^2}{2m_\Xi} = 0,192 \text{ GeV},$$

$$\bar{E}_\Lambda = m_\Xi - E_\pi = 1,108 \text{ GeV},$$

$$\bar{p}_\Lambda = \bar{p}_\pi = \sqrt{\bar{E}_\pi^2 - m_\pi^2} = 0,132 \text{ GeV}/c .$$

Góc giữa $\bar{\mathbf{p}}_\Lambda$ và $\mathbf{p}_\Xi$ là $\bar{\theta}_\Lambda = 30°$, và góc hợp bởi $\bar{\mathbf{p}}_\pi$ và $\mathbf{p}_\Xi$ là $\bar{\theta}_\pi = 30° + 180° = 210°$.

Dùng phép biến đổi Lorentz chuyển sang hệ quy chiếu phòng thí nghiệm

Đối với π

$$p_\pi \sin\theta_\pi = \bar{p}_\pi \sin\bar{\theta}_\pi = 0,132 \times \sin 210^0 = -0,064 \text{ GeV}/c ,$$

$$p_\pi \cos\theta_\pi = \gamma(\bar{p}_\pi \cos\bar{\theta}_\pi + \beta\bar{E}_\pi) = 0,086 \text{ GeV}/c ,$$

suy ra

$$\text{tg}\,\theta_\pi = -0,767, \quad \text{hay} \quad \theta_\pi = -37,5° ,$$

$$p_\pi = \sqrt{0,086^2 + 0,064^2} = 0,11 \text{ GeV}/c .$$

Đối với Λ

$$p_\Lambda \sin\theta_\Lambda = \bar{p}_\Lambda \sin\bar{\theta}_\Lambda = 0,132 \times \sin 30° = 0,66 \text{ GeV}/c ,$$

$$p_\Lambda \cos\theta_\Lambda = \gamma(\bar{p}_\Lambda \cos\bar{\theta}_\Lambda + \beta\bar{E}_\Lambda) = 1,92 \text{ GeV}/c ,$$

$$\text{tg}\,\theta_\Lambda = 0,034 , \qquad \text{or} \qquad \theta_\Lambda = 1,9° ,$$

$$p_\Lambda = \sqrt{1,92^2 + 0,066^2} = 1,92 \text{ GeV}/c .$$

Góc giữa phương chuyển động của π và Λ trong phòng thí nghiệm là

$$\theta = \theta_\Lambda - \theta_\pi = 1,9 + 37,5 = 39,4° .$$

4043

Một hạt meson K có năng lượng nghỉ là 494 MeV phân rã thành một μ với năng lượng nghỉ là 106 MeV và một nơtrino khối lượng nghỉ bằng 0. Tìm động năng của μ và nơtrino trong hệ quy chiếu mà meson K đứng yên khi bắt đầu phân rã.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

Xét phản ứng trong hệ quy chiếu K đứng yên

$$K \to \mu + \nu.$$

Động lượng và năng lượng bảo toàn nên ta có

$$\mathbf{p}_\mu + \mathbf{p}_\nu = 0\,, \qquad \text{hay} \qquad p_\mu = p_\nu\,,$$

và $E_\mu + E_\nu = m_K$.

Từ đó ta có

$$E_\mu^2 = (m_K - E_\nu)^2 = m_K^2 + E_\nu^2 - 2m_K E_\nu\,,$$

hoặc do $E_\nu = p_\nu = p_\mu$ và $E_\mu^2 = p_\mu^2 + m_\mu^2$,

$$p_\mu = \frac{m_K^2 - m_\mu^2}{2m_K} = \frac{494^2 - 106^2}{2 \times 494} = 236 \text{ MeV}/c\,.$$

Ta thu được động năng là

$$T_\nu = E_\nu = p_\nu c = p_\mu c = 236 \text{ MeV}\,,$$

$$T_\mu = \sqrt{p_\mu^2 + m_\mu^2} - m_\mu = 152 \text{ MeV}\,.$$

4044

Các pion ($m = 140$ MeV) phân rã thành muyon và nơtron. Động lượng cực đại của muyon sinh ra là bao nhiêu trong hệ quy chiếu pion đứng yên?

(a) 30 MeV/c.

(b) 70 MeV/c.

(c) 2,7 MeV/c.

(*CCT*)

Lời giải:

Kí hiệu năng lượng toàn phần là E, động lượng là p, và xét phản ứng $\pi \to \mu + \nu_\mu$ trong hệ quy chiếu pion đứng yên. Bảo toàn năng lượng và động lượng cho ta biểu thức

$$E_\mu = m_\pi - E_\nu\,,$$

$$\mathbf{p}_\mu + \mathbf{p}_\nu = 0\,, \qquad \text{hay} \qquad p_\mu = p_\nu\,.$$

Với nơtrino ta có $E_\nu = p_\nu$, bình phương hai vế phương trình thứ nhất ta có

$$p_\mu^2 + m_\mu^2 = (m_\pi - p_\mu)^2\,,$$

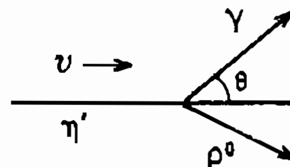
suy ra

$$p_\mu = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} = 29,9\ \text{MeV}/c\,.$$

Do vậy câu trả lời là (a).

4045

Hạt meson η' (gọi khối lượng của nó là M) có thể phân rã thành một hạt meson ρ^0 (khối lượng m) mà một photon (khối lượng = 0): $\eta' \to \rho^0 + \gamma$. Phân rã là đẳng hướng trong hệ quy chiếu đứng yên của hạt meson η' ban đầu.



Hình 4.5

Giả thiết một chùm tia meson η' đơn năng (có khoảng xác định năng lượng rất hẹp) chuyển động với tốc độ v trong phòng thí nghiệm và gọi θ là góc giữa photon và chùm tia, xem hình 4.5. Gọi $P(\theta)d(\cos\theta)$ là xác suất $\cos\theta$ nằm trong khoảng $(\cos\theta, \cos\theta + d\cos\theta)$.

(a) Tính $P(\theta)$.

(b) Gọi $E(\theta)$ là năng lượng trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm của photon phát ra theo góc θ. Tính $E(\theta)$.

(*CUSPEA*)

Lời giải:

(a) Kí hiệu các đại lượng trong hệ quy chiếu đứng yên của hạt η' bằng dấu gạch ngang và xét một photon phát ra. Sử dụng phép biến đổi Lorentz cho photon,

$$\bar{p}\cos\bar{\theta} = \gamma(p\cos\theta - \beta E)\,,$$

$$\bar{E} = \gamma(E - \beta p\cos\theta)\,,$$

trong đó γ, β là thừa số Lorentz và vận tốc của hạt η' trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm, với photon thì $\bar{p} = \bar{E}$, $p = E$,

$$\cos\bar{\theta} = \frac{\cos\theta - \beta}{1 - \beta\cos\theta}\,,$$

biến đổi ta được

$$\frac{d\cos\bar{\theta}}{d\cos\theta} = \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta\cos\theta)^2}\,.$$

Trong hệ quy chiếu đứng yên của η', quá trình sinh photon là đẳng hướng, có nghĩa là xác suất phát γ trên một đơn vị góc khối là một hằng số. Do vậy ta có

$$dP \propto d\bar{\Omega} = 2\pi\sin\bar{\theta}d\bar{\theta} = 2\pi d\cos\bar{\theta}\,,$$

ta thu được

$$\frac{dP}{1} = \frac{2\pi d\cos\bar{\theta}}{4\pi} = \frac{1}{2}d\cos\bar{\theta}\,.$$

Viết lại với $dP = \bar{P}(\bar{\theta})d\cos\bar{\theta}$ ta có $\bar{P}(\bar{\theta}) = \frac{1}{2}$. Chuyển về hệ quy chiếu phòng thí nghiệm ta có

$$dP = \bar{P}(\bar{\theta})d\cos\bar{\theta} = P(\theta)d\cos\theta\,,$$

từ đó rút ra xác suất

$$P(\theta) = \frac{1}{2}\frac{d\cos\tilde{\theta}}{d\cos\theta} = \frac{1 - \beta^2}{2(1 - \beta\cos\theta)^2}\,.$$

(b) Trong hệ quy chiếu đứng yên của η', sử dụng định luật bảo toàn ta có

$$\bar{E}_p = M - \bar{E}\,, \qquad \bar{p}_p = \bar{p}\,,$$

hay

$$\bar{E}_p^2 - \bar{p}_p^2 = m^2 = M^2 - 2M\bar{E}\,.$$

Do vậy ta nhận được

$$\bar{E} = \frac{M^2 - m^2}{2M}\,.$$

Sử dụng phép biến đổi Lorentz đối với năng lượng ta có

$$\bar{E} = \gamma E(1 - \beta\cos\theta)$$

từ đó thu được

$$E = \frac{\bar{E}}{\gamma(1-\beta\cos\theta)} = \frac{M^2 - m^2}{2(E_\eta - p_\eta\cos\theta)}\,,$$

E_η, p_η là năng lượng và động lượng của η' trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm.

4046

Một hạt meson K_L^0 ($Mc^2 = 498$ MeV) trong khi đang chuyển động phân rã tạo thành $\pi^+\pi^-$ ($mc^2 = 140$ MeV). Tỉ số động lượng của K_L^0 so với Mc là $p/Mc = 1$. Tìm giá trị cực đại của thành phần động lượng vuông góc mà mỗi hạt pion có thể nhận được trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm. Tìm động lượng song song cực đại của pion trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm, K_L^0 có vận tốc là

$$\beta_c = \frac{p}{E} = \frac{p}{\sqrt{p^2 + M^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,,$$

và do vậy $\gamma_c = \sqrt{2}$.

Gọi năng lượng và động lượng của pion trong hệ quy chiếu K_L^0 đứng yên là $\bar{E}$ và $\bar{p}$. Bảo toàn năng lượng cho ta $2\bar{E} = M$, và do đó

$$\bar{p} = \sqrt{\bar{E}^2 - m^2} = \frac{1}{2}\sqrt{M^2 - 4m^2} = \frac{1}{2}\sqrt{498^2 - 4\times 140^2} = 206 \text{ MeV}/c\,.$$

Thành phần vuông góc của động lượng không thay đổi qua phép biến đổi Lorentz. Do đó giá trị cực đại của nó bằng giá trị cực đại trong hệ quy chiếu đứng yên, và bằng 206 MeV/c.

Trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm, thành phần song song của động lượng của π là

$$p_l = \gamma_c(\bar{p}\cos\bar{\theta} + \beta_c\bar{E}),$$

và có giá trị cực đại ($\cos\bar{\theta} = 1$)

$$p_{l\max} = \gamma_c(\bar{p} + \beta_c\bar{E}) = \gamma_c\left(\bar{p} + \frac{\beta_c M}{2}\right) = \sqrt{2}\left(206 + \frac{498}{2\sqrt{2}}\right)$$
$$= 540\ \text{MeV}/c\,.$$

4047

(a) Một hạt duyên D^0 sau khi đi được 3 mm trong buồng bọt thì bị phân rã. Sản phẩm của quá trình phân rã có năng lượng toàn phần là 20 GeV. Khối lượng của D^0 là 1,86 GeV. Tính thời gian sống của hạt trong hệ quy chiếu đứng yên của riêng nó.h

(b) Nếu như có nhiều hạt D^0 phân rã, hãy so sánh phân bố theo thời gian (trong hệ quy chiếu D^0 đứng yên) của những phân rã thành kiểu có tỉ lệ phân nhánh 1% và cũng như thế với kiểu phân rã có tỉ lệ phân nhánh 40%.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Năng lượng toàn phần của D^0 trước khi phân rã là 20 GeV. Do vậy thừa số Lorentz γ của hệ quy chiếu đứng yên của nó là

$$\gamma = \frac{E}{m_0} = \frac{20}{1,86} = 10,75\,.$$

Vận tốc (tính theo c) D^0 của là

$$\beta = \sqrt{\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}} = 0,996$$

Thời gian sống của D^0 trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm là

$$\tau = \frac{l}{\beta c} = \frac{3 \times 10^{-3}}{0,996 \times 3 \times 10^8} = 1,0 \times 10^{-11}\ \text{s}$$

và thời gian sống riêng của nó là

$$\tau_0 = \frac{\tau}{\gamma} = 9,3 \times 10^{-13}\ \text{s}\,.$$

(b) Hằng số phân rã của D^0 là $\lambda = \frac{1}{\tau} = 1,07 \times 10^{12}\ \text{s}^{-1}$.

Trong bất cứ kiểu phân rã nào, phân bố theo thời gian của phân rã D^0 có cùng một dạng là $f(t) \approx e^{-\lambda t} = \exp(-1,07 \times 10^{12} \times t)$. Hay nói cách khác các kiểu phân rã có tỉ lệ phân nhánh 1% và 40% có cùng một phân bố theo thời gian.

4048

Meson duyên D^0 phân rã thành $K^-\pi^+$. Khối lượng của D, K, π tương ứng là 1,8; 0,5; 0,15 GeV/c^2.

(a) Tìm động lượng của K trong hệ quy chiếu D^0 đứng yên?

(b) Phát biểu sau đây có đúng hay không? Giải thích tại sao?

"Việc các hạt đơn K^- được sinh bởi nơtrino (ν_μ) chứng tỏ nó là là sản phẩm của D^0".

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Trong hệ quy chiếu D^0 đứng yên, bảo toàn động lượng cho ta biểu thức

$$\mathbf{p}_K + \mathbf{p}_\pi = 0\,, \qquad \text{hay} \qquad p_K = p_\pi\,.$$

Từ định luật bảo toàn năng lượng ta có

$$E_K + E_\pi = m_D\,.$$

tức là

$$\sqrt{p_K^2 + m_K^2} + \sqrt{p_K^2 + m_\pi^2} = m_D\,,$$

từ đó ta suy ra

$$p_K = \left[\left(\frac{m_D^2 + m_\pi^2 - m_K^2}{2m_D}\right)^2 - m_\pi^2\right]^{\frac{1}{2}} = 0,82\ \text{GeV}/c\,.$$

(b) Phát biểu trên là sai. Bởi vì K^- có một quac s. Các hạt khác như Ξ^*, Ω^-, K^*, được sinh ra từ các phản ứng nơtrino cũng có thể phân rã thành các meson đơn K^-.

4049

Thời gian sống trung bình của meson π mang điện đứng yên là $2,6\times10^{-8}$ s. Một chùm đơn năng pion có năng lượng cao, được sinh bởi một máy gia tốc, đi được một đoạn là 10 m, và trong quá trình có 10% phân rã pion xảy ra. Tìm động lượng và động năng của các pion.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Giả sử ban đầu có N_0 hạt pion với vận tốc là β (tính theo c). Sau khi đi được quãng đường l thì số lượng còn lại là

$$N(l) = N_0 \exp\left(\frac{-\lambda l}{\beta c}\right),$$

trong đó λ là hằng số phân rã của pion trong phòng thí nghiệm. Do

$$\lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{\gamma\tau_0},$$

ở đây thời gian gian sống riêng của pion $\tau_0 = 2,6\times10^{-8}$ s, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, ta có

$$\gamma\beta = \frac{l}{\tau_0 c \ln\dfrac{N_0}{N(l)}} = \frac{10}{2,6\times10^{-8}\times3\times10^8\times\ln\dfrac{1}{0,9}} = 12,2\,.$$

Động lượng của pion là

$$p = m\gamma\beta = 0,14\times12,2 = 1,71\ \text{GeV}/c,$$

Và động năng của chúng là

$$T = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} - m \approx 1,58\ \text{GeV}.$$

4050

Các meson trung hòa được tạo ra bằng cách bắn chùm proton vào một bia mỏng. Mỗi meson phân rã thành 2 tia γ. Photon được phát ra theo chiều

tiến của chùm proton có năng lượng 96 MeV và các photon được phát ra theo chiều ngược lại có năng lượng là 48 MeV.

(a) Xác định $\beta = v/c$ của meson.

(b) Xác định (một cách gần đúng) năng lượng nghỉ của các meson.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Với phân rã của một π^0 trong phòng thí nghiệm thì cứ một photon được phát ra theo chiều ngược lại thì phải có một photon được phát theo chiều tiến. Gọi năng lượng và động lượng của chúng lần lượt là E_2, p_2, E_1, p_1. Sử dụng định luật bảo toàn năng lượng ta có

$$E = E_1 + E_2 = 96 + 48 = 144 \text{ MeV}.$$

Từ định luật bảo toàn động lượng ta có

$$p = p_1 - p_2 = 96 - 48 = 48 \text{ MeV}/c.$$

Do đó ta thu được vận tốc của π^0 là

$$\beta = \frac{p}{E} = \frac{48}{144} = \frac{1}{3}.$$

(b) Khối lượng nghỉ của π^0 là

$$m = \frac{E}{\gamma} = E\sqrt{1-\beta^2} = \frac{144}{3} \times \sqrt{8} = 136 \text{ MeV}/c^2.$$

4051

Một hạt khối lượng $M = 3$ GeV/c^2 có động lượng $p = 4$ GeV/c theo phương x. Hạt này phân rã thành hai photon với phân bố góc đẳng hướng trong hệ quy chiếu đứng yên của hạt đó, tức là $\frac{dP}{d\cos\theta^*} = \frac{1}{2}$. Xác định giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của thành phần động lượng dọc theo trục x của photon. Tìm xác suất dP/dp_x tìm thấy một photon với thành phần x của động lượng p_x như một hàm của p_x.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Trong hệ quy chiếu đứng yên của hạt, ta có định luật bảo toàn động lượng và năng lượng

$$\bar{E}_1 + \bar{E}_2 = M, \qquad \bar{\mathbf{p}}_1 + \bar{\mathbf{p}}_2 = 0.$$

Từ đó ta có

$$\bar{p}_1 = \bar{p}_2 = \bar{p}\,, \qquad \bar{E}_1 = \bar{E}_2 = \bar{E} = \frac{M}{2}\,,$$

Ta tìm được năng lượng của các photon là

$$\bar{E} = \frac{3}{2} = 1,5\ \text{GeV}$$

và động lượng là

$$\bar{p} = \bar{E} = 1,5\ \text{GeV}/c\,.$$

Trong phòng thí nghiệm một hạt đang phân rã có

$$\gamma\beta = \frac{p}{M} = \frac{4}{3}\,,$$

và như vậy

$$\gamma = \sqrt{(\gamma\beta)^2 + 1} = \frac{5}{3}\,, \qquad \beta = \frac{\gamma\beta}{\gamma} = 0.8\,.$$

Phép biến đổi Lorentz cho ta biểu thức của thành phần x của động lượng trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm là

$$p_x = \gamma(\bar{p}\cos\bar{\theta} + \beta\bar{E}) = \gamma\bar{p}(\cos\bar{\theta} + \beta)\,.$$

Do đó p_x lớn nhất khi $\bar{\theta} = 0°$:

$$(p_x)_{\max} = \frac{5}{3} \times 1,5(1 + 0,8) = 4,5\ \text{GeV}/c\,,$$

p_x đạt cực tiểu khi $\bar{\theta} = 180°$:

$$(p_x)_{\min} = \frac{5}{3} \times 1,5(-1 + 0.8) = -0,5\ \text{GeV}/c\,.$$

Lấy vi phân phương trình biến đổi Lorrentz ta có

$$dp_x = \gamma\bar{p}d\cos\bar{\theta}\,.$$

Từ đó suy ra

$$\frac{dP}{dp_x} = \frac{dP}{d\cos\bar{\theta}}\frac{d\cos\bar{\theta}}{dp_x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\gamma\bar{p}} = 0,2\,.$$

4052

Một hạt pion trung hòa (π^0) phân rã thành hai tia γ. Giả thiết rằng π^0 chuyển động với năng lượng toàn phần là E.

(a) Năng lượng của các tia γ là bao nhiêu nếu chúng được phát ra ngược chiều nhau dọc theo phương chuyển động của pion trong quá trình phân rã.

(b) Góc hợp bởi hai tia γ là bao nhiêu nếu như chúng được phát ra theo những góc bằng nhau so với chiều chuyển động của pion?

(c) Lấy $m_\pi = 135$ MeV và $E = 1$ GeV, hãy đưa ra giá trị gần đúng cho các câu trả lời trên.

(*Columbia*)

Lời giải:

(a) Gọi động lượng và năng lượng của hai tia γ lần lượt là p_{γ_1}, $p_{\gamma 2}$ và E_{γ_1}, E_{γ_2}, và động lượng và năng lượng của π^0 là p_π, E. Ta có các định luật bảo toàn năng lượng và động lượng

$$E = E_{\gamma_1} + E_{\gamma_2} ,$$

$$p_\pi = p_{\gamma_1} - p_{\gamma_2} .$$

Do

$$E^2 = p_\pi^2 + m_\pi^2 , \qquad E_{\gamma_1} = p_{\gamma_1} , \qquad E_{\gamma_2} = p_{\gamma_2} ,$$

nên ta có

$$m_\pi^2 = 4E_{\gamma_1} E_{\gamma_2} = 4E_{\gamma_1}(E - E_{\gamma_1}) .$$

Giải phương trình bậc hai với biến E_{γ_1} ta thu được hai nghiệm .

$$E_{\gamma_1} = \frac{E + \sqrt{E^2 - m_\pi^2}}{2} ,$$

$$E_{\gamma_2} = \frac{E - \sqrt{E^2 - m_\pi^2}}{2} ,$$

đó cũng chính là năng lượng của hai photon.

(b) Gọi góc hợp bởi hai photon với chiều chuyển động của pion là θ và $-\theta$. Định luật bảo toàn cho ta

$$E = 2E_\gamma ,$$

$$p_\pi = 2p_\gamma \cos\theta .$$

Để ý rằng do tính đối xứng nên hai photon sẽ có cùng năng lượng và động lượng E_γ và p_γ.

Kết hợp hai phương trình ta thu được

$$m_\pi^2 = 4E_\gamma^2 - 4p_\gamma^2 \cos^2\theta = E^2(1-\cos^2\theta) = E^2\sin^2\theta\,,$$

hay

$$\theta = \pm\arcsin\left(\frac{m_\pi}{E}\right).$$

Từ đó góc hợp bởi hai photon là

$$\theta_{2\gamma} = 2\theta = 2\arcsin\left(\frac{m_\pi}{E}\right).$$

(c) Thay số ta có

$$E_{\gamma_1} = \frac{10^3 + \sqrt{10^6 - 135^2}}{2} = 995,4\ \text{MeV}\,,$$

$$E_{\gamma_2} = \frac{10^3 - \sqrt{10^6 - 135^2}}{2} = 4,6\ \text{MeV}\,,$$

$$\theta_{2\gamma} = 2\arcsin\left(\frac{135}{1000}\right) = 15,5^\circ\,.$$

4053

Một hạt meson π^0 phân rã một cách đẳng hướng thành hai photon trong hệ quy chiếu đứng yên của nó. Tìm phân bố góc của các photon trong phòng thí nghiệm dạng hàm cosin của góc cực trong hệ tọa độ cực. Với động lượng của π^0 là $p = 280$ MeV/c và năng lượng nghỉ của nó là 140 MeV.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

Trong hệ quy chiếu pion đứng yên, phân bố góc của các photon phân rã là đẳng hướng, thỏa mãn điều kiện chuẩn hóa $\int W_0(\cos\theta^*, \phi^*)d\Omega^* = 1$. Do một π^0 phân rã thành hai photon nên $\int W(\cos\theta^*, \phi^*)d\Omega^* = 2$. Để ý rằng W là xác suất sinh ra một photon trong góc khối $d\Omega^*(\theta^*, \phi^*)$ trong phân rã của một π^0. Do W không phụ thuộc vào θ^* và ϕ^*, nên từ tích phân ta có $W\int d\Omega^* = 4\pi W = 2$, hay $W(\cos\theta^*, \phi^*) = \frac{1}{2\pi}$. Lấy tích phân theo ϕ^*, ta có

$$\int_0^{2\pi} W(\cos\theta^*)d\varphi^* = W\int_0^{2\pi} d\varphi^* = 1\,,$$

hay

$$W(\cos\theta^*) = 1\,.$$

Nếu θ^* ứng với θ trong phòng thí nghiệm thì ta có

$$W(\cos\theta)d\cos\theta = W(\cos\theta^*)d\cos\theta^*\,.$$

Gọi γ_0, β_0 là thừa số Lorentz và vận tốc của π^0. Sử dụng phép biến đổi Lorentz cho photon ta được

$$p\cos\theta = \gamma_0(p^*\cos\theta^* + \beta_0 E^*) = \gamma_0 p^*(\cos\theta^* + \beta_0)\,,$$

$$E = p = \gamma_0(E^* + \beta_0 p^*\cos\theta^*) = \gamma_0 p^*(1 + \beta_0\cos\theta^*)\,.$$

Để ý rằng E^* và p^* là hằng số do sự đẳng hướng của phân bố góc trong hệ quy chiếu đứng yên. Đạo hàm các phương trình trên theo biến $\cos\theta^*$, ta có

$$\cos\theta\frac{dp}{d\cos\theta^*} + p\frac{d\cos\theta}{d\cos\theta^*} = \gamma_0 p^*\,,$$

$$\frac{dp}{d\cos\theta^*} = \gamma_0\beta_0 p^*\,,$$

kết hợp lại ta được

$$\frac{d\cos\theta^*}{d\cos\theta} = \frac{p}{\gamma_0 p^*(1-\beta_0\cos\theta)} = \frac{1}{\gamma_0^2(1-\beta_0\cos\theta)^2}\,,$$

Sử dụng kết quả thu được từ phương trình biến đổi

$$E^* = \gamma_0(E - \beta_0 p\cos\theta)\,,$$

hay

$$p^* = \gamma_0 p(1 - \beta_0\cos\theta)\,.$$

Từ đó ta có

$$W(\cos\theta) = W(\cos\theta^*)\frac{d\cos\theta^*}{d\cos\theta} = \frac{1}{\gamma_0^2(1-\beta_0\cos\theta)^2}\,.$$

Với khối lượng của π^0 là 140 MeV/c^2, động lượng là 280 MeV/c, ta có

$$\gamma_0\beta_0 = \frac{280}{140} = 2\,,$$

$$\gamma_0 = \sqrt{(\gamma_0\beta_0)^2 + 1} = \sqrt{5}\,,$$

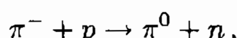
$$\beta_0 = \frac{\gamma_0\beta_0}{\gamma_0} = \frac{2}{\sqrt{5}}\,,$$

Như vậy phân bố góc trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm là

$$W(\cos\theta) = \frac{1}{(\sqrt{5})^2\left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\cos\theta\right)^2} = \frac{1}{(\sqrt{5} - 2\cos\theta)^2}\,.$$

4054

Một pion trung hòa phân rã thành hai tia γ, $\pi^0 \to \gamma + \gamma$, với thời gian sống khoảng 10^{-16} s. Pion trung hòa có thể được tạo ra trong phòng thí nghiệm bằng cách chặn các pion âm bằng hydro theo phản ứng



$$\pi^- + p \to \pi^0 + n\,.$$

Khối lượng nghỉ của các hạt trên lần lượt là:

$$m(\pi^-) = 140 \text{ MeV}\,, \qquad m(\pi^0) = 135 \text{ MeV}\,, \qquad m(p) = 938 \text{ MeV}\,,$$
$$m(n) = 940 \text{ MeV}\,.$$

(a) Vận tốc của π^0 sinh ra từ phản ứng trên là bao nhiêu? Giả thiết rằng trước phản ứng cả π^- và proton đều đứng yên.

(b) Tìm động năng của nơtron được sinh ra?

(c) Quãng đường mà π^0 đi được trong phòng thí nghiệm là bao nhiêu nếu nó tồn tại trong thời gian 10^{-16} s trong hệ quy chiếu đứng yên của nó?

(d) Năng lượng lớn nhất của các tia γ sinh ra từ phân rã π^0 trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm là bao nhiêu?

(*Columbia*)

Lời giải:

(a) Biểu thức của định luật bảo toàn động lượng

$$\mathbf{p}_{\pi^0} + \mathbf{p}_n = 0\,, \qquad \text{hay} \qquad p_{\pi^0} = p_n\,.$$

Định luật bảo toàn năng lượng cho ta biểu thức

$$E_n = m_{\pi^-} + m_p - E_{\pi^0}\,.$$

Với $E^2 - p^2 = m^2$, từ đó ta có

$$E_{\pi^0} = \frac{(m_\pi + m_p)^2 + m_{\pi^0}^2 - m_n^2}{2(m_{\pi^-} + m_p)}$$
$$= 137,62 \text{ MeV}\,.$$

Do đó

$$\gamma = \frac{E_{\pi^0}}{m_{\pi^0}} = 1,019\,,$$

và

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 0,194\,.$$

Vì vậy π^0 có vận tốc là $5,8 \times 10^7$ m/s.

(b) Động năng của neutron là

$$T_n = m_{\pi^-} + m_p - E_{\pi^0} - m_n$$

$$= 0,38 \text{ MeV}\,.$$

(c) Thời gian sống của π^0 trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm là

$$\tau = \tau_0\gamma = 1,019 \times 10^{-16} \text{ s}\,.$$

Do đó quãng đường mà nó đi được trước khi phân rã là

$$l = \tau\beta c = 1,019 \times 10^{-16} \times 5,8 \times 10^7 = 5,9 \times 10^{-9} \text{ m}\,.$$

(d) Trong phòng thí nghiệm π^0 có $\gamma = 1,019$, $\beta = 0,194$. Trong hệ quy chiếu đứng yên của nó, mỗi photon phân rã có năng lượng là

$$E^*_\gamma = \frac{1}{2} m_{\pi^0} = 67,5 \text{ MeV}\,.$$

Chuyển sang hệ quy chiếu phòng thí nghiệm ta có

$$E_\gamma = \gamma(E^*_\gamma + \beta p^*_\gamma \cos\theta^*)\,.$$

Năng lượng E_γ đạt cực đại khi $\theta^* = 0$

$$(E_\gamma)_{\max} = \gamma E^*_\gamma(1+\beta) = 1,019 \times 67,5 \times (1 + 0,194)$$

$$= 82,1 \text{ MeV}\,.$$

4055

Tại phòng thí nghiệm Fermi người ta tạo ra chùm nơtrino năng lượng cao bằng cách: đầu tiên tạo ra một chùm π^+ (hoặc K^+) đơn năng và sau đó cho các pion phân rã theo phản ứng

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu\,.$$

Khối lượng của pion là 140 MeV/c^2 và khối lượng của muyon là 106 MeV/c^2.

(a) Tìm năng lượng của nơtrino trong hệ quy chiếu π^+ đứng yên.

Biết rằng trong phòng thí nghiệm năng lượng của nơtrino phân rã phụ thuộc và góc phân rã θ (hình 4.6). Giả thiết rằng tia π^+ có năng lượng là 200 GeV/c^2.

(b) Tìm năng lượng của của nơtrino sinh ra theo chiều tiến ($\theta = 0$).



Hình 4.6

(c) Tìm góc θ sao cho tại đó năng lượng của nơtrino bằng một nửa năng lượng cực đại của nó.

(*Chicago*)

Lời giải:

(a) Trong hệ quy chiếu π^+ đứng yên ta có định luật bảo toàn năng lượng và động lượng

$$E_\nu + E_\mu = m_\pi ,$$

$$\mathbf{p}_\nu + \mathbf{p}_\mu = 0 , \qquad \text{hay} \qquad p_\nu = p_\mu .$$

Kết hợp các phương trình này cho ta

$$m_\mu^2 + p_\nu^2 = E_\nu^2 + m_\pi^2 - 2m_\pi E_\nu .$$

Giả sử nơtrino không có khối lượng. Khi đó $E_\nu = p_\nu$ và biểu thức trên trở thành

$$E_\nu = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_{\pi^+}} = \frac{140^2 - 106^2}{2 \times 140} = 30 \text{ MeV} .$$

(b) Với π^+ năng lượng 200 GeV, ta có $\gamma = \frac{E}{m} = \frac{200}{0,140} = 1429$, $\beta \approx 1$. Sử dụng phép biến đổi Lorentz cho nơtrino ta thu được

$$E_\nu = \gamma(E_\nu^* + \beta p_\nu^* \cos\theta^*) = \gamma E_\nu^*(1 + \beta \cos\theta^*)$$

khi $\theta^* = 0$ ta có

$$E_\nu = \gamma E_\nu^*(1+\beta) \approx 1429 \times 30 \times (1+1) = 85,7 \text{ GeV}.$$

Để ý rằng $\theta^* = 0$ tương ứng với $\theta = 0$ trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm do $p_\nu \sin\theta = p_\nu^* \sin\theta^*$.

(c) Năng lượng trong phòng thí nghiệm của nơtrino đạt cực đại khi $\theta = \theta^* = 0$. Do đó ta có

$$(E_\nu)_{\max} = \gamma E_\nu^*(1+\beta).$$

Với $E_\nu = \frac{1}{2}(E_\nu)_{\max}$, ta thu được

$$\gamma E_\nu^*(1+\beta\cos\theta^*) = \frac{1}{2}\gamma E_\gamma^*(1+\beta),$$

từ đó tìm được

$$\cos\theta^* = \frac{\beta-1}{2\beta},$$

điều đó ứng với

$$\sin\theta^* = \sqrt{1-\cos^2\theta^*} = \frac{1}{2\beta}\sqrt{3\beta^2+2\beta-1}.$$

Sử dụng phép biến đổi Lorentz cho nơtrino

$$p_\nu \sin\theta = p_\nu^* \sin\theta^*,$$

$$p_\nu \cos\theta = \gamma(p_\nu^* \cos\theta^* + \beta E_\nu^*) = \gamma p_\nu^*(\cos\theta^* + \beta),$$

ta suy ra

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin\theta^*}{\gamma(\cos\theta^* + \beta)}.$$

Với $E_\nu = \frac{1}{2}(E_\nu)_{\max}$,

$$\operatorname{tg}\theta_{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3\beta^2+2\beta-1}}{\gamma(\beta-1+2\beta^2)} = \frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{(2\beta-1)}\sqrt{\frac{3\beta-1}{\beta+1}} \approx \frac{1}{\gamma}$$

do $\beta \approx 1$. Như thế góc có năng lượng bằng một nửa năng lượng cực đại là

$$\theta_{\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{\gamma}.$$

4056

Trong thời gian này các nhà khoa học có sự quan tâm đặc biệt tới tương tác yếu ở năng lượng cao. Điều này có thể làm được nhờ việc nghiên cứu các tương tác của nơtrino năng lượng cao. Chùm nơtrino có thể được tạo ra bằng cách cho các meson pi và K phân rã khi đang chuyển động. Giả sử một chùm pi-meson 200-GeV/c được dùng để tạo ra nơtrino nhờ phản ứng $\pi^+ \to \mu^+ + \nu$. Thời gian sống của pi-meson là $\tau_{\pi^\pm} = 2,60 \times 10^{-8}$ s (trong hệ quy chiếu đứng yên của pion), và năng lượng nghỉ của nó là 139,6 MeV. Năng lượng nghỉ của muyon là 105,7 MeV, và nơtrino không có khối lượng.

(a) Tính quãng đường trung bình pion đi được trước khi phân rã.

(b) Tính góc lớn nhất giữa muyon và pion trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm.

(c) Tính động lượng cực đại và cực tiểu mà nơtron có thể có.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Thừa số Lorentz của pion là

$$\gamma = \frac{E}{m} \approx \frac{p}{m} = \frac{200000}{139,6} = 1433\,.$$

Thời gian sống của pion trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm là $\tau = \gamma\tau_0 = 2,6 \times 10^{-8} \times 1433 = 3,72 \times 10^{-5}$ s.

Tốc độ của pion rất gần với tốc độ ánh sáng. Do đó trước khi phân rã pion đi được quãng đường trung bình là

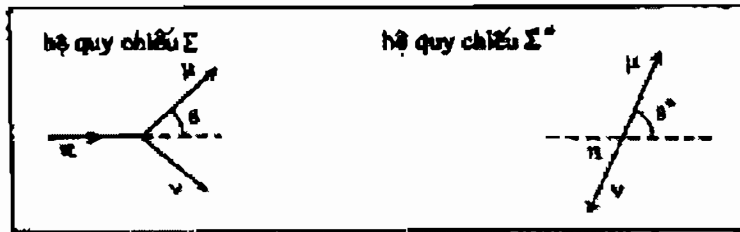
$$l = c\tau = 3 \times 10^8 \times 3,72 \times 10^{-5} = 1,12 \times 10^4 \text{ m}\,.$$

(b) Hình 4.7 thể hiện một phân rã trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm Σ và trong hệ quy chiếu đứng yên Σ^* của pion.

Ta có định luật bảo toàn năng lượng và động lượng trong hệ Σ^* là

$$E^*_\nu + E^*_\mu = m_\pi\,,$$

$$\mathbf{p}^*_\nu + \mathbf{p}^*_\mu = 0\,, \qquad \text{hay} \qquad p^*_\nu = p^*_\mu\,.$$



Hình 4.7

Kết hợp các phương trình trên ta có

$$E_\mu^* = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi} = 109,8 \text{ MeV}.$$

Phép biến đổi Lorentz cho ta

$$p_\mu \sin\theta = p_\mu^* \sin\theta^*,$$

$$p_\mu \cos\theta = \gamma(p_\mu^* \cos\theta^* + \beta E_\mu^*),$$

Trong đó $\gamma = 1433$ là thừa số Lorentz của Σ^*, $\beta \approx 1$. Do vậy ta được

$$\text{tg}\,\theta = \frac{\sin\theta^*}{\gamma\left(\cos\theta^* + \dfrac{E_\mu^*}{p_\mu^*}\right)} = \frac{\sin\theta^*}{\gamma\left(\cos\theta^* + \dfrac{1}{\beta_\mu^*}\right)},$$

với $\beta_\mu^* = \frac{p_\mu^*}{E_\mu^*}$. Để tìm θ cực đại ta cho

$$\frac{d\text{tg}\,\theta}{d\theta^*} = 0.$$

Ta thu được $\cos\theta^* = -\beta_\mu^*$, $\sin\theta^* = \sqrt{1-\beta_\mu^{*2}} = \frac{1}{\gamma_\mu^*}$. Do đó ta có

$$(\text{tg}\,\theta)_{\max} = \frac{1}{\gamma\gamma_\mu^*\left(-\beta_\mu^* + \dfrac{1}{\beta_\mu^*}\right)} = \frac{\beta_\mu^*}{\gamma\gamma_\mu^*(\beta_\mu^{*2}-1)} = \frac{\gamma_\mu^*\beta_\mu^*}{\gamma} = \frac{\sqrt{\gamma_\mu^{*2}-1}}{\gamma}.$$

Do $\gamma_\mu^* = \frac{E_\mu^*}{m_\mu} = \frac{109,8}{105,7} = 1,039$, $\gamma = 1433$ nên

$$\theta_{\max} = \arctan(\text{tg}\,\theta)_{\max} \approx \frac{\sqrt{\gamma_\mu^{*2}-1}}{\gamma} = 1,97 \times 10^{-4} \text{ rad} = 0,011^0.$$

(c) Trong hệ đứng yên Σ^*, năng lượng của nơtrino là

$$E_\nu^* = m_\pi - E_\mu^* = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} = 29,8 \text{ MeV},$$

và do đó động lượng của nó là 29,8 MeV/c. Sử dụng phép biến đổi Lorentz đối với nơtrino ta có

$$p_\nu = E_\nu = \gamma(E_\nu^* + \beta p_\nu^* \cos\theta^*) = \gamma p_\nu^*(1 + \beta\cos\theta^*).$$

Vì vậy ta được

$$\begin{aligned}(p_\nu)_{\max} &= \gamma p_\nu^*(1+\beta)\\ &= 1433 \times 29,8(1+1) = 85,4 \text{ GeV}/c,\\ (p_\nu)_{\min} &= \gamma p_\nu^*(1-\beta)\\ &= [\sqrt{(\gamma\beta)^2+1} - \gamma\beta]p_\nu^*\\ &\approx \frac{p_\nu^*}{2\gamma\beta} = \frac{m_\pi p_\nu^*}{2p_\pi} = \frac{139,6 \times 29,4}{2 \times 200 \times 10^3}\\ &= 1,04 \times 10^{-2} \text{ MeV}/c.\end{aligned}$$

4057

Một chùm pion có năng lượng E_0 tới theo phương z. Một số pion này bị phân rã thành muyon và nơtrino, trong đó nơtrino sinh ra với góc θ_ν so với trục z. Giả thiết nơtrino không có khối lượng.

(a) Xác định năng lượng của nơtrino như là một hàm của θ_ν. Chỉ ra rằng nếu $E_0 \gg m_\pi$ và $\theta_\nu \ll 1$ thì ta có

$$E_\nu \approx E_0 \frac{1 - \left(\frac{m_\mu}{m_\pi}\right)^2}{1 + \left(\frac{E_0}{m_\pi}\right)^2 \theta_\nu^2}.$$

(b) Cho phân rã là đẳng hướng trong hệ quy chiếu khối tâm. Xác định góc θ_m sao cho một nửa số nơtron sinh ra thỏa mãn $\theta_\nu < \theta_m$. *(Columbia)*

Lời giải:

(a) Gọi góc phát ra của muyon so với phương z là θ. Sử dụng định luật bảo

toàn năng lượng và động lượng

$$E_0 = E_\mu + E_\nu = \sqrt{p_\mu^2 + m_\mu^2} + E_\nu \,,$$

$$\sqrt{E_0^2 - m_\pi^2} = p_\mu \cos\theta + p_\nu \cos\theta_\nu \,,$$

$$0 = p_\mu \sin\theta + p_\nu \sin\theta_\nu \,,$$

Do nơtrino được coi là không có khối lượng nên $p_\nu = E_\nu$. Kết hợp các phương trình bảo toàn động lượng ta được

$$p_\mu^2 = E_0^2 - m_\pi^2 + p_\nu^2 - 2\sqrt{E_0^2 - m_\pi^2} E_\nu \cos\theta_\nu \,,$$

và các phương trình bảo toàn năng lượng cho ta

$$p_\mu^2 = E_0^2 - m_\mu^2 + p_\nu^2 - 2E_0 E_\nu \,.$$

So sánh hai phương trình này ta được

$$E_\nu = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2(E_0 - \sqrt{E_0^2 - m_\pi^2}\cos\theta_\nu)}$$

$$= \frac{m_\pi^2}{2E_0} \frac{\left[1 - \left(\frac{m_\mu}{m_\pi}\right)^2\right]}{\left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{m_\pi}{E_0}\right)^2}\cos\theta_\nu\right]} \,.$$

Nếu $E_0 \gg m_\pi$, $\theta_\nu \ll 1$, ta có

$$\sqrt{1 - \left(\frac{m_\pi}{E_0}\right)^2}\cos\theta_\nu \approx \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{m_\pi}{E_0}\right)^2\right]\left(1 - \frac{\theta_\nu^2}{2}\right) \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{m_\pi}{E_0}\right)^2 - \frac{\theta_\nu^2}{2} \,,$$

và do đó

$$E_\nu \approx \frac{m_\pi^2}{E_0} \times \frac{1 - \left(\frac{m_\mu}{m_\pi}\right)^2}{\left(\frac{m_\pi}{E_0}\right)^2 + \theta_\nu^2} = E_0 \frac{1 - \left(\frac{m_\mu}{m_\pi}\right)^2}{1 + \left(\frac{E_0}{m_\pi}\right)^2 \theta_\nu^2} \,.$$

(b) Hệ quy chiếu khối tâm (chính là hệ quy chiếu đứng yên của π) có thừa số Lorentz và vận tốc là

$$\gamma = \frac{E_0}{m_\pi} \,, \qquad \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \,.$$

Kí hiệu các đại lượng trong hệ quy chiếu đứng yên bằng dấu gạch ngang. Dùng phép biến đổi Lorentz cho nơtrino ta được

$$p_\nu \sin\theta_\nu = \bar{p}_\nu \sin\bar{\theta}_\nu ,$$

$$p_\nu \cos\theta_\nu = \gamma(\bar{p}_\nu \cos\bar{\theta}_\nu + \beta\bar{E}_\nu) = \gamma\bar{p}_\nu(\cos\bar{\theta}_\nu + \beta)$$

từ đó suy ra

$$\text{tg}\,\theta_\nu = \frac{\sin\bar{\theta}_\nu}{\gamma(\beta + \cos\bar{\theta}_\nu)} .$$

Do trong hệ quy chiếu đứng yên phân bố góc là đẳng hướng nên $\bar{\theta}_m = 90°$. Nên

$$\text{tg}\,\theta_m = \frac{\sin 90°}{\gamma(\beta + \cos 90°)} = \frac{1}{\gamma\beta} = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{E_0}{m_\pi}\right)^2 - 1}} = \frac{m_\pi}{\sqrt{E_0^2 - m_\pi^2}} ,$$

hay

$$\theta_m = \text{arctg}\left(\frac{m_\pi}{\sqrt{E_0^2 - m_\pi^2}}\right) .$$

Để ý rằng do

$$\frac{d\theta_\nu}{d\bar{\theta}_\nu} = \frac{\cos^2\theta_\nu}{\gamma}\frac{(1 + \beta\cos\bar{\theta}_\nu)}{(\beta + \cos\bar{\theta}_\nu)^2} \geq 0$$

nên θ_ν tăng đơn điệu theo $\bar{\theta}_\nu$. Có nghĩa là nếu $\bar{\theta}_\nu \leq \bar{\theta}_m$ chứa một nửa số nơtrino được sinh ra thì $\theta_\nu \leq \theta_m$ cũng chứa một nửa số nơtron sinh ra.

4058

(a) Tính động lượng của pion nếu nó có cùng vận tốc với proton có năng lượng 400 GeV/c. Đây chính là động lượng có thể nhất của pion được sinh ra khi chùm cho proton 400-GeV/c bắn phá bia ở phòng thí nghiệm Fermi. Cho khối lượng nghỉ của pion là 0,14 GeV/c^2. Khối lượng nghỉ của proton là 0,94 GeV/c^2.

(b) Sau đó những pion này đi xuống một ống phân rã dài 400 m, ở đó một số sẽ phân rã, sinh ra chùm nơtrino. Chùm nơtrino này sẽ được đo nhờ

vào một đầu dò nơtrino đặt cách đó hơn 1 km. Hãy tìm tỉ lệ pion phân rã trên quãng đường 400 m. Biết thời gian sống riêng của pion là $2,6 \times 10^{-8}$ s.

(c) Chiều dài của ống phân rã là bao nhiêu nếu được đo bởi một người trong hệ quy chiếu đứng yên của pion?

(d) Cho biết các pion phân rã tạo thành một muyon và một nơtrino ($\pi \to \mu + \nu_\mu$, nơtrino có khối lượng nghỉ bằng 0). Sử dụng mối liên hệ giữa năng lượng toàn phần và động lượng tương đối tính chứng minh rằng động lượng của phần đã phân rã trong hệ quy chiếu đứng yên của pion có độ lớn cho bởi $\frac{p}{c} = \frac{M^2-m^2}{2M}$, trong đó M là khối lượng nghỉ của pion và m là khối lượng nghỉ của muyon.

(e) Đầu dò nơtrino được đặt cách nơi pion phân rã khoảng 1,2 km. Đầu dò phải có chiều ngang (đường kính) là bao nhiêu để có thể phát hiện toàn bộ nơtrino được sinh ra trong nửa bán cầu phía trước của hệ quy chiếu pion đứng yên?

(*UC, Berkeley*)

Lời giải:

(a) Pion và proton có cùng vận tốc và γ nên cùng có cùng giá trị $\gamma\beta$. Do đó

$$p_\pi = m_\pi \gamma\beta\,, \qquad p_p = m_p \gamma\beta\,,$$

$$p_\pi = \frac{m_\pi}{m_p} p_p = \frac{0,14}{0,94} \times 400 = 59,6 \text{ GeV}/c\,.$$

(b) Các pion có

$$\gamma\beta = \frac{59,6}{0,14} = 426\,,$$

nên $\gamma = \sqrt{(\gamma\beta)^2 + 1} \approx \gamma\beta = 426$.

Pion có thời gian sống riêng là $\tau_0 = 2,6 \times 10^{-8}$ s và do đó thời gian sống trung bình trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm là $\tau = \gamma\tau_0 = 1,1 \times 10^{-5}$ s. Do vậy ta có

$$\frac{N}{N_0} = (1 - e^{-\frac{l}{\tau c}}) = (1 - e^{-0,12}) = 0,114\,.$$

(c) Trong hệ quy chiếu đứng yên của pion, khi tính đến sự co ngắn Fitzgerald, thì chiều dài của ống phân rã là

$$\bar{l} = \frac{l}{\gamma} = \frac{400}{426} = 0,94\ m\,.$$

(d) Trong hệ quy chiếu đứng yên của pion, định luật bảo toàn năng lượng và động lượng cho ta

$$E_\mu + E_\nu = m_\pi ,$$

$$\mathbf{p}_\mu + \mathbf{p}_\nu = 0 , \qquad \text{hay} \qquad p_\mu = p_\nu .$$

Đối với một hạt, năng lượng toàn phần và động lượng liên hệ theo biểu thức (lấy $c = 1$)

$$E^2 = p^2 + m^2 .$$

Áp dụng cho nơtrino, do $m = 0$ ta có $E_\nu = p_\nu$. Khi đó ta có phương trình năng lượng trở thành

$$p_\mu^2 + m_\mu^2 = m_\pi^2 - 2p_\nu m_\pi + p_\nu^2 ,$$

hay

$$p_\nu = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi}$$

tức là

$$p = \frac{M^2 - m^2}{2M} .$$

(e) Phân rã $\pi \to \mu\nu$ là đẳng hướng trong hệ quy chiếu đứng yên của pion. Từ **Bài tập 4057(b)** ta có "góc một nửa nơtrino" là

$$\theta_{1/2} = \text{arctg}\left(\frac{m_\pi}{\sqrt{E_0^2 - m_\pi^2}}\right) = \text{arctg}\,\frac{1}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \approx \frac{1}{\gamma} .$$

Vì vậy đường kính của đầu dò phải lớn hơn

$$L = 2d\text{tg}\,\theta_{\frac{1}{2}} \approx \frac{2d}{\gamma} = \frac{2 \times 1200}{426} = 5,63\ m .$$

4059

Xét phân rã $K^0 \to \pi^+ + \pi^-$.

Cho thành phần ma trận truyền qua như sau

$$T_{\text{if}} = \frac{G}{\sqrt{8E_K E_+ E_-}} \frac{P_K(P_+ + P_-)}{m_K} .$$

Chứng minh rằng thời gian sống của meson K^0 trong hệ quy chiếu đứng yên là

$$\tau = \left[\frac{G^2}{8\pi\hbar^4 c}\sqrt{\frac{m_K^2}{4} - \mu^2}\right]^{-1} .$$

(E_K, E_+ và E_- lần lượt là năng lượng tương đối tính của K^0, π^+ và π^-, và P_K, P_+ và P_- là động lượng bốn chiều tương ứng. M_K là khối lượng của K và G là hằng số liên kết. μ là khối lượng của meson π).

(*SUNY, Buffalo*)

Lời giải:

Xác suất truyền qua trong một đơn vị thời gian cho bởi

$$W = \frac{2\pi}{\hbar}|T_{\text{if}}|^2 \rho(E) .$$

Trong hệ quy chiếu đứng yên của K^0,

$$E_K = m_K c^2 , \qquad E_+ = E_- = \frac{1}{2} m_K c^2 ,$$

$$P_K^2 = \frac{E_K^2}{c^2} = m_K^2 c^2 ,$$

$$(P_+ + P_-)^2 = -(\mathbf{p}_+ + \mathbf{p}_-)^2 + \frac{(E_+ + E_-)^2}{c^2} = m_K^2 c^2 .$$

Do vậy

$$|T_{\text{if}}|^2 = \frac{G^2}{8E_K E_+ E_-}\frac{[P_K(P_+ + P_-)]^2}{m_K^2}$$

$$= \frac{G^2}{8m_K c^2 \frac{m_K^2}{4} c^4}\frac{m_K^4 c^4}{m_K^2} = \frac{G^2}{2m_K c^2} .$$

Với phân rã hai thành phần, trong hệ quy chiếu đứng yên của hạt phân rã ta có

$$\rho(E) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\frac{d}{dE}\int p_1^2 dp_1 d\Omega = \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3}\frac{d}{dE}\left(\frac{1}{3}p_1^3\right) ,$$

cho rằng phân rã là đẳng hướng.

Để ý rằng $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$, hay $p_1^2 = p_2^2$, tức là, $p_1 dp_1 = p_2 dp_2$, và $dE = dE_1 + dE_2$, ta tìm được

$$\rho(E) = \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} \frac{E_1 E_2 p_1}{E_1 + E_2} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3 c^2} \frac{m_K c^2}{4} \left(\sqrt{\frac{m_K^2}{4} - \mu^2}\right) 4\pi c$$

$$= \frac{m_K c}{8\pi^2\hbar^3} \sqrt{\frac{m_K^2}{4} - \mu^2} \,,$$

trong đó ta đã sử dụng

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}p_1^3\right) = \frac{p_1^2 dp_1}{dE_1 + dE_2} = \frac{p_1}{\dfrac{dE_1}{p_1 dp_1} + \dfrac{dE_2}{p_2 dp_2}} = \frac{E_1 E_2 p_1}{E_1 + E_2} \,,$$

do $E_1^2 = p_1^2 + m_1^2$ ta có

$$\frac{dE_1}{p_1 dp_1} = \frac{1}{E_1} \,, \qquad \text{v.v.}$$

Do đó ta thu được

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{G^2}{2m_K c^2} \frac{m_K c}{8\pi^2\hbar^3} \sqrt{\frac{m_K^2}{4} - \mu^2}$$

$$= \frac{G^2}{8\pi\hbar^4 c} \sqrt{\frac{m_K^2}{4} - \mu^2} \,,$$

và thời gian sống của K^0 là

$$\tau = \left[\frac{G^2}{8\pi\hbar^4 c} \sqrt{\frac{m_K^2}{4} - \mu^2}\right]^{-1} .$$

4060

Một chủ đề thu hút nhiều sự quan tâm hiện nay chính là khả năng phân rã phóng xạ của proton. Một thí nghiệm tiêu biểu để ghi nhận phân rã proton là dựng một bể lớn chứa nước và đặt các thiết bị trong đó để ghi nhận bức xạ Čerenkov sinh ra bởi sản phẩm của phân rã proton.

(a) Giả sử bạn đã xây dựng được một bể chứa 10000 tấn nước. Nếu thời gian sống trung bình của proton τ_p là 10^{32} năm thì trong một năm bạn dự tính

sẽ ghi nhận được bao nhiêu phân rã proton? Cho rằng hiệu suất của máy dò của bạn là 100% và tốc độ phân rã của proton tự do và proton trong hạt nhân là như nhau.

(b) Một phân rã proton có thể xảy ra là $p \to \pi^0 + e^+$. Pion π^0 trung hòa ngay sau đó (trong 10^{-16} s) bị phân rã thành hai photon $\pi^0 \to \gamma+\gamma$. Tính năng lượng cực đại và cực tiểu photon có thể đạt được nếu proton phân rã khi đứng yên. Cho các khối lượng: proton $m_p = 938$ MeV, positron $m_{e^+} = 0,51$ MeV, pion trung hòa $m_{\pi^0} = 135$ MeV.

(*CUSPEA*)

Lời giải:

(a) Mỗi phân tử H_2O có 10 proton và 8 nơtron khối lượng phân tử là 18. Số lượng proton trong 10^4 tấn nước là

$$N = \frac{10}{18} \times 10^7 \times 10^3 \times 6,02 \times 10^{23} = 3,34 \times 10^{33} ,$$

trong đó số Avogadro là $N_0 = 6,02 \times 10^{23}$ mol^{-1}. Số phân rã dự tính thu được trong một năm là

$$\Delta N = \frac{3 \cdot 34}{\tau_p} \times 10^{33} = \frac{3,34 \times 10^{33}}{10^{32}} = 33,4/\text{năm} .$$

(b) Trong hệ quy chiếu đứng yên của proton, định luật bảo toàn năng lượng và động lượng cho ta

$$M_p = E_{\pi^0} + E_{e^+} ,$$

$$p_{\pi^0} = p_{e^+} .$$

Với $E^2 = M^2 + p^2$, ta có

$$E_\pi = \frac{M_p^2 + M_\pi^2 - M_e^2}{2M_p}$$

$$= \frac{938^2 + 135^2 - 0,5^2}{2 \times 938} = 479 \text{ MeV} .$$

Trong hệ quy chiếu đứng yên của π^0 năng lượng và động lượng của mỗi γ là

$$E' = p' = \frac{M_\pi}{2} .$$

π^0 có thừa số Lorentz và vận tốc là

$$\gamma_\pi = \frac{479}{135} = 3,548\,,$$

$$\beta_\pi = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_\pi^2}} = 0,9595\,.$$

Dùng phép biến đổi Lorentz chuyển từ hệ quy chiếu đứng yên của π^0 sang hệ quy chiếu phòng thí nghiệm ta có

$$E_\gamma = \gamma_\pi(E' + \beta_\pi p' \cos\theta') = \frac{M_\pi}{2}\gamma_\pi(1 + \beta_\pi \cos\theta') = \frac{E_\pi}{2}(1 + \beta_\pi \cos\theta')$$

Biểu thức này chỉ ra rằng trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm photon sẽ có năng lượng cực đại (tại $\theta' = 0$)

$$(E_\gamma)_{\max} = \frac{E_\pi}{2}(1 + \beta_\pi) = \frac{479}{2}(1 + 0,9595) = 469,3 \text{ MeV}\,,$$

và năng lượng cực tiểu ($\theta' = 180°$)

$$(E_\gamma)_{\min} = \frac{E_\pi}{2}(1 - \beta_\pi) = \frac{479}{2}(1 - 0,9595) = 9,7 \text{ MeV}\,.$$

4061

Xét một pion chuyển động với năng lượng phòng thí nghiệm là E_π phân rã theo kiểu $\pi \to \mu + \nu_\mu$. Trong hệ quy chiếu khối tâm, hạt muyon có độ xoắn là $h = \frac{\mathbf{s}\cdot\boldsymbol{\beta}}{s\beta}$ bằng 1, trong đó s là spin của muyon. Với E_π cho trước tồn tại duy nhất một năng lượng phòng thí nghiệm của muon $E_\mu^{(0)}$ sao cho trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm muyon có độ xoắn trung bình bằng 0.

(a) Tìm mối liên hệ giữa E_π và $E_\mu^{(0)}$.

(b) Trong giới hạn phi tương đối tính, tìm giá trị nhỏ nhất của E_π sao cho trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm muyon có thể nhận độ xoắn bằng 0.

(*Columbia*)

Lời giải:

(a) Xét vectơ spin bốn chiều của muyon sinh ra từ phân rã $\pi \to \mu + \nu$. Trong hệ quy chiếu đứng yên của muyon, vectơ đó là

$$S_\alpha = (\mathbf{S}, iS_0)\,,$$

Trong đó S là spin muyon và $S_0 = 0$.

Bây giờ hãy xét vectơ spin bốn chiều trong hệ quy chiếu đứng yên của pion, Σ_π, muyon sẽ có các tham số γ_μ, β_μ và ta có

$$S'_\alpha = (\mathbf{S}', iS'_0)$$

với

$$\mathbf{S}' = \mathbf{S} + (\gamma_\mu - 1)\mathbf{S} \cdot \hat{\boldsymbol{\beta}}_\mu \hat{\boldsymbol{\beta}}_\mu ,$$
$$S'_0 = \gamma_\mu(S_0 + \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\beta}_\mu) = \gamma_\mu \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\beta}_\mu = \gamma_\mu S \beta_\mu h_\mu .$$

Trong hệ Σ_π ta có

$$h_\mu = \frac{\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\beta}_\mu}{S\beta_\mu} = 1 ,$$

và vì vậy $\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\beta}_\mu = S\beta_\mu$, có nghĩa là $\mathbf{S} // \boldsymbol{\beta}_\mu$. Theo đó

$$\mathbf{S}' = \mathbf{S} + (\gamma_\mu - 1)S\beta_\mu^{-1}\boldsymbol{\beta}_\mu ,$$
$$S'_0 = \gamma_\mu S \beta_\mu .$$

Tiếp theo ta chuyển từ Σ_π sang hệ phòng thí nghiệm Σ, trong đó pion có các tham số γ_π, β_π, tham số của muyon là γ, β. Khi đó ta có

$$S_\alpha^{\text{Lab}} = (\mathbf{S}'', iS''_0) ,$$

Trong đó

$$S''_0 = \gamma_\pi(\mathbf{S}'_0 + \boldsymbol{\beta}_\pi \cdot \mathbf{S}')$$
$$= \gamma_\pi[\gamma_\mu \beta_\mu S + \boldsymbol{\beta}_\pi \cdot \mathbf{S} + (\gamma_\mu - 1)(\boldsymbol{\beta}_\pi \cdot \boldsymbol{\beta}_\mu)S\beta_\mu^{-1}] .$$

Do $\mathbf{S} // \boldsymbol{\beta}_\mu$ nên

$$(\boldsymbol{\beta}_\pi \cdot \boldsymbol{\beta}_\mu)S\beta_\mu^{-1} = (\boldsymbol{\beta}_\pi \cdot \mathbf{S})\beta_\mu \beta_\mu^{-1} = \boldsymbol{\beta}_\pi \cdot \mathbf{S} ,$$

và

$$S''_0 = \gamma_\pi \gamma_\mu S(\beta_\mu^2 + \boldsymbol{\beta}_\pi \cdot \boldsymbol{\beta}_\mu)\beta_\mu^{-1} = \gamma\beta S h ,$$

với

$$h = \gamma_\pi \gamma_\mu \gamma^{-1} \beta^{-1} (\beta_\mu^2 + \boldsymbol{\beta}_\pi \cdot \boldsymbol{\beta}_\mu)\beta_\mu^{-1} .$$

Khi năng lượng muyon bằng $E_\mu^{(0)}$, $h = 0$, hay

$$\beta_\mu^2 = -\boldsymbol{\beta}_\pi \cdot \boldsymbol{\beta}_\mu .$$

Phép biến đổi Lorentz cho ta

$$\begin{aligned}\gamma &= \gamma_\pi \gamma_\mu (1 + \boldsymbol{\beta}_\pi \cdot \boldsymbol{\beta}_\mu) \\ &= \gamma_\pi \gamma_\mu (1 - \beta_\mu^2) = \frac{\gamma_\pi}{\gamma_\mu} .\end{aligned}$$

Do vậy ta có

$$E_\mu^{(0)} = m_\mu \gamma = \frac{m_\mu}{m_\pi} \frac{E_\pi}{\gamma_\mu} .$$

Xét phân rã trong hệ π đứng yên. Định luật bảo toàn năng lượng và động lượng cho ta

$$\mathbf{p}_\nu + \mathbf{p}_\mu = 0 , \qquad \text{hay} \qquad p_\nu = p_\mu ,$$

$$E_\nu = m_\pi - E_\pi .$$

Kết hợp lại ta có

$$E_\mu = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi} ,$$

hay ta thu được

$$\gamma_\mu = \frac{E_\mu}{m_\mu} = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi m_\mu} .$$

Do vậy ta có

$$E_\mu^{(0)} = \frac{m_\mu}{m_\pi} \cdot \frac{2m_\pi m_\mu}{m_\pi^2 + m_\mu^2} E_\pi = \frac{2m_\mu^2}{m_\pi^2 + m_\mu^2} E_\pi .$$

(b) Để độ xoắn của muyon $h = 0$ trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm ta cần

$$\boldsymbol{\beta}_\pi \cdot \boldsymbol{\beta}_\mu = -\beta_\mu^2 ,$$

hay

$$\beta_\pi \cos\theta = -\beta_\mu .$$

Có nghĩa là

$$\beta_\pi \geq \beta_\mu , \qquad \text{hay} \qquad \gamma_\pi \geq \gamma_\mu .$$

Do vậy năng lượng nhỏ nhất mà pion cần có là

$$(E_\pi)_{\min} = \gamma_\mu m_\pi = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\mu} .$$

2. TƯƠNG TÁC GIỮA BỨC XẠ VÀ VẬT CHẤT (4062–4085)

4062

Một muyon mang năng lượng trong vật chất mất năng lượng chủ yếu là do va chạm với

(a) các nucleon.

(b) hạt nhân.

(c) electron.

(CCT)

Lời giải:

Một muyon mất năng lượng trong vật chất chủ yếu là do va chạm với electron, truyền một phần động năng cho electron, làm cho electron có thể nhảy lên mức năng lượng cao hơn hoặc bứt ra khỏi nguyên tử làm cho nguyên tử bị ion hóa.

Do đó câu trả lời là (c).

4063

Một chùm muyon âm có thể bị chặn lại trong vật chất bởi vì

(a) Muyon có thể bị biến thành một electron khi phát ra một photon.

(b) Muyon có thể bị hấp thụ bởi một proton làm cho proton này chuyển sang trang thái kích thích.

(c) Bị giam cầm trong trong quỹ đạo quanh hạt nhân nguyên tử.

(CCT)

Lời giải:

Một μ^- có thể bị giữ trong quỹ đạo quanh hạt nhân hình thành một nguyên tử μ. Nó cũng có thể phân rã thành một electron và hai nơtrino (γ_μ, $\bar{\nu}_e$) nhưng

không thể là một electron và một photon. Do đó câu trả lời là (c).

4064

Sau khi đi qua một độ dài bức xạ, một electron năng lượng 1 GeV đã bị mất đi năng lượng ban đầu của nó là

(a) 0,368 GeV

(b) 0

(c) 0,632 GeV.

(CCT)

Lời giải:

Dựa vào định nghĩa $E = E_0 e^{-x/\lambda}$, với λ là độ dài bức xạ. Ta có $x = \lambda$, $E = E_0 e^{-1} = 0,368$ GeV. Năng lượng mất mát là $\Delta E = 1 - 0,368 = 0,632$ GeV. Câu trả lời là (c).

4065

Một proton tương đối tính mất đi năng lượng bằng 1,8 MeV khi đi xuyên qua chất nhấp nháy dày 1cm. Cơ chế nào sau đây gần như chắc chắn xảy ra nhất?

(a) Ion hóa, kích thích.

(b) Hiệu ứng Compton.

(c) Quá trình tạo cặp.

(CCT)

Lời giải:

Khi một proton tương đối tính đi qua một môi trường, năng lượng mất mát do ion hóa và kích thích là $-dE/dx \approx$ 1–2 MeV/g cm^{-2}. Khối lượng riêng của chất nhấp nháy là $\rho \approx 1$ g cm^{-3}, do đó $dx = 1$ g cm^{-2}. Tốc độ mất mát năng lượng là $-\frac{dE}{dx} = 1,8$ MeV/g cm^{-2} điều này phù hợp với tốc độ mất năng lượng

do ion hóa. Do vậy câu trả lời là (a).

4066

Năng lượng mất mát trung bình trên g/cm^2 của một hạt mang điện tương đối tính trong vật chất là cỡ

(a) 500 eV.

(b) 10 KeV.

(c) 2 MeV.

(*CCT*)

Lời giải:

Do $dE/dx \approx (1 \sim 2)$ MeV/g cm $^{-2}$, nên câu trả lời là (c).

4067

Năng lượng tới hạn của một electron là năng lượng mà khi đó

(a) mất mát do bức xạ bằng mất mát do ion hóa

(b) electron ion hóa một nguyên tử

(c) đạt tới ngưỡng của phản ứng hạt nhân.

(*CCT*)

Lời giải:

Năng lượng tới hạn được định nghĩa là năng lượng mà khi đó mất mát do bức xạ bằng mất mát do ion hóa. Câu trả lời là (a).

4068

Sự hỗn loạn của các ion nặng ở năng lượng thấp chủ yếu là kết quả của

(a) động lượng hữu hạn

(b) trạng thái thăng giáng của sự ion hóa

(c) tán xạ kép. *(CCT)*

Lời giải:

Tán xạ kép làm thay đổi chiều chuyển động của một ion, do đó làm cho nó bị nhiễu loạn. Do vậy câu trả lời là (c).

4069

Tên gọi "Fermi plateau" (cao nguyên Fermi) là dùng cho

(a) một hiệu ứng mật độ

(b) sự co ngắn Lorrentz

(c) sự tăng khối lượng tương đối tính. *(CCT)*

Lời giải:

Với thừa số $\gamma \approx 3$, tốc độ tiêu hao năng lượng do ion hóa là $dE/dx \approx (dE/dx)_{\min}$. Với $\gamma > 3$, do nó tỉ lệ loga với năng lượng nên dE/dx chỉ tăng chậm khi γ tăng. Cuối cùng ta có $\frac{dE}{dz} \approx$ hằng số khi $\gamma > 10$ đối với môi trường đặc (rắn hoặc lỏng), và khi $\gamma > 100$ đối với môi trường loãng (khí), do tác dụng của mật độ electron. Phần nằm ngang trong đồ thị $\frac{dE}{dx}$ theo E được gọi là "Fermi plateau" (cao nguyên Fermi). Do đó câu trả lời là (a).

4070

Xác suất mất mát năng lượng bằng E' trong khoảng dE' của một hạt mang điện với năng lượng E và vận tốc v trong một va chạm đơn tỉ lệ với

(a) $\frac{E'}{E}dE'$.

(b) EdE'.

(c) $(\frac{1}{vE'})^2dE'$.

(CCT)

Lời giải:

Lấy việc va chạm với các electron làm ví dụ. Đối với một va chạm đơn, năng lượng mất mát của một hạt có điện tích Ze chỉ phụ thuộc vào vận tốc v và hệ số va chạm b : $E' = \frac{2Z^2e^4}{m_0v^2b^2}$, với m_0 khối lượng electron. Do vậy ta có $dE' = -\frac{4Z^2e^4}{m_0v^2b^3}db = -A\frac{db}{v^2b^3}$, trong đó $A = \frac{4Z^2e^4}{m_0}$ là một hằng số.

Giả sử các electron phân bố đều trong môi trường. Khi đó xác suất va chạm với một electron với hệ số va chạm trong khoảng từ b đến $b + db$ là

$$d\sigma = 2\pi b|db| = \frac{2\pi v^2 b^4}{A} dE' = \frac{\pi A dE'}{2(vE')^2} \propto \frac{dE'}{(vE')^2}\,.$$

Do vậy câu trả lời là (c).

4071

Tán xạ của một hạt tích điện trong vật chất chủ yếu là do tương tác với

(a) các electron

(b) hạt nhân

(c) các hạt quac.

(*CCT*)

Lời giải:

Trong khi đi qua một môi trường, một hạt mang điện chịu sự tương tác Coulomb với cả electron và hạt nhân. Tuy nhiên, mặc dù các va chạm với electron là nhiều hơn nhưng việc truyền động năng cho mỗi electron lại rất nhỏ. Chỉ có va chạm với hạt nhân mới tác động đáng kể tới sự tán xạ của các hạt.

Do vậy câu trả lời là (b).

4072

Góc tán xạ trung bình của một hạt mang điện trong vật chất có độ dày x tăng tỉ lệ với

(a) x^2.

(b) $x^{1/2}$.

(c) x.

(*CCT*)

Lời giải:

Góc lệch trung bình của một hạt có điện tích Ze khi đi qua vật có độ dày

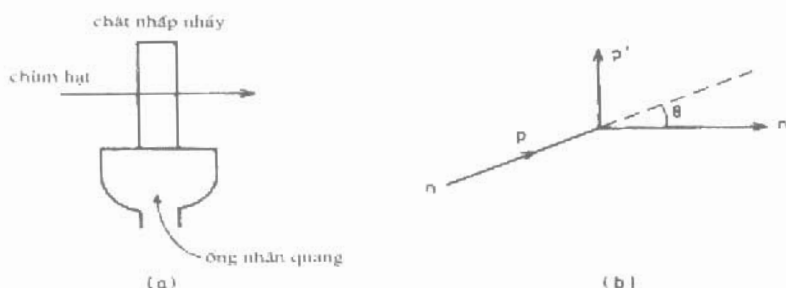
x là $|\theta| - \frac{KZ\sqrt{x}}{pv} \propto x^{1/2}$, trong đó K là một hằng số. Do vậy câu trả lời là (b).

4073

Xét một chất dẻo nhấp nháy dày 2 cm được gắn trực tiếp vào một bộ nhân quang có bội số là 10^6. Một chùm hạt 10GeV bay tới chất nhấp nháy như trong hình 4.8(a).

(a) Nếu chùm hạt là muon, ước tính điện tích thu được trên anốt của ống nhân quang.

(b) Giả sử có thể phát hiện được tín hiệu trên anốt nhỏ cỡ 10^{-12} Coulomb. Nếu chùm hạt là nơtron, ước tính góc nhỏ nhất trong phòng thí nghiệm sao cho khi tán xạ đàn hồi với proton trong chất nhấp nháy mà vẫn có thể thu được tín hiệu.



Hình 4.8

(c) Câu hỏi giống như trong câu (b) nhưng trong chùm hạt tán xạ đàn hồi với hạt nhân cacbon.

(*Chicago*)

Lời giải:

(a) Từ đường cong tiêu hao năng lượng do ion hóa, ta thấy rằng hạt muyon năng lượng 10 GeV sẽ bị mất 4 MeV trong chất nhấp nháy dày 2 cm. Một cách gần đúng, trong chất nhấp nháy dẻo, để tạo ra một photon cần 100 eV. Do đó năng lượng này sẽ tạo ra $N_{\text{ph}} \approx 4 \times 10^4$ photon trong chất nhấp nháy. Giả sử rằng khoảng 50% photon cấp cho ống nhân quang và khoảng 10% trong số đó làm bật electron ra khỏi catot. Khi đó số lượng electron được phát ra là $N_{\text{pe}} = 2 \times 10^3$. Với bội số 10^6, điện tích thu được trên anot sẽ là $Q = 2 \times 10^9 e = 3,2 \times 10^{-10}$ C.

(b) Hình 4.8(b) cho thấy một nơtron bị tán xạ dưới một góc nhỏ θ trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm. Động lượng của nó thay đổi một lượng $p\theta$ vuông góc với phương chuyển động. Đây chính là động lượng giật lùi của hạt nhân. Do vậy động năng nó nhận được là

$$\frac{p^2\theta^2}{2m},$$

với m là khối lượng của hạt nhân. Do năng lượng mất mát 4 MeV tương ứng với điện tích anot là $3,2 \times 10^{-10}$C nên từ ngưỡng đo bằng 10^{-12} C ta suy ra rằng năng lượng nhỏ tới 12,5 KeV vẫn có thể đo được. Do vậy, trong phòng thí nghiệm, góc tán xạ nhỏ nhất θ_{min} có thể đo được tính theo công thức

$$\theta^2_{\text{min}} = \frac{2m_p}{p_n^2} \times 12,5 \times 10^3 = \frac{2 \times 10^9}{(10^{10})^2} \times 12,5 \times 10^3 = 2,5 \times 10^{-7} \text{ rad}^2,$$

thay số ta được

$$\theta_{\text{min}} = 5,0 \times 10^{-4} \text{ rad},$$

trong đó giả thiết hạt nhân là một proton.

(a) Nếu hạt nhân tán xạ là cacbon, khi đó ta có

$$\theta^2_{\text{min}} = \frac{2m_c}{p_n^2} \times 12,5 \times 10^3 = \frac{2 \times 12 \times 10^9}{(10^{10})^2} \times 12,5 \times 10^3 = 3,0 \times 10^{-6} \text{ rad}^2,$$

thay số ta được

$$\theta_{\text{min}} = 1,73 \times 10^{-3} \text{ rad}.$$

4074

Trong một giây có bao nhiêu photon nhìn thấy (~ 5000 Å) được phát ra từ một bóng đèn dây tóc 100 W hiệu suất 3% ?

(a) 10^{19}.

(b) 10^9.

(c) 10^{33}.

(CCT)

Lời giải:

Mỗi photon có $\lambda = 5000$ Å thì năng lượng là

$$E = h\nu = hc/\lambda = \frac{2\pi \times 197 \times 10^{-7}}{5000 \times 10^{-8}} = 2,5 \text{ eV}.$$

Do vậy số lượng photon là

$$N = \frac{W}{E} = \frac{100 \times 0,03}{2,5 \times 1,6 \times 10^{-19}} = 0,75 \times 10^{19} \approx 10^{19}\,.$$

Vậy câu trả lời là (a).

4075

Ước tính sự suy giảm (hấp thụ/tán xạ) của một chùm tia X năng lượng 50 keV khi đi qua một lớp mô dày 1 cm trong cơ thể con người (không có xương).

(*Columbia*)

Lời giải:

Do cơ thể con người chủ yếu là nước, nên ta lấy gần đúng khối lượng riêng của nó là khối lượng riêng của nước, $\rho \approx 1$ g/cm^3. Nói chung, hệ số hấp thụ của tia X 50 keV khoảng 0,221 cm^2/g. Khi đó sự suy giảm do đi qua một lớp mô dày 1cm (độ dày = 1 cm × 1 g cm^{-3} = 1 g cm^{-2}) là

$$1 - \exp(-0,221 \times 1) = 0,20 = 20\%\,.$$

4076

Các photon năng lượng 0,3 eV, 3 eV, 3 keV, và 3 MeV đập tới vật. Tương tác nào sẽ có vai trò quan trọng? Nối một hay nhiều tương tác với mỗi mức năng lượng.

0,3 eV	(a) Tạo cặp	(e) Ion hoá nguyên tử
3 eV	(b) Hiệu ứng quang điện	(f) Tán xạ Raman (kích thích quay và dao động)
3 keV	(c) Tán xạ Compton	
3 MeV	(d) Tán xạ Rayleigh	

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Trong vùng 0,3 eV tán xạ Raman là quan trọng. Ion hóa nguyên tử, tán xạ Rayleigh và tán xạ Raman là quan trọng trong vùng 3 eV. Hiệu ứng quang

điện tác dụng lớn trong vùng 3 keV. Trong vùng 3 MeV, tán xạ Compton và tạo cặp hoạt động chủ yếu.

4077

Hãy trình bày về tương tác giữa bức xạ gama với năng lượng photon nhỏ hơn 10 MeV và vật chất. Liệt kê các loại tương tác quan trọng cho từng vùng năng lượng; Mô tả tính vật lý của mỗi tương tác và phác thảo đóng góp tương đối của mỗi loại tương tác theo tiết diện toàn phần như là hàm của năng lượng.

(*Columbia*)

Lời giải:

Photon với năng lượng nhỏ hơn 10 MeV tương tác với vật chất chủ yếu thông qua hiệu ứng quang điện, tán xạ Compton và tạo cặp.

(1) *Hiệu ứng quang điện*: Một hạt photon chuyển toàn bộ năng lượng của nó cho một electron giam cầm trong một nguyên tử, tách nó ra và cung cấp cho nó một động năng $E_e = E_\gamma - E_b$, trong đó E_γ là năng lượng của photon và E_b là năng lượng liên kết của electron. Tuy nhiên định luật bảo toàn động lượng không cho phép một electron tự do trở thành một electron quang điện bằng cách hấp thụ toàn bộ năng lượng của photon. Trong hiệu ứng quang điện, định luật bảo toàn động lượng phải được thỏa mãn nhờ sự giật lùi của hạt nhân giam cầm electron. Quá trình này thường diễn ra với một electron nằm phía trong nguyên tử (chủ yếu là electron lớp K và L). Tiết diện $\sigma_{p-e} \propto Z^5$, trong đó Z là điện tích hạt nhân của môi trường. Nếu $\varepsilon_K < E_\gamma < 0,5$ MeV, thì $\sigma_{p-e} \propto E_\gamma^{-\frac{7}{2}}$, trong đó ε_K là năng lượng liên kết của electron lớp K. Nếu $E_\gamma > 0,5$ MeV thì $\sigma_{p-e} \propto E_\gamma^{-1}$. Do vậy hiệu ứng quang điện có tác dụng mạnh trong vùng năng lượng thấp và vật liệu có Z lớn.

(2) *Tán xạ Compton*: Một photon bị tán xạ bởi electron đứng yên, năng lượng của electron và photon tán xạ được xác định bởi định luật bảo toàn năng lượng và động lượng như sau

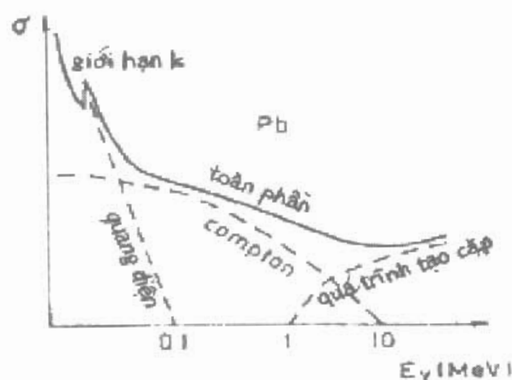
$$E_e = E_\gamma \left[1 + \frac{mc^2}{E_\gamma(1-\cos\theta)}\right]^{-1},$$

$$E_{\gamma'} = E_\gamma \left[1 + \frac{E_\gamma}{mc^2}(1-\cos\theta)\right]^{-1},$$

trong đó m là khối lượng electron, E_γ là năng lượng của photon tới, và θ là

góc tán xạ của photon so với chiều chuyển động ban đầu. Tiết diện tán xạ là $\sigma_c \propto ZE_\gamma^{-1}\ln E_\gamma$ (nếu $E_\gamma > 0,5$ MeV).

(3) *Tạo cặp*: Nếu $E_\gamma > 2m_ec^2$, một photon có thể sinh ra một cặp positron-electron trong trường hạt nhân. Động năng của cặp positron-electron được cho bởi $E_{e^+} + E_{e^-} = E_\gamma - 2m_ec^2$. Trong vùng năng lượng thấp, $\sigma_{e^+e^-}$ tăng khi E_γ tăng, trong khi ở vùng năng lượng cao, nó gần như là hằng số. Hình 4.9 chỉ ra tiết diện tương đối của chì đối với sự hấp thu tia γ như một hàm của E_γ. Ta thấy rằng với $E_\gamma \gtrsim 4$ MeV, quá trình tạo cặp sẽ là chủ đạo, trong khi với năng lượng thấp, hiệu ứng quang điện và hiệu ứng Compton có vai trò quan trọng. Hiệu ứng Compton bắt đầu quan trọng từ vùng năng lượng vài trăm keV tới vài MeV.



Hình 4.9

4078

Các nơtron nhanh có thể phát hiện nhờ việc quan sát sự nhấp nháy gây ra bởi các proton giật lùi trong các hydrocacbon nào đó (trong suốt về mặt quang học). Cho rằng ta có một tấm chất nhấp nháy dày 5 cm chứa mật độ nguyên tử H và C như nhau, chẳng hạn 4×10^{22} nguyên tử/cm^3 đối với mỗi loại.

(a) Tìm tỉ lệ nơtron năng lượng ~ 5 MeV bay tới và đi xuyên qua tấm vật liệu nhấp nháy mà không tương tác với hạt nhân C hay H?

(b) Tìm tỉ lệ nơtron tạo ra các proton giật lùi. [Cho rằng $\sigma_H = 1,5$ bac, $\sigma_C = 1,0$ bac. Chú ý: 1 bac = 10^{-24} cm^2.]

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Kí hiệu số nơtron là N. Số lượng nơtron sẽ giảm ΔN sau khi đi qua đoạn Δx trong chất nhấp nháy, độ giảm này cho bởi

$$\Delta N = -N(\sigma_H n_H + \sigma_C n_C)\Delta x\,,$$

trong đó n là mật độ của hạt nhân trong chất nhấp nháy. Sau khi đi hết khoảng cách d, số lượng nơtron không chịu một tương tác nào là

$$N = N_0 \exp[-(\sigma_H n_H + \sigma_C n_C)d]\,,$$

từ đó suy ra

$$\eta = N/N_0 = \exp[-(1,5+1,0)\times 10^{-24}\times 4\times 10^{22}\times 5]$$
$$= e^{-0,5} = 60,5\%\,.$$

(b) Tỉ lệ nơtron tới có ít nhất một tương tác với hạt nhân chất nhấp nháy là

$$\eta' = 1-\eta = 39,5\%\,.$$

Trong đó chỉ có những nơtron tương tác với proton là tạo ra các proton giật lùi. Do vậy tỉ lệ nơtron sinh ra proton giật lùi là

$$\eta'' = \eta' \cdot \frac{1,5}{1,5+1,0} = \frac{3}{5}\eta' = 23,7\%\,.$$

4079

Quãng đường tự do trung bình của nơtron trong chì là khoảng 5 cm. Tìm tiết diện nơtron toàn phần của chì. (Số khối nguyên tử ~ 200, khối lượng riêng ~ 10 g/cm^3).

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Số nguyên tử Pb trong một đơn vị thể tích là

$$n = \frac{\rho}{A}\times N_0 = \frac{10}{200}\times 6,022\times 10^{23} = 3,01\times 10^{22}\ \text{cm}^{-3}\,.$$

Quãng đường tự do trung bình của nơtron trong chì là $l = 1/(n\sigma)$, trong đó σ là tiết diện tương tác giữa nơtron và chì. Do đó ta có

$$\sigma = \frac{1}{nl} = \frac{1}{3,01 \times 10^{22} \times 5} = 6,64 \times 10^{-24}\ \text{cm}^2 = 6,64\ b\,.$$

4080

Người ta muốn làm giảm cường độ chùm nơtron chậm xuống còn 5% giá trị ban đầu bằng cách chắn chùm nơtron bằng một tấm Cd (khối lượng nguyên tử 112, khối lượng riêng $8,7 \times 10^3$ kg/m^3). Tiết diện hấp thụ của Cd là 2500 bac. Tìm độ dày cần thiết của tấm Cd.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Cường độ của chùm nơtron sau khi đi qua tấm Cd với độ dày t được cho bởi $I(t) = I_0 e^{-n\sigma t}$, trong đó I_0 là cường độ ban đầu, n là mật độ nguyên tử Cd, và σ là thiết diện hấp thụ. Do

$$n = \frac{\rho N_0}{A} = \frac{8,7}{112} \times 6,022 \times 10^{23} = 4,7 \times 10^{22}\ \text{cm}^{-3}\,,$$

nên độ dày cần thiết của tấm Cd là

$$t = \frac{1}{n\sigma} \ln \frac{I_0}{I(t)} = \frac{1}{4,7 \times 10^{22} \times 2500 \times 10^{-24}} \ln \frac{1}{0,05} = 0,025\ \text{cm}\,.$$

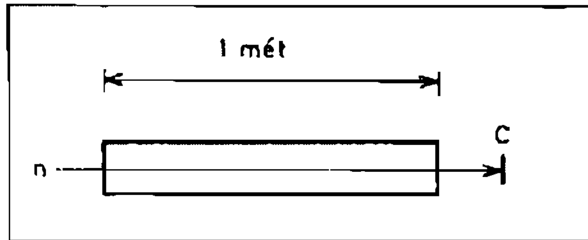
4081

Một chùm nơtron đi qua một bia hydro (mật độ 4×10^{22} nguyên tử/cm^3) và được đo bằng một bộ đếm C như trình bày trong hình 4.10. Với cùng một thông lượng chùm tới, C ghi được $5,0 \times 10^5$ lần khi không có bia, và $4,6 \times 10^5$ khi có bia chứa đầy hydro. Hãy ước tính tiết diện tán xạ n-p toàn phần và sai số thống kê của nó.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Gọi tiết diện tương tác n-p toàn phần là σ. Sau khi đi qua bia hydro, số lượng nơtron giảm từ N_0 xuống $N_0 e^{-n\sigma t}$, trong đó $n = 4 \times 10^{22}$ cm^{-3} là nồng



Hình 4.10

độ nguyên tử của bia. Gọi số nơtron đo được khi không có và có bia hydro lần lượt là N', N'' và η là hiệu suất đếm nơtron của C. Khi đó ta có

$$N' = \eta N_0 . \qquad N'' = \eta N_0 e^{-n\sigma t} = N' e^{-n\sigma t} .$$

và vì vậy

$$N''/N' = e^{-n\sigma t} ,$$

từ đó suy ra tiết diện tương tác n-p là

$$\sigma = \frac{1}{nt} \ln \frac{N'}{N''} = \frac{1}{4 \times 10^{22} \times 100} \ln \frac{5 \times 10^5}{4,6 \times 10^5} = 2.08 \times 10^{-26} \text{ cm}^2 .$$

Để tính sai số thống kê của σ ta để ý rằng

$$\Delta\sigma = \frac{\partial\sigma}{\partial N'}(\Delta N') + \frac{\partial\sigma}{\partial N'}(\Delta N') ,$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial N'} = \frac{1}{ntN'} ,$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial N''} = -\frac{1}{ntN''} .$$

$$\Delta N' = \sqrt{N'} , \qquad \Delta N'' = \sqrt{N''} .$$

Do đó

$$(\Delta\sigma)^2 = \left(\frac{\partial\sigma}{\partial N'}\right)^2 (\Delta N')^2 + \left(\frac{\partial\sigma}{\partial N''}\right)^2 (\Delta N'')^2 = \frac{1}{(nt)^2}\left(\frac{1}{N'} + \frac{1}{N''}\right) ,$$

hay ta có sai số

$$\Delta\sigma = \frac{1}{(nt)}\sqrt{\frac{1}{N'} + \frac{1}{N''}} = \frac{1}{4 \times 10^{22} \times 100}\sqrt{\frac{1}{4,6 \times 10^5} + \frac{1}{5 \times 10^5}}$$

$$\approx 5 \times 10^{-28} \text{ cm}^2 .$$

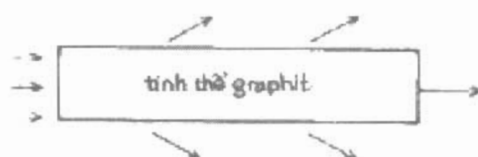
Và vì vậy ta có

$$\sigma = (2,08 \pm 0.05) \times 10^{-26}\ \text{cm}^2 = (20.8 \pm 0,5)\ \text{mb}\,.$$

4082

Một chùm nơtron mang năng lượng với phổ năng lượng rộng bay tới theo phương của trục của một thanh graphit tinh thể dài, xem hình 4.11. Người ta phát hiện ra rằng các nơtron vận tốc nhanh hơn đi ra khỏi các mặt bên của thanh đó nhưng chỉ có nhưng nơtron chậm mới đi ra khỏi đầu kia. Giải thích ngắn gọn hiện tượng này và tính vận tốc cực đại của các nơtron đi ra khỏi thanh than chì. Không dùng kí hiệu trong kết quả.

(*Columbia*)



Hình 4.11

Lời giải:

Tinh thể graphit là một bộ lọc nơtron lạnh. Các nơtron năng lượng cao sẽ bị đổi hướng do tán xạ đàn hồi với các hạt nhân trong tinh thể than chì và cuối cùng sẽ đi ra khỏi thanh. Do tính chất sóng của chúng nên nếu bước sóng của nơtron tương thích với kích thước mạng tinh thể sẽ xuất hiện sự giao thoa với góc nhiễu xạ θ thỏa mãn định luật Bragg

$$m\lambda = 2d\sin\theta\,, \qquad \text{với } m = 1,2,3,\ldots.$$

Cụ thể với $\lambda > 2d$, sẽ không có sự tán xạ kết hợp trừ $\theta = 0$. Với $\theta = 0$, các nơtron có thể đi qua tinh thể mà không bị lệch. Hơn nữa, do tiết diện hấp thu nơtron của than chì rất nhỏ, nên sự suy giảm là rất nhỏ với các nơtron có $\lambda > 2d$. Graphit là chất đa tinh thể có định hướng mạng tinh thể không đều. Nơtron năng lượng cao sẽ bị đổi hướng do tán xạ đàn hồi và các nơtron nóng bị đổi hướng do tán xạ Bragg với các tinh thể nhỏ theo các hướng khác nhau. Cuối cùng tất cả đều đi ra khỏi thanh than chì qua các mặt bên. Chỉ có nơtron

lạnh với bước sóng $\lambda > 2d$ mới có thể đi xuyên qua thanh đó mà không bị cản trở. Với than chì ta có $\lambda > 2d = 6,69$ Å. Vận tốc cực đại của những nơtron lạnh này là

$$v_{\max} = \frac{p}{m} = \frac{h}{m\lambda} = \frac{2\pi\hbar c^2}{\lambda mc^2} = \frac{2\pi \times 197 \times 10^{-13} \times 3 \times 10^{10}}{6,69 \times 10^{-8} \times 940}$$

$$= 0,59 \times 10^5 \text{ cm}/s = 590\ m/s\,.$$

4083

Quãng đường tự do trung bình của các nơtrino-electron 3 MeV trong vật chất là giá trị nào sau đây

$$10, 10^7, 10^{17}, 10^{27}\ g/\text{cm}^2\,.$$

(*Columbia*)

Lời giải:

Tiết diện tương tác giữa nơtrino và vật chất là $\sigma \approx 10^{-41}$ cm^2, và thông thường mật độ nguyên tử của vật chất là $n \approx 10^{23}$ cm^{-3}, khối lượng riêng của vật chất $\rho \approx 1$ g/cm^3. Do vậy quãng đường tự do trung bình của nơtrino trong vật chất là $1 = \rho/n\sigma \approx 10^{18}$ g/cm^2. Câu trả lời thứ 3 là đúng.

4084

Bức xạ Čerenkov được phát ra bởi hạt mang điện năng lượng cao chuyển động qua một môi trường với tốc độ lớn hơn vận tốc của sóng điện từ truyền qua môi trường đó.

(a) Rút ra mối liên hệ giữa vận tốc hạt $v = \beta c$, hệ số khúc xạ n của môi trường, và góc θ phát ra bức xạ Čerenkov so với phương chuyển động của hạt.

(b) Hydro ở áp suất 1 atmophe và 20°C có hệ số khúc xạ là $n = 1 + 1,35 \times 10^{-4}$. Tìm động năng cực tiểu (MeV) mà một electron (khối lượng 0,5 MeV/c^2) cần để phát ra bức xạ Čerenkov khi đi qua môi trường khí hydro ở 20°C và 1 atmotphe?

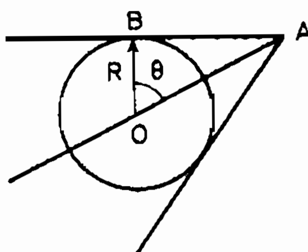
(c) Một đầu dò hạt bức xạ Čerenkov được chế tạo bằng cách lắp một hệ quang học có khả năng thu nhận ánh sáng và đo góc phát xạ θ với độ chính xác $\delta\theta = 10^{-3}$ radian vào một ống dài chứa khí hydro ở nhiệt độ 20°C và áp suất

một atmotphe. Một chùm hạt mang điện với động lượng 100 GeV/c được cho đi qua bộ đếm. Do động lượng đã biết nên phép đo góc Čerenkov trong thực tế, là phép đo khối lượng nghỉ m_0. Với hạt có khối lượng m_0 gần 1 GeV/c^2, tính tới đại lượng nhỏ bậc nhất, xác định sai số tỉ đối ($\delta m_0/m_0$) trong việc xác định m_0 bằng bộ đếm Čerenkov?

(*CUSPEA*)

Lời giải:

(a) Hình 4.12 mô tả tiết diện của một mặt sóng Čerenkov thông thường. Giả sử hạt đi từ O tới A trong t giây. Bức xạ được phát ra tại O tạo thành một mặt cầu tâm tại O và bán kính $R = ct/n$. Mặt đầu sóng bức xạ Čerenkov tiếp xúc với tất cả các mặt cầu trên, là một mặt nón. Trong tam giác AOB, OB = R $= ct/n$, OA $= vt = \beta ct$, và vì vậy $\cos\theta$ = OB/OA $= 1/(n\beta)$.



Hình 4.12

(b) Do $\cos\theta = \frac{1}{n\beta}$, ta cần có

$$\beta \geq \frac{1}{n}.$$

Do vậy

$$\beta_{\min} = \frac{1}{n} = \frac{1}{1 + 1,35 \times 10^{-4}} \approx 1 - 1,35 \times 10^{-4},$$

và ta có

$$\gamma_{\min} = \frac{1}{\sqrt{(1+\beta)(1-\beta)}} \approx \frac{1}{\sqrt{2 \times 1,35 \times 10^{-4}}} = 60,86.$$

Do đó động năng cần thiết cho electron là

$$T = (\gamma - 1)mc^2 = 59,86 \times 0,5 = 29,9 \text{ MeV}.$$

(c) Khối lượng nghỉ m_0c^2 được tính theo công thức (lấy $c = 1$)

$$m_0^2 = \frac{p^2}{(\gamma\beta)^2} = \frac{p^2(1-\beta^2)}{\beta^2} = \frac{p^2}{\beta^2} - p^2$$
$$= p^2n^2\cos^2\theta - p^2 .$$

Đạo hàm theo θ ta được

$$2m_0dm_0 = -2p^2n^2\cos\theta\sin\theta d\theta .$$

Do vậy

$$\delta m_0 = \frac{p^2n^2}{2m_0}\sin 2\theta\delta\theta .$$

Với $m_0 \approx 1$ GeV/c^2, $p = 100$ GeV/c, ta có

$$\gamma = \frac{\sqrt{p^2+m_0^2}}{m_0} = \sqrt{10^4+1} .$$

Vì vậy ta thu được

$$\cos\theta = \frac{1}{n\beta} = \frac{\gamma}{n\sqrt{\gamma^2-1}}$$
$$= \frac{\sqrt{10^4+1}}{(1+1,35\times10^{-4})\times10^2}$$
$$\approx \frac{1+0,5\times10^{-4}}{1+1,35\times10^{-4}}$$
$$\approx 1-0,85\times10^{-4}$$
$$\approx 1-\frac{\theta^2}{2} ,$$

suy ra

$$\theta^2 \approx 1,7\times10^{-4}$$

hay

$$\theta \approx 1,3\times10^{-2}\ \text{rad} .$$

Do θ là nhỏ nên ta có $\sin 2\theta \approx 2\theta$, và

$$\frac{\delta m_0}{m_0} = \frac{p^2n^2\theta}{m_0^2}\delta\theta$$
$$\approx 10^4\times1,3\times10^{-2}\times10^{-3} = 0,13 .$$

4085

Xét một proton có động lượng 1,0 GeV/c đi qua một chất khí có áp suất lớn. Hệ số khúc xạ của chất khí thay đổi theo áp suất.

(a) Tìm hệ số khúc xạ nhỏ nhất mà proton có thể phát ra bức xạ Čerenkov?

(b) Góc phát bức xạ Čerenkov là bao nhiêu khi hệ số khúc xạ của chất khí là 1,6? (Lấy khối lượng nghỉ của proton là 0,94 GeV/c^2).

(*Columbia*)

Lời giải:

(a) Proton có thừa số Lorentz là

$$\gamma = \frac{\sqrt{p^2 + m^2}}{m} = \frac{\sqrt{1 + 0,94^2}}{0,94} = 1,46$$

do đó vận tốc là

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 0,729 .$$

Để proton phát bức xạ Čerenkov ta cần

$$\frac{1}{n\beta} \leq 1 ,$$

hay

$$n \geq \frac{1}{\beta} = \frac{1}{0,729} = 1,37 .$$

(b)

$$\cos\theta = \frac{1}{n\beta} = \frac{1}{1,6 \times 0,729} = 0,86 ,$$

cho ta góc Čerenkov là

$$\theta = 31^\circ .$$

3. KĨ THUẬT DÒ HẠT VÀ PHƯƠNG PHÁP THỰC NGHIỆM (4086-4105)

4086

Năng lượng trung bình cần cho quá trình tạo cặp ion tự do trong không khí có giá trị là

(a) bằng thế ion hóa.

(b) trong khoảng 20 ~ 40 eV.

(c) gần chính xác bằng 11,5 Z.

(*CCT*)

Lời giải:

Năng lượng cần thiết trung bình để tạo ra một cặp ion phải lớn hơn thế ion hóa, do một phần năng lượng chuyển thành động năng của ion. Câu trả lời là (b).

4087

Với E/p nhỏ, vận tốc cuốn theo của electron trong chất khí, v_{Dr}, tuân theo một cách chính xác quan hệ $v_{Dr} \propto E/p$. Điều này có thể giải thích bởi thực tế là

(a) mỗi electron nhận một năng lượng bằng $\varepsilon = eE \int ds$.

(b) electron nhiệt hóa (đạt tới cân bằng nhiệt) hoàn toàn khi va chạm mềm với các phân tử khí.

(c) tiết diện không phụ thuộc vào vận tốc của electron.

(*CCT*)

Lời giải:

Trong điện trường E, electron nhận được vận tốc trung bình là $v_{Dr} = \frac{p}{2m_e} = \frac{eE\tau}{2m_e}$, trong đó τ là khoảng thời gian trung bình giữa hai va chạm liên tiếp. Do $\tau = \frac{l}{v_{Dr}} \propto \frac{1}{\sigma v_{Dr}}$, với l là quãng đường tự do trung bình của electron

trong chất khí và σ là một tiết diện tương tác, và nếu σ không phụ thuộc và vận tốc, ta có

$$v_{Dr} \propto \frac{E}{\sigma p} \propto \frac{E}{p}$$

Nếu σ phụ thuộc vào vận tốc, mối liên hệ sẽ phức tạp hơn nhiều. Do vậy câu trả lời là (c).

4088

Thế năng ion hóa trung bình là giá trị trung bình của

(a) các mức năng lượng kích thích.

(b) các năng lượng liên kết phân tử.

(c) năng lượng của lớp vỏ electron.

(*CCT*)

Lời giải:

Thế năng ion hóa trung bình được định nghĩa là năng lượng trung bình cần để tạo ra một cặp ion âm và dương, nó chính là giá trị trung bình của năng lượng liên kết phân tử. Câu trả lời là (b).

4089

Hiệu suất của một máy đếm tỉ lệ đối với các hạt mang điện bị giới hạn bởi

(a) tỉ số tín hiệu trên nhiễu.

(b) quá trình ion hóa toàn phần.

(c) quá trình ion hóa cơ bản.

(*CCT*)

Lời giải:

Nếu quá trình ion hóa cơ bản trung bình của một hạt mang điện là rất nhỏ, thì có một xác suất hữu hạn theo đó hạt mang điện đó không tạo ra đủ độ ion hóa cơ bản cho sự quan sát nó do ảnh hưởng của thăng giáng thống kê. Do

vậy câu trả lời là (c).

4090

Phổ tia X đơn năng trong máy đếm tỉ lệ thường có hai đỉnh. Điều đó là do

(a) sự bứt ra của một bức xạ huỳnh quang.

(b) hiệu ứng Auger.

(c) tán xạ Compton.

(*CCT*)

Lời giải:

Sự bứt ra của một bức xạ huỳnh quang làm cho phổ có hai đỉnh. Đỉnh cao nhất là đỉnh năng lượng toàn phần của tia X, còn đỉnh thấp hơn là tia X huỳnh quang bứt ra khỏi đầu dò. Câu trả lời là (a).

4091

Máy đếm Geiger được cấu tạo bởi một ống nối đất đường kính 10 mm với một dây dẫn đường kính 50 μm có điện áp +2000 V nằm ở tâm. Điện trường tại dây dẫn là bao nhiêu?

(a) 200^2 V/cm.

(b) 150 kV/cm.

(c) $1,5 \times 10^9$ V/cm.

(*CCT*)

Lời giải:

Với $R_0 = 0,5 \times 10^{-2}$ m, $R_i = 75 \times 10^{-6}$ m, $V = 200$ V, $\gamma = 25 \times 10^{-6}$ m, ta có

$$E(r) = \frac{V}{r \ln \frac{R_0}{R_i}} = 1,51 \times 10^7 \text{ V}/m$$

$$= 151 \text{ kV/cm}.$$

Do đó câu trả lời là (b).

4092

Đối với dữ liệu trong câu 4091, điện trường ở thành ống là

(a) 0 V/cm.

(b) 377 V/cm.

(c) 754 V/cm.

(*CCT*)

Lời giải:

Giống như **Bài tập 4091** nhưng ở đây $r = 0,5 \times 10^{-2}$ m ta được

$$E(r) = 7,55 \times 10^4 \text{ V/m} = 755 \text{ V/cm}.$$

Câu trả lời là (c).

4093

Điều gì sau đây hạn chế độ phân giải thời gian của máy đếm tỉ lệ?

(a) Tỉ số tín hiệu trên nhiễu của bộ khuếch đại.

(b) Sự hình thành tín hiệu chậm ở anot (tăng chậm theo thời gian).

(c) Sự ion hóa có vị trí ngẫu nhiên, do đó thời gian kéo theo biến đổi.

(*CCT*)

Lời giải:

Tính ngẫu nhiên của vị trí xảy ra quá trình ion hóa cơ bản làm cho thời gian cần thiết cho electron ion hóa ban đầu đi tới được anốt thay đổi. Tín hiệu anốt được tạo ra chủ yếu là do các dòng thác electron đến anốt đầu tiên. Do vậy có sự thăng giáng lớn, làm cho độ phân giải thấp. Câu trả lời là (c).

4094

Cơ chế phóng điện trong máy đếm Geiger tự dập tắt là gì?

(a) Sự phát electron thứ cấp từ catốt do các lượng tử UV.

(b) Sự ion hóa các chất khí gần anốt do các lượng tử UV.

(c) Quá trình hình thành trạng thái nửa bền và quá trình giải trừ kích thích kéo theo đó.

(*CCT*)

Lời giải:

Câu trả lời là (b).

4095

NaI nguyên chất có phải là một chất nhấp nháy tốt hay không?

(a) Không.

(b) Chỉ ở nhiệt độ thấp.

(c) Có.

(*CCT*)

Lời giải:

Câu trả lời là (b).

4096

Lợi ích của chất nhấp nháy hai thành phần là g?

(a) Nó nhanh hơn.

(b) Nó tạo ra biên độ lớn hơn trong đầu dò ánh sáng.

(c) Nó rẻ hơn.

(*CCT*)

Lời giải:

Ưu thế của các chất nhấp nháy hai thành phần là khả năng hạn chế các đỉnh thoát và đỉnh Compton, và do đó làm tăng biên độ của đỉnh năng lượng toàn phần trong đầu dò ánh sáng. Câu trả lời là (b).

4097

Một hạt tích điện đi qua chất nhấp nháy NaI(TI) và bị mất mát năng lượng trên quãng đường là dE/dx. Hiệu suất ánh sáng dL/dx sẽ là

(a) tỉ lệ với dE/dx.

(b) bão hòa khi dE/dx lớn.

(c) bão hòa khi dE/dx lớn và thiếu hụt khi dE/dx nhỏ.

(*CCT*)

Lời giải:

NaI(T1) không hoàn toàn là một đầu dò tuyến tính. Số photon đầu ra của nó phụ thuộc vào cả loại hạt bay vào và năng lượng mất mát của nó. Khi mất mát năng lượng là rất nhỏ thì độ phi tuyến của hiệu suất photon là lớn, còn khi dE/dX rất lớn thì nó tiến tới bão hòa. Do vậy câu trả lời là (c).

4098

Tia γ đơn năng lượng được phát hiện bởi đầu dò NaI. Các sự kiện giữa biên Compton và đỉnh quang

(a) xuất hiện chủ yếu trong các đầu dò mỏng.

(b) xuất hiện chủ yếu trong các đầu dò dày.

(c) không xảy ra.

(*CCT*)

Lời giải:

Nói chung, số lượng các sự kiện xảy ra trong vùng giữa biên Compton và đỉnh quang nhỏ hơn trong các vùng khác. Trong phổ năng lượng, các sự kiện đó xuất hiện như các vùng lõm (thung lũng). Nó không phải là những sự kiện chủ yếu trong cả hai loại đầu dò. Câu trả lời là (c).

4099

Sự phát sáng trong chất nhấp nháy hữu cơ là do sự chuyển mức giữa

(a) các mức electron không định xứ σ.

(b) các mức dao động.

(c) các mức quay.

(*CCT*)

Lời giải:

Thực tế thành phần nhanh trong ánh sáng phát ra từ một chất nhấp nháy hữu cơ được sinh ra bởi sự chuyển mức giữa mức ${}^0S_1$ và mức ${}^1S_0$ không định

xứ. Câu trả lời là (a).

4100

Một proton năng lượng toàn phần 1,4 GeV đi qua hai máy đếm nhấp nháy trên quãng đường 10 m. Thời gian bay của nó là bao nhiêu?

(a) 300 ns.

(b) 48 ns.

(c) 33 ns.

(*CCT*)

Lời giải:

Khối lượng nghỉ của proton là $m_p = 0,938$ GeV do đó ta có

$$\gamma = \frac{E}{m_p} = \frac{1,4}{0,938} = 1,49\,,$$

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 0,74\,.$$

Do đó thời gian bay của ánh nó là

$$t = \frac{10}{0,74 \times 3 \times 10^8} = 4,5 \times 10^{-8}\ s = 45\ ns\,.$$

Câu trả lời là (b).

4101

Thời gian bay của hạt là bao nhiêu nếu thay proton trong câu 4100 bằng một hạt electron?

(a) 330 ns.

(b) 66 ns.

(c) 33 ns.

(*CCT*)

Lời giải:

Một electron với năng lượng 1,4 GeV $\gg m_e c^2 = 0,51$ MeV sẽ có $\beta \approx 1$. Do

vậy thời gian bay của nó là

$$t \approx \frac{10}{3 \times 10^8} = 3,3 \times 10^{-8}\ s = 33\ ns\,.$$

Câu trả lời là (c).

4102

Làm thế nào để phát hiện ra tia γ 500 MeV? Dùng

(a) buồng bọt hydro.

(b) máy đếm mưa hạt (BGO – detector Bismuth Germanate).

(c) máy đếm Geiger.

(*CCT*)

Lời giải:

Bởi vì tia γ 500 MeV sẽ gây ra mưa nhiều đợt trong môi trường, nên để thu nhận được chúng ta cần một máy đếm mưa hạt điện từ hấp thụ toàn phần. Máy đếm mưa hạt BGO là một lựa chọn tốt bởi vì nó có bước sóng bức xạ ngắn và hiệu suất cao. Do vậy câu trả lời là (b).

4103

Làm thế nào để đo được thời gian sống trung bình của các hạt sau:

(1) U^{238} : $\tau = 4,5 \times 10^9$ năm,

(2) hyperon Λ^0 : $\tau = 2,5 \times 10^{-10}$ s,

(3) meson ρ^0 : $\tau \approx 10^{-22}$ s.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(1) Thời gian sống của ^{238}U có thể suy ra từ độ phóng xạ của nó $-dN/dt = \lambda N$, trong đó tốc độ phân rã được xác định trực tiếp bằng cách đo tốc độ đếm. Với một số lượng hạt nhân cho trước, ta có thể tìm ra λ và từ đó tính được $\tau = 1/\lambda$.

(2) Thời gian sống của hyperon Λ^0 có thể rút ra từ độ dài quỹ đạo trước khi phân rã theo phương trình $\Lambda^0 \to p^+\pi^-$ trong từ trường mạnh của buồng bọt. Từ góc mở và độ cong của vết p và π^-, ta có thể xác định động lượng của

Λ^0, nó bằng tổng động lượng của p và π^-. Với khối lượng biết trước của Λ^0, ta có thể tính ra thời gian sống của Λ^0 từ quãng đường nó đi được Λ^0 (**Bài tập 3033**).

(3) Thời gian sống của meson ρ^0 có thể ước lượng dựa vào phổ khối lượng bất biến. Từ độ rộng tự nhiên ΔE của khối lượng trong phổ năng lượng ta có thể tính được thời gian sống trung bình dựa vào nguyên lý bất định $\Delta E \Delta\tau \approx \hbar$.

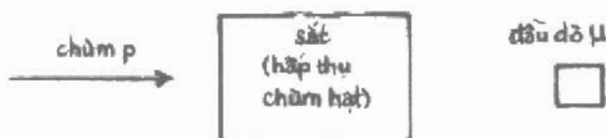
4104

Người ta chưa bao giờ thấy hạt "duyên", được phát hiện trong vành chứa e^+e^-, trong các tương tác hađron-hađron. Một cách có thể đo được các hạt này là quan sát phản ứng phân rã sinh lepton của chúng. Ví dụ, xét một hạt duyên c có kiểu phân rã là

$$c \to \mu\nu\,.$$

Không may thí nghiệm này trở nên phức tạp do sự có mặt của muyon từ phân rã π.

Xét một thí nghiệm tại phòng thí nghiệm Fermi, trong đó proton 400 GeV được bắn vào bia sắt dày (thiết bị hấp thụ chùm hạt) như mô tả trong hình 4.13.



Hình 4.13

Một số muyon đi vào đầu dò được sinh ra từ phân rã π và một phần sinh ra từ phân rã c (bỏ qua các quá trình khác). Hãy tính tỉ lệ muyon sinh ra từ phân rã c so với muyon sinh ra từ phân rã π dựa theo các giả thiết sau:

(a) các pion có tương tác trong khối sắt sẽ không suất hiện trong chùm hạt nữa,

(b) phổ năng lượng của cả π và c đều tăng đến từ cực tiểu tới cực đại năng lượng cho phép,

(c) khối lượng của c là 2 GeV/c^2 và thời gian sống của nó là $\ll 10^{-10}$ s,

(d) bỏ qua năng lượng muyon mất mát trong sắt,

(e) bỏ qua yếu tố phức tạp do dạng hình học của đầu dò muyon,

(f) thiết diện tương tác không đàn hồi $p-p$ là 30 mb, và bội số trung bình của pion mang điện trong tương tác không đàn hồi là 8.

Hãy tính toán chi tiết và trình bày mọi giả thiết bổ xung nếu có. Tính giá trị bằng số của tỉ lệ đó tại $E_\mu = 100$ GeV cho rằng tiết diện sinh toàn phần đối với c là 10 μb trên một hạt nhân Fe và c phân rã thành $\mu\nu$ trong 10% thời gian sống.

(*Princeton*)

Lời giải:

Ngoài những giả thiết đã cho, ta giả thiết thêm là quá trình phóng điện không phụ thuộc vào tương tác hạt nhân, do vậy $\sigma_{pp} = \sigma_{pn}$ và bội số của pion tích điện là như nhau đối với va chạm pp và pn.

Đối với ^{56}Fe, mật độ hạt proton và nơtron là như nhau và bằng

$$N_p = N_n = \frac{28}{56} \times 7,8 \times 6,02 \times 10^{23} = 2,35 \times 10^{24} \text{ cm}^{-3} .$$

Kí hiệu thông lượng proton trong chùm tia tới là $\phi(x)$, trong đó x là độ dày của bia tính từ mặt tới. Ta có

$$\frac{d\phi}{dx} = -(\sigma_{pp}N_p + \sigma_{pn}N_n)\phi = -2\sigma_{pp}N_p\phi ,$$

$$\phi = \phi_0 e^{-2\sigma_{pp}N_p x} .$$

Nếu bia đủ dày, ví dụ $x = 10$ m $= 10^3$ cm, khi đó ta có

$$\phi = \phi_0 \exp(-2 \times 30 \times 10^{-27} \times 2,35 \times 10^{24} \times 10^3) = 5,8 \times 10^{-62}\phi_0 ,$$

tại mặt sau. Điều này chỉ ra rằng chùm proton hoàn toàn bị giữ trong bia. Điều này sẽ được sử dụng trong các tính toán sau.

Đầu tiên ta xét các quac c sinh ra từ tương tác p–Fe trong bia. Từ dữ liệu đã cho $\sigma_{p\text{Fe}}(c) = 10\ \mu b$, $\sigma_{pp} = 30$ mb, chúng ta tìm được số quac c được sinh ra là

$$N_c = \int N_{\text{Fe}}\sigma(c)d\phi \approx N_{\text{Fe}}\sigma(c)\phi_0 \int_0^\infty e^{-2\sigma_{pp}N_p x}dx$$

$$= \frac{N_{\text{Fe}}}{2N_{pp}}\frac{\sigma(c)}{\sigma_{pp}}\phi_0 = \frac{1}{56} \times \frac{10^{-5}}{30 \times 10^{-3}}\phi_0 = 5,95 \times 10^{-6}\phi_0 .$$

Do quac c có thời gian sống $\ll 10^{-10}$ s, nên tất cả các hạt được tạo ra trong tương tác p–Fe đều sẽ phân rã trong bia, khiến sinh ra các muyon trong 10%

thời gian sống. Do vậy

$$N_{\mu c} = 0,1 N_c = 5,95 \times 10^{-7}\phi_0 .$$

Tiếp theo ta xét các muyon sinh ra từ phân rã của các pion tích điện trong tương tác nucleon p. Sau khi được sinh ra các pion có thể tương tác với nucleon trong bia và biến mất khỏi chùm hạt, như giả thiết, hoặc phân rã trong quá trình chuyển động sinh ra muyon. Đối với quá trình tương tác với nucleon ta giả thiết $\sigma_{\pi p} = \sigma_{\pi n} \approx \frac{2}{3}\sigma_{pp} = 20$ mb ở năng lượng cao. Với phân rã khi chuyển động thời gian sống của pion mang điện trong phòng thí nghiệm là γ_π/λ, với λ là hằng số phân rã và $\gamma_\pi = (1-\beta_\pi^2)^{-\frac{1}{2}}$, $\beta_\pi c$ là vận tốc trung bình của pion. Do vậy độ biến thiên N_π trên một đơn vị khoảng cách x là

$$\begin{aligned}\frac{dN_\pi}{dx} &= 8(\sigma_{pp}N_p + \sigma_{pn}N_n)\phi(x) - \left(\frac{\lambda}{\gamma_\pi\beta_\pi c} + \sigma_{\pi p}N_p + \sigma_{\pi n}N_n\right)N_\pi \\ &= 16\sigma_{pp}N_p\varphi_0 e^{-2\sigma_{pp}N_p x} - \left(\frac{\lambda}{\gamma_\pi\beta_\pi c} + 2\sigma_{\pi p}N_p\right)N_\pi \\ &= 8B\phi_0 e^{-Bx} - B'N_\pi ,\end{aligned}$$

trong đó $B = 2\sigma_{pp}N_p$, $B' = 2\sigma_{\pi p}N_p + \lambda'$, $\lambda' = \frac{\lambda}{\gamma_\pi\beta_\pi c}$. Nghiệm của phương trình vi phân là

$$N_\pi = \frac{8B}{B'-B}(e^{-Bx} - e^{-B'x})\phi_0 .$$

Do đó số lượng pion mang điện phân rã trong bia trên một đơn vị khoảng cách x là

$$\frac{dN_\pi(\lambda)}{dx} = \frac{\lambda}{\gamma_\pi\beta_\pi c}N_\pi(\lambda) = \frac{8B\lambda'}{B'-B}(e^{-Bx} - e^{-B'x})\phi_0 .$$

Lấy tích phân từ $x = 0$ tới $x = \infty$ ta có

$$N_\pi(\lambda) = \frac{8B\lambda'}{B'-B}\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{B'}\right)\phi_0 = \frac{8\lambda'\phi_0}{B'} .$$

Tỉ số phân nhánh đối với $\pi \to \mu\nu \approx 100\%$, do vậy $N_{\mu\pi} \approx N_\pi(\lambda)$. Có nghĩa là phổ năng lượng của muyon cũng tăng (mặc dù thực thế điều này đúng với muyon năng lượng cao hơn là muyon năng lượng thấp), điều này giúp ta dễ hơn nhiều trong việc so sánh với $N_{\mu c}$.

Ví dụ ta lấy $E_\mu \sim 100$ GeV. Khi đó $E_\pi \gtrsim 100$ GeV, $\beta_\pi \approx 1$, $\gamma_\pi \gtrsim 714$, va do vậy

$$\lambda' = \frac{\lambda}{\gamma_\pi\beta_\pi c} = \frac{1}{2,6 \times 10^{-8} \times 714 \times 3 \times 10^{10}} = 1,8 \times 10^{-6}\ \mathrm{cm}^{-1} .$$

Do

$$\sigma_{\pi p} N_p = 20 \times 10^{-27} \times 2,34 \times 10^{24} = 4,7 \times 10^{-2}\ \text{cm}^{-1} \gg \lambda'.$$

$$N_\pi(\lambda) \simeq \frac{8\lambda'\phi_0}{2\sigma_{\pi p} N_p} = \frac{8 \times 1,8 \times 10^{-6}\phi_0}{2 \times 4,7 \times 10^{-2}} = 1,5 \times 10^{-4}\phi_0.$$

Từ đó

$$\frac{N_{\mu c}}{N_{\mu\pi}} = \frac{5,95 \times 10^{-7}}{1,5 \times 10^{-4}} = 4 \times 10^{-3}.$$

4105

Một thí nghiệm được đề xuất để nghiên cứu trạng thái hadron hẹp có thể được sinh ra từ quá trình hủy $p\bar{p}$. Phản proton chứa trong một vành va chạm với một luồng hydro phun vào trong vành đó theo phương vuông góc với chùm hạt. Bằng cách điều chỉnh động lượng của chùm hạt trong vành chứa ta có thể nghiên cứu sự phụ thuộc vào năng lượng khối tâm của thiết diện $p\bar{p}$. Một sự cộng hưởng sẽ xuất hiện như một đỉnh của tiết diện tương tác đối với một số trạng thái cuối.

Giả thiết rằng một hadron có thể được sinh ra trong kênh đó với khối lượng là 3 GeV và độ rộng toàn phần là 100 keV.

(a) Động lượng của chùm hạt là bao nhiêu để có thể tạo ra trạng thái này?

(b) Một sự thúc đẩy việc tiến hành thí nghiệm này là để tìm kiếm trạng thái chacmoni (trạng thái liên kết của một cặp quac và phản quac duyên). Trạng thái này không thể quan sát trực tiếp giống như một cộng hưởng trong sự hủy cặp e^+e^-. Trạng thái spin chẵn lẻ nào của chacmoniccó thể nhận thấy như là một cộng hưởng trong thí nghiệm này, mà không phải là trong sự hủy cặp e^+e^-?

Các câu hỏi sau có thể trả lời một cách ngắn gọn

(c) Giả sử độ phân tán của động lượng của chùm hạt là 1%. Nếu trạng thái được thể hiện như một đỉnh trong đồ thị tiết diện toàn phần phụ thuộc năng lượng khối tâm, thì độ rộng của nó sẽ là bao nhiêu?

(d) Độ rộng của trạng thái sẽ là bao nhiêu nếu thay hydro bằng luồng khí oxy trong thí nghiệm trên?

(e) Giả sử dòng khí có độ dày là 1 mm và mật độ 10^{-9} g/cm^3, và có 10^{11} phản proton quay vòng trong vành có đường kính 100 m. Có bao nhiêu sự

kiện diễn ra trong một giây trên 1 cm^2 tiết diện? (Nói cách khác, hiệu suất tương tác là bao nhiêu?). Có bao nhiêu hủy cặp $p\bar{p}$ sẽ xảy ra trong một giây?

(f) Nếu trạng thái (với độ rộng toàn phần là 100 keV) có tỉ lệ phân nhánh là 10% so với $p\bar{p}$, giá trị của tiết diện toàn phần là bao nhiêu tại đỉnh (giả sử luồng khí là hydro)?

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm, vận tốc của luồng khí là rất nhỏ và các proton trong bia có thể coi gần đúng là đứng yên. Tại ngưỡng, bình phương khối lượng bất biến là

$$S = (E_p + m_p)^2 - p_p^2 = M^2 .$$

Với $E_p^2 = m_p^2 + p_p^2$, $M = 3$ GeV, ta có

$$E_p = \frac{M^2 - 2m_p^2}{2m_p} = \frac{3^2 - 2 \times 0,938^2}{2 \times 0,938} = 3,86 \text{ GeV},$$

Và do vậy động lượng ngưỡng là

$$p_p = \sqrt{E_p^2 - m_p^2} = 3,74 \text{ GeV}/c .$$

(b) Trong va chạm e^+e^-, do sự hủy cặp e^+e^- tạo ra một hạt proton ảo có J^P bằng 1^-, nên chỉ trạng thái cộng hưởng của $J^P = 1^-$ có thể được sinh ra. Nhưng với phản ứng $p\bar{p}$, có rất nhiều trạng thái được tạo ra, cụ thể là

$$\text{đối với } S = 0,\ l = 0,\ J^p = 0^+ ;$$
$$S = 1,\ l = 0,\ J^P = 1^- ;$$
$$S = 1,\ l = 1,\ J^P = 0^-,\ 1^-,\ 2^- ;$$
$$l = 2,\ J^P = 1^+,\ 2^+,\ 3^+ .$$

Do đó, bên cạnh trạng thái $J^P = 1^-$, những trạng thái cộng hưởng khác $J^P = 0^-, 0^+, 1^+, 2^-, 2^+, 3^+ \cdots$ cũng xuất hiện trong hủy cặp $p\bar{p}$.

(c) Tại ngưỡng ta có

$$p^2 = E^2 - m^2 = \frac{M^4}{4m_p^2} - M^2 .$$

Lấy vi phân ta có

$$2p\Delta p = M^3 \frac{\Delta M}{m_p^2} - 2M\Delta M\,,$$

hay

$$\Delta M = \frac{2m_p^2 p^2 \dfrac{\Delta p}{p}}{M^3 - 2m_p^2 M}\,.$$

Với $\frac{\Delta p}{p} = 0,01$, ta có

$$\Delta M = \frac{2 \times 0,938^2 \times 3,74^2 \times 0,01}{3^3 - 2 \times 0,938^2 \times 3}$$
$$= 1,13 \times 10^{-2}\ \text{GeV}\,.$$

Do vậy $\Delta M \gg \Gamma$, độ rộng nhận được chủ yếu do Δp.

(d) Nếu thay hydro bằng oxy, các proton tương tác với các phản proton tới sẽ nằm bên trong hạt nhân oxy và có động năng nhất định gọi là năng lượng Fermi. Chuyển động Fermi có hướng ngẫu nhiên, do đó nó mở rộng đỉnh cộng hưởng. Với một proton trong hạt nhân oxy, động lượng Fermi cực đại là

$$p_F \approx \frac{\hbar}{R_0}\left(\frac{9\pi Z}{4A}\right)^{1/3} = \frac{\hbar c}{R_0 c}\left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3}$$
$$= \frac{197 \times 10^{-13}}{1,4 \times 10^{-13} c}\left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3} = 210\ \text{MeV}/c\,,$$

Trong đó ta lấy bán kính hạt nhân là $R = R_0 A^{1/3}$, nó lớn hơn nhiều so với độ phân tán của động lượng ($\Delta p = 3,47$ MeV/c). Do vậy trong thí nghiệm trên việc thay hydro bằng oxy là không thực tế.

(e) Phản proton có vận tốc βc, với

$$\beta = \frac{p_p}{E_p} = \frac{3,74}{3,86} = 0,97\,.$$

Số vòng nó đi được quanh vành chứa trên một giây là

$$\frac{\beta c}{100\pi}$$

và số lần va chạm của $p\bar{p}$ trong một giây trên một cm^2 tiết diện là

$$B = 10^{11} \times \frac{0,97 \times 3 \times 10^{10}}{100 \times 10^2 \times \pi} \times 0,1 \times 10^{-9} \times 6,023 \times 10^{23}$$
$$= 5,6 \times 10^{30} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} .$$

Giả sử $\sigma_{pp} \approx 30$ mb. Số lượng hủy cặp trên một giây $p\bar{p}$ là

$$\sigma_{p\bar{p}} B = 30 \times 10^{-27} \times 5,6 \times 10^{30}$$
$$= 1,68 \times 10^5 \text{ s}^{-1} .$$

(f) Tiết diện tại đỉnh cộng hưởng cho bởi

$$\sigma = \frac{(2J+1)}{(2J_p+1)(2J_{\bar{p}}+1)} \frac{\pi \lambda^2 \Gamma_{p\bar{p}} \Gamma}{(E-M)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} .$$

Khi cộng hưởng $E = M$. Giả sử spin của trạng thái cộng hưởng là 0. Khi đó do $J_p = J_{\bar{p}} = \frac{1}{2}$, ta có

$$\sigma(J=0) = \pi \lambda^2 \frac{\Gamma_{p\bar{p}}}{\Gamma} .$$

Với $\lambda = \frac{\hbar}{p_p}$, $\frac{\Gamma_{p\bar{p}}}{\Gamma} = 0,1$, ta có

$$\sigma = \pi \times \left(\frac{\hbar c}{p_p c}\right)^2 \times 0,1 = \pi \times \left(\frac{197 \times 10^{-13}}{3740}\right)^2 \times 0,1$$
$$= 8,7 \times 10^{-30} \text{ cm}^2$$
$$= 8,7 \ \mu b .$$

4. ƯỚC LƯỢNG SAI SỐ VÀ THỐNG KÊ (4106–4118)

4106

Số các chữ số có nghĩa để xác định α là: 4, 8, 12, 20.

(*Columbia*)

Lời giải:

Ta có

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137,03604(11)},$$

Do vậy câu trả lời là 8.

4107

Nếu trong một giây trung bình thu được 4 lần đếm từ một nguồn phóng xạ thì xác suất ghi nhận được được 8 lần trên một giây là bao nhiêu?

(*Columbia*)

Lời giải:

Tốc độ đếm tuân theo phân bố Poisson. Do vậy ta có

$$P(8) = 4^8 e^{-4}/8! = 0,03\,.$$

4108

Giả sử ta muốn đo độ đồng nhất về chiều dày của một tấm lọc bằng nhôm đặt vuông góc với chùm tia X. Sử dụng một đầu dò và một nguồn tia X, phép đo độ truyền qua cân bằng sáng được tiến hành ở những điểm khác nhau trên tấm lọc. Số lần đếm, N, thu được từ 6 phép thử là $1,00 \times 10^4$, $1,02 \times 10^4$, $1,04 \times 10^4$, $1,06 \times 10^4$, $1,08 \times 10^4$, $1,1 \times 10^4$.

(a) Tính độ lệch chuẩn của các phép đo trên.

(b) Phép đo cho ta biết điều gì về độ đồng nhất của phên lọc?

(c) Cho $N = N_0 e^{-\mu t}$, độ lệch tỉ đối của N và độ lệch tỉ đối của t liên quan với nhau như thế nào?

(d) Với số lần đếm được bằng đầu dò cho trước thì sai số tỉ đối theo t sẽ lớn hơn khi t nhỏ hay khi t lớn?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Giá trị thu được trung bình là $\bar{N} = \frac{1}{n}\sum_1^n N_i = 1,05 \times 10^4$. Độ lệch chuẩn của số liệu là

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_i^n (N_i - \bar{N})^2} = 0,037 \times 10^4 \,.$$

(b) Nếu tấm Al đồng nhất thì số lần đếm tại các vị trí khác nhau phải tuân theo phân bố Poisson với độ lệch chuẩn là

$$\Delta N = \sqrt{N} \approx \sqrt{1,05 \times 10^4} = 0,01 \times 10^4 \,.$$

Do độ lệch chuẩn của số liệu thu được là $(0,037 \times 10^4)$ gấp 3 lần ΔN, nên tấm nhôm là không đồng nhất.

(c) Ta viết lại công thức $N = N_0 e^{-\mu t}$ thành $\ln N = \ln N_0 - \mu t$. Do $\frac{dN}{N} = -\mu dt$, ta có

$$\frac{\Delta N}{N} = \mu \Delta t \,,$$

hay

$$\frac{\Delta N}{N} = \mu t \left(\frac{\Delta t}{t}\right) .$$

(d) Do

$$\frac{\Delta t}{t} = \frac{1}{\mu t}\frac{\Delta N}{N} \,,$$

Nên với mỗi dữ liệu cho trước, t càng nhỏ thì sai số tỉ đối theo t càng lớn.

4109

Giả sử thực hiện đo 25 sự kiện $J \to e^+e^-$ bằng cách lặp lại khối lượng cặp e^+e^-. Độ chính xác của dụng cụ là $\Delta m/m = 1\%$. Khối lượng trung bình là 3,100 GeV. Sai số là bao nhiêu?

(a) 6,2 MeV

(b) 1,6 MeV

(c) 44 MeV.

(CCT)

Lời giải:

Do Δm là sai số của một phép đo nên độ lệch chuẩn là

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{25-1}\sum (\Delta m)^2} = \sqrt{\frac{25}{24}}\Delta m \approx \Delta m = 31 \text{ MeV} \,.$$

Do đó độ lệch chuẩn của giá trị trung bình, hay sai số chuẩn là

$$e = \frac{\sigma}{\sqrt{25}} = 6,2 \text{ MeV}.$$

Do vậy câu trả lời là (a).

4110

Trong một buồng hơi sương chứa đầy không khí ở áp suất khí quyển, các hạt anpha 5 MeV tạo ra một vết dài 4 cm. Một cách gần đúng ta phải quan sát bao nhiêu vết như vậy để có nhiều khả năng tìm thấy một vết có đường đi bị bẻ cong mạnh do va chạm với hạt nhân?

(*Columbia*)

Lời giải:

Do bán kính hạt nhân là $R = r_0 A^{1/3}$, trong đó $r_0 = 1,2$ fm và $A = 14,7$ nên với một hạt nhân không khí trung bình ta có thiết diện hạt nhân σ là

$$\sigma \approx \pi R^2 = \pi \times (1,2 \times 10^{-13} \times 14,7^{1/3})^2 = 2,7 \times 10^{-25} \text{ cm}^2 .$$

Mật độ hạt nhân trong buồng hơi sương là

$$n = \frac{\rho N_A}{A} = \frac{0,001293 \times 6,023 \times 10^{23}}{14,7} = 5,3 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3} .$$

Do vậy quãng đường tự do trung bình là $\lambda = \frac{1}{n\sigma} = 7,0 \times 10^4$ cm.

Do đó, để có một khả năng tốt tìm thấy một tán xạ góc lớn thì cần quan sát khoảng $7 \times 10^4/4 \approx 20000$ sự kiện.

4111

Một muyon dương (μ^+) phân rã thành một positron và hai nơtrino,

$$\mu^+ \to e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu ,$$

với thời gian sống trung bình là 2 micro giây. Giả thiết rằng muyon đứng yên bị phân cực dọc theo trục z của hệ trục tọa độ với độ phân cực là P và chỉ xét các positron năng lượng cao sinh ra từ phân rã muyon. Các positron này được phát ra với phân bố góc là

$$I(\cos\theta)d\Omega = (1 + P\cos\theta)\frac{d\Omega}{4\pi} ,$$

trong đó θ là góc giữa chiều chuyển động của positron đối với trục z và $d\Omega$ là vi phân góc khối trong đó positron được phát ra.

(a) Giả sử $P = +1$. Xác suất để 6 positron được quan sát đầu tiên có 3 hạt trong bán cầu phía trước ($\cos\theta > 0$) và 3 hạt trong bán cầu phía sau ($\cos\theta < 0$) là bao nhiêu?

(b) Giả sử P nằm trong lân cận của 1, nhưng không biết chính xác. Bây giờ ta muốn xác định P bằng cách so sánh các số hạt positron bay về phía trước (N_f) và bay về phía sau (N_b). Để xác định P với độ chính xác $\pm 1\%$ thì phải quan sát bao nhiêu phân rã muyon, N ($N = N_f + N_b$)?

(*CUSPEA*)

Lời giải:

(a) Do $d\Omega = 2\pi d\cos\theta$, nên xác suất của phân rã tiến là

$$P_f = 2\pi \int_0^1 \frac{(1 + P\cos\theta)d\cos\theta}{4\pi} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{P}{2}\right),$$

Và xác suất của phân rã lùi là

$$P_b = 2\pi \int_{-1}^0 \frac{(1 + P\cos\theta)d\cos\theta}{4\pi} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{P}{2}\right).$$

Nếu ta quan sát thấy N positron, xác suất tìm thấy N_f hạt trong bán cầu phía trước và N_b hạt trong bán cầu phía sau, trong đó $N = N_f + N_b$, tuân theo phân bố nhị phân

$$W = \frac{N!}{N_f!N_b!}(P_f)^{N_f}(P_b)^{N_b}.$$

Với $P = 1$, công thức trên cho ta $P_f = 3/4$, $P_b = 1/4$. Với $N = 6$, $N_f = N_b = 3$, xác suất sẽ là

$$W = \frac{6!}{3!3!}\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^3 = 0,132.$$

(b) P có thể xác định từ biểu thức

$$P_f - P_b = \frac{P}{2},$$

tức là

$$P = 2(P_f - P_b) = 2(2P_f - 1).$$

ở đây $P_f = \frac{N_f}{N}$, $P_b = \frac{N_b}{N}$ thu được từ thực nghiệm. Với N sự kiện, độ lệch chuẩn của N_f là

$$\Delta N_f = \sqrt{NP_f(1-P_f)}\,.$$

Vì vậy

$$\Delta P_f = \frac{\Delta N_f}{N} = \sqrt{\frac{P_f(1-P_f)}{N}}\,.$$

Ta thu được

$$\Delta P = 4\Delta P_f = 4\sqrt{\frac{P_f(1-P_f)}{N}}\,.$$

hay

$$N = \frac{16P_f(1-P_f)}{(\Delta P)^2}\,.$$

Với $P \approx 1$, $\Delta P \approx 0,01P = 0,01$, $P_f \approx \frac{3}{4}$, N phải có giá trị nhỏ nhất là

$$N_{\min} = \frac{16 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}}{(10^{-2})^2} = 30000\,.$$

4112

Cacbon dioxit trong không khí chứa một nồng độ gần như không đổi hạt nhân phóng xạ ^{14}C. Hạt nhân phóng xạ này liên tục được sinh ra do các tia vũ trụ thứ cấp tương tác với nitơ trong khí quyển. Khi một sinh vật chết đi, lượng cacbon 14 bằng với nồng độ ^{14}C trong khí quyển, nhưng nó sẽ giảm dần do phân rã phóng xạ. Đây chính là cơ sở của kĩ thuật xác định thời gian bằng cacbon phóng xạ.

Trong các phần tiếp theo ta sẽ giả thiết tỉ lệ $^{14}C/^{12}C$ trong không khí là 10^{-12} và thời gian bán rã của phân rã β của ^{14}C là 5730 năm.

(a) Người ta sử dụng kĩ thuật xác định tuổi bằng cacbon phóng xạ để xác định tuổi của một mẫu cacbon. Cần bao nhiêu gam mẫu để có thể xác định tuổi với độ chính xác là ± 50 (độ lệch chuẩn là 50 năm)? Cho rằng tuổi của mẫu là 5000 năm, độ phóng xạ được đo trong một giờ với độ chính xác 100% và không có nền trong phép đo.

(b) Lặp lại câu (a), nhưng giả thiết rằng có tín hiệu nền ảnh hưởng tới đầu dò (do độ phóng trong bản thân đầu dò, tia vũ trụ ...) với giá trị trung bình được biết chính xác là 4000 bức xạ trên một giờ.

(*CUSPEA*)

Lời giải:

(a) ^{14}C phân rã theo công thức

$$N = N_0 e^{-\lambda t}\,.$$

Tốc độ thay đổi của nó sẽ là

$$A = -dN/dt = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = \lambda N\,.$$

Lấy đạo hàm ta được

$$\frac{dA}{dt} = -\lambda^2 N_0 e^{-\lambda t} = -\lambda A\,,$$

và do đó

$$\Delta A/A = \lambda \Delta t\,.$$

HHằng số phân rã $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{5730} = 1,21 \times 10^{-4}$ năm^{-1}. Do tốc độ đếm trên một giờ A sẽ tuân theo phân bố Poisson,

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\sqrt{A}}{A} = \frac{1}{\sqrt{A}} = 50\lambda\,,$$

từ đó ta rút ra

$$A = \left(\frac{1}{50 \times 1,21 \times 10^{-4}}\right)^2 = 2,73 \times 10^4\ h^{-1}\,.$$

Gọi khối lượng cacbon cần thiết là x gam. Khi đó

$$A = \frac{\lambda x N_A}{12} \times 10^{-12} \times \exp(-5000\lambda)\,,$$

cho ta

$$\begin{aligned} x &= \frac{12A \times 10^{12} \times e^{5000\lambda}}{N_A \lambda} \\ &= \frac{12 \times 2,73 \times 10^4 \times 365 \times 24}{6,023 \times 10^{23} \times 1,21 \times 10^{-4}} \times 10^{12} \times e^{5000 \times 1,21 \times 10^{-4}} \\ &= 72,1\ g\,. \end{aligned}$$

(b) Với tốc độ đo bức xạ nền là A_B, tốc độ toàn phần là $A + A_B \pm \sqrt{A + A_B}$. Do A_B có giá trị chính xác nên ta có $\Delta A_B = 0$. Như vậy

$$\Delta(A + A_B) = \Delta A = \sqrt{A + A_B}\,,$$

hay

$$\frac{\Delta A}{A} = \sqrt{\frac{1}{A} + \frac{A_B}{A^2}}\,.$$

Với $\frac{\Delta A}{A} = \lambda \Delta t = C$, công thức trên trở thành

$$C^2A^2 - A - A_B = 0\,.$$

Do vậy ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2C^2}(1 + \sqrt{1 + 4C^2 A_B}) \\ &= \frac{1}{2 \times (1,21 \times 10^{-4} \times 50)^2}\left[1 + \sqrt{1 + 4 \times (1,21 \times 10^{-4} \times 50)^2 \times 4000}\right] \\ &= 3,09 \times 10^4\ h^{-1}\,, \end{aligned}$$

Và khối lượng cần thiết là

$$m = \frac{3,09 \times 10^4}{2,73 \times 10^4} \times 72,1 = 81,6\ g\,.$$

4113

Một máy đếm Čerenkov tạo ra 20 photon/hạt. Hiệu suất chuyển hóa photon thành quang electron ở catốt của bộ nhân quang là 10%. Một quang electron sẽ tạo ra một tín hiệu. Với 1000 hạt thì có bao nhiêu hạt đi qua mà không được đếm?

(a) không hạt nào cả.

(b) 3 hạt.

(c) 130 hạt.

(CCT)

Lời giải:

Xét một hạt đi qua, nó tạo ra 20 photon, mỗi photon có xác suất tạo ra quang electron là $P = 0,1$ và có nghĩa là được phát hiện. Hạt sẽ không được

phát hiện nếu trong 20 photon đó không có hạt nào chuyển thành quang electron. Xác suất để điều này xảy ra là

$$P(0) = \frac{20!}{0!20!}(0,1)^0(0,9)^{20}$$
$$= 0,122\,.$$

Do vậy khi có 1000 hạt đi tới, thì có khả năng 122 hạt không được phát hiện. Do vậy câu trả lời là (c).

4114

Một nguồn phóng xạ phát ra hai loại bức xạ A và B, và được đo bằng một máy đếm có thể phân biệt hai loại đó. Trong một khoảng thời gian cho trước, đếm được 1000 lần loại A và 2000 loại B. Cho rằng quá trình sinh ra bức xạ loại A và B là độc lập. Sai số thống kê khi đo tỉ số $r = \frac{N_A}{N_B}$ là bao nhiêu?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Viết lại phương trình thành

$$\ln r = \ln N_a - \ln N_B$$

và lấy vi phân hai vế ta được

$$\frac{dr}{r} = \frac{dN_A}{N_A} - \frac{dN_B}{N_B}\,.$$

Do N_A và N_B là độc lập với nhau nên ta có

$$\left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2 = \left(\frac{\Delta N_A}{N_A}\right)^2 + \left(\frac{\Delta N_B}{N_B}\right)^2\,.$$

Ta lại có N_A và N_B tuân theo phân bố Poisson nên $\Delta N_A = \sqrt{N_A}$, $\Delta N_B = \sqrt{N_B}$, và do vậy ta thu được

$$\frac{\Delta r}{r} = \sqrt{\frac{1}{N_A} + \frac{1}{N_B}} = \sqrt{\frac{1}{1000} + \frac{1}{2000}} = 3,9\%\,,$$

hay

$$\Delta r = \frac{1000}{2000} \times 0,039 = 0,020\,,$$

Đó chính là sai số chuẩn của tỉ số τ.

4115

Một mẫu đồng vị phóng xạ được khảo sát bằng một máy đếm nhấp nháy có khả năng phát hiện các electron phân rã và xác định chính xác thời gian từng phân rã.

(a) Gọi τ là thời gian sống trung bình của phân rã. Một mẫu chứa một lượng lớn N nguyên tử, và xác suất phát hiện một phân rã là ε. Hãy tính tốc độ đếm trung bình của máy nhấp nháy. Ta có thể giả thiết τ lớn hơn nhiều so với khoảng thời gian của một phép đo. Trong phép đo τ, có 10.000 lần đếm trong vòng chính xác 1 giờ. Hiệu suất phát hiện của chất nhấp nháy là không phụ thuộc và bằng 0,4 và N được xác định bằng 10^{23}. Giá trị τ đo được là bao nhiêu? Sai số thống kê (độ lệch chuẩn) của phép đo τ là bao nhiêu?

(b) Gọi $P(t)dt$ là xác suất có hai lần đếm liên tiếp ở chất nhấp nháy tại thời điểm t và $t + dt$. Hãy tính $P(t)$ theo t, ε, N, τ.

(*CUSPEA*)

Lời giải:

(a) Do $\tau \gg$ thời gian đo, N có thể coi như một hằng số và tốc độ đếm trung bình là

$$R = \frac{\varepsilon N}{\tau}\,.$$

Do vậy

$$tau = \frac{\varepsilon N}{R} = \frac{0,4 \times 10^{23}}{10^4} = 0,4 \times 10^{19}\ h = 4,6 \times 10^{14}\ \text{năm}\,.$$

Sai số thống kê của R là $\sqrt{R}$ bởi vì tốc độ đếm tuân theo phân bố Poisson. Khi đó ta có

$$\frac{\Delta\tau}{\tau} = \frac{\Delta R}{R} = \frac{1}{\sqrt{R}} = \frac{1}{\sqrt{10^4}} = 0,01\,,$$

hay

$$\Delta\tau = 4,6 \times 10^{12}\ \text{năm}\,.$$

(b) Lần đếm đầu tiên là tại thời điểm t. Có nghĩa là không có lần đếm nào trong khoảng thời gian 0 đến t. Do giá trị số lần đếm trung bình mong đợi cho khoảng thời gian đó là $m = Rt$, nên xác suất điều đó xảy ra là

$$\frac{e^{-m}m^0}{0!} = e^{-m} = e^{-Rt}\,.$$

Lần đếm thứ hai có thể xảy ra trong thời gian dt. Do $m' = Rdt$, nên xác suất là

$$\frac{e^{-m'}m'}{1!} = e^{-Rdt}Rdt \approx Rdt\,.$$

Do vậy

$$P(t)dt = Re^{-Rt}dt$$

Hay ta thu được

$$P(t) = \frac{\varepsilon N}{\tau}\exp\left(-\frac{\varepsilon Nt}{\tau}\right)\,.$$

4116

Một điện tích ion hóa tối thiểu đi qua khoảng 1 mg/cm^2 chất khí. Sự mất năng lượng có sự thăng giáng. Độ rộng toàn phần ở một nửa cực đại (fwhm) chia cho độ mất mát năng lượng có khả năng nhất (fwhm tương đối) là khoảng

(a) 100%.

(b) 10%.

(c) 1%.

(*CCT*)

Lời giải:

Mất mát năng lượng của một hạt điện tích ion hóa tối thiểu khi nó đi qua 1 mg/cm^2 chất khí là khoảng 2 keV. Năng lượng ion hóa trung bình đối với một phân tử khí là khoảng 30 eV. Khi đó fwhm tương đối sẽ là

$$\eta = 2,354\left(\frac{\varepsilon F}{E_0}\right)^{1/2} = 2,354\left(\frac{30F}{2000}\right)^{1/2} = 29(F)^{1/2}\%\,,$$

Trong đó $F < 1$ là thừa số Fanor. Câu trả lời là (b).

4117

Một tia X năng lượng ε bị hấp thụ trong một máy đếm tỉ lệ và tạo ra trung bình là $\bar{n}$ cặp ion. Độ thăng giáng căn quân phương (rms) σ của số cặp đó là

(a) $\sqrt{\bar{n}}$.

(b) $\sqrt{F\bar{n}}$, với $F < 1$.

(c) $\pi \ln \bar{n}$.

(*CCT*)

Lời giải:

Câu trả lời là (b).

4118

Một chất nhấp nháy dày 1 cm sinh ra một photon nhìn thấy/100 eV năng lượng mất mát. Nó được nối với một ống nhân quang qua một ống dẫn quang độ truyền qua là 10%. Ống nhân quang có hiệu suất biến đổi ánh sáng thành quang electron là 10%. Độ lệch σ của độ cao xung đối với photon trong **Bài tập 4065** là bao nhiêu?

(a) 21,2%

(b) 7,7%

(c) 2,8%

(*CCT*)

Lời giải:

Năng lượng một proton mất đi trong chất nhấp nháy là $\Delta E = 1,8$ MeV $= 1,8 \times 10^6$ eV trên một cm chiều dài đường đi. Do đó số lượng photon trung bình được sinh ra trong chất nhấp nháy là

$$\bar{n} = \frac{1,8 \times 10^6}{100} = 1,8 \times 10^4 \,.$$

Với độ truyền qua 10% và hiệu suất biến đổi 10%, số quang electron thu được là $\bar{N} = 1,8 \times 10^4 \times 0,1 \times 0,1 = 180$. Độ lệch chuẩn tỉ đối sẽ là

$$\sigma = \frac{\sqrt{\bar{N}}}{\bar{N}} = \frac{1}{\sqrt{\bar{N}}} = \frac{1}{\sqrt{180}} = 7,5\% \,.$$

Do vậy câu trả lời là (b).

5. CHÙM HẠT VÀ MÁY GIA TỐC (4119-4131)

4119

(a) Trình bày nguyên lý hoạt động cơ bản của máy xyclotron, syncroxyclotron và syncrotron. Điểm khác biệt chính giữa chúng là gì? Giới hạn năng lượng cực đại mà mỗi loại có thể tạo ra là bao nhiêu?

(b) Trình bày nguyên lý hoạt động cơ bản của một máy gia tốc thẳng giống như ở SLAC. Ưu điểm và khuyết điểm của máy gia tốc thẳng so với máy gia tốc tròn là gì?

(c) Tại sao trong những năm gần đây người ta lại chế tạo các máy gia tốc chùm hạt va chạm (colliding-beam accelerator) ("vành chứa giao nhau"- "Intersecting storage ring")? Điểm mạnh và điểm yếu của nó so với các máy gia tốc có bia đứng yên truyền thống?

(*Columbia*)

Lời giải:

(a) Về cơ bản một máy xyclotron gồm hai hộp kim loại rỗng bán nguyệt - chữ D - được phân cách theo mép thẳng của chúng bằng một khe hẹp. Một nguồn ion ở tâm của khe sẽ phun các hạt điện tích Ze vào một trong các chữ D. Các hộp hình chữ D được đặt vuông góc với một từ trường đều, từ trường này sẽ giữ cho các hạt chuyển động theo quỹ đạo tròn có bán kính r

$$\frac{mv^2}{r} = ZevB\,.$$

Các hạt được gia tốc mỗi khi đi qua khe hẹp nhờ một điện trường tần số vô tuyến đặt vào khe hẹp đó với tần số góc $\omega_r = \frac{ZeB}{m} = w_p$, chính là tần số góc trong chuyển động tròn của hạt. Do w_p không phụ thuộc vào bán kính quỹ đạo r, nên các hạt luôn đi hết một vòng trong thời gian như nhau và bay tới khe hẹp vào đúng thời điểm tại pha thích hợp để được gia tốc.

Năng lượng tạo ra bởi xyclotron có một giới hạn trên do sự tăng tương đối tính của khối lượng đi kèm với sự tăng năng lượng, điều này làm cho các hạt đến khe hẹp ngày càng chậm hơn, và cuối cùng không còn cộng hưởng với điện trường nữa và do đó không còn được gia tốc.

Trong syncroxyclotron giới hạn năng lượng cực đại này được vượt qua bằng cách cho thay đổi tần số của trường tần số vô tuyến, giảm dần tần số của nó theo sự giảm tần số của w_p do sự thay đổi khối lượng tương đối tính. Về nguyên tắc năng lượng do syncroxyclotron tao ra có thể tăng lên vô hạn, nhưng cần phải có nam châm với khối lượng tỉ lệ với lũy thừa bậc ba của năng lượng cực đại để từ trường nó tạo ra bao trùm toàn bộ diện tích quỹ đạo. Do vậy trọng lượng và giá thành nam châm trong thực tế lại giới hạn năng lượng cực đại có thể tạo ra.

Trong syncrotron, các hạt được giữ trong một quỹ đạo gần tròn với bán kính cố định tính giữa các cực của một nam châm hình khuyên. Nam châm này có từ trường tăng theo sự thay đổi động lượng của hạt. Trường gia tốc được cung cấp bởi một hoặc nhiều máy rf tại các điểm trên vành từ, tần số rf tăng từng bước theo sự tăng vận tốc của hạt. Năng lượng cực đại ở đây bị giới hạn bởi sự mất mát do bức xạ của các hạt do sự gia tốc hướng tâm phát ra các bức xạ điện từ với tốc độ tỉ lệ với lũy thừa bậc 4 của năng lượng.

So sánh 3 loại máy gia tốc, ta nhận thấy rằng đối với xyclotron thì độ lớn từ trường và tần số trường RF là không đổi. Đối với syncroxyclotron, độ lớn của từ trường không đổi trong khi tần số của trường RF thay đổi đồng bộ với năng lượng hạt và quỹ đạo của hạt vẫn là hình xoắn ốc. Đối với syncrotron, cả độ lớn của từ trường và tần số trường RF đều thay đổi để giữ cho các hạt chuyển động trong một quỹ đạo cố định.

(b) Trong một máy gia tốc thẳng như là SLAC, các hạt mang điện chuyển động trên một đường thẳng dọc theo trục của một ống hình trụ có vai trò như là một ống dẫn sóng, nó có một trường điện từ RF biến thiên với thành phần điện trường dọc theo trục có vai trò gia tốc hạt. So với máy gia tốc hình tròn, máy gia tốc thẳng có rất nhiều lợi thế. Khi hạt chuyển động theo đường thẳng có thể dễ dàng được bắn ra mà không cần phải trích ngang. Thêm vào đó, do không có sự gia tốc hướng tâm nên mất mát do bức xạ có thể bỏ qua. Nó đặc biệt thích hợp để gia tốc electron đạt đến năng lượng rất cao. Một ưu điểm khác của nó là sự linh hoạt khi xây dựng. Độ dài máy gia tốc có thể từng bước kéo dài thêm. Điểm yếu của nó là chiều dài rất lớn và giá thành cao hơn so với máy gia tốc tròn cho cùng một năng lượng.

(c) Trong va chạm của một hạt khối lượng m và năng lượng E với một hạt đứng yên có cùng khối lượng thì năng lượng hiệu dụng trong tương tác này là $\sqrt{2mE}$, trong khi đó va chạm trực diện giữa hai chùm hạt năng lượng E sẽ có năng lượng hiệu dụng là $2E$. Như vậy rõ ràng là năng lượng E càng cao thì phần năng lượng toàn phần sẵn có cho tương tác ở trường hợp đầu càng thấp.

Do sự khó khăn và tốn kém trong việc tăng năng lượng của hạt được gia tốc nên nhiều máy va chạm chùm hạt đã được chế tạo trong những năm gần đây. Tuy nhiên, do cường độ chùm hạt và mật độ hạt thấp nên hiệu suất tương tác của máy va chạm hạt nhỏ hơn nhiều so với máy có bia cố định.

4120

(a) Mô tả ngắn gọn máy xyclotron và syncrotron, nêu bật sự khác nhau giữa chúng. Giải thích tại sao không thể sử dụng:

(b) Các máy xyclotron để tăng tốc một proton đến năng lượng 2 GeV?

(c) Các máy syncrotron để gia tốc electron đến 30 GeV?

(Columbia)

Lời giải:

(a) Trong một máy xyclotron, một hạt mang điện được giữ ở quỹ đạo gần tròn bởi một từ trường đều và được gia tốc bởi một điện trường âm tần chuyển pha mỗi khi hạt đi qua khe giữa hai điện cực hình chữ D. Tuy nhiên, do khối lượng của nó tăng năng lượng tăng, nên bán kính xyclotron của hạt là $r = \frac{mv}{eB}$ tăng, và tần số xyclotron là $w = \frac{eB}{m}$ sẽ giảm. Do vậy pha giữa chuyển động tròn của hạt và điện trường sẽ luôn thay đổi. Trong một máy syncrotron từ trường sẽ không giữ nguyên mà thay đổi theo năng lượng của hạt để giữ cho nó chuyển động theo một quỹ đạo cố định. Hạt được gia tốc bằng điện trường cộng hưởng tần số cao ở một hoặc nhiều vị trí trên quỹ đạo, tần sô liên tục tăng theo năng lượng của hạt (tham khảo **Bài tập 4119**(a)).

(b) Trong xyclotron, khi năng lượng của hạt tăng, bán kính quỹ đạo của nó cũng tăng và pha gia tốc hạt sẽ thay đổi liên tục. Khi động năng của hạt gần bằng năng lượng nghỉ, sự sai khác pha tổng cộng có thể rất lớn, và cuối cùng hạt sẽ rơi vào vùng giảm tốc của điện trường khi nó đi qua khe giữa hai điện cực hình chữ D. Do vậy năng lượng của hạt không thể tăng cao hơn nữa. Khối lượng nghỉ của proton cỡ ~ 1 GeV. Để gia tốc nó tới 2 GeV với xyclotron, ta phải thực hiện được điều đó trước khi nó rơi vào vùng giảm tốc. Trong thực tế điện thế đòi hỏi sẽ là quá lớn.

(c) Trong syncrotron sự lệch pha không xảy ra, do đó hạt có thể được gia tốc tới năng lượng cao hơn rất nhiều. Tuy nhiên ở năng lượng cao, do gia tốc hướng tâm lớn nên hạt sẽ phát ra các bức xạ điện từ, bức xạ syncrotron, và mất năng lượng, làm cho sau mỗi vòng năng lượng tăng lên là âm. Năng lượng càng lớn và khối lượng nghỉ của hạt càng nhỏ thì bức xạ syncrotron càng

mạnh. Rõ rằng là khi sự mất mát năng lượng do bức xạ synchrotron bằng năng lượng lấy từ điện trường gia tốc trong một khoảng thời gian thì không thể tăng tốc thêm nữa. Do khối lượng nghỉ của electron chỉ là 0,511 MeV, để gia tốc nó tới 30 GeV, ta cần tăng bán kính của máy gia tốc, hoặc tăng hiệu điện thế, hoặc cả hai đến giá trị rất lớn, điều đó trong thực tế là rất khó và tốn kém. Ví dụ, một thiết bị hạt va chạm e^+e^- 45 GeV hiện có tại CERN có chu vi là 27 km.

4121

Bán kính của máy gia tốc 500 GeV đặt tại Batavia là 10^2, 10^3, 10^4, 10^5 m.

(*Columbia*)

Lời giải:

Trong một từ trường có cảm ứng B, đường kính quỹ đạo của một proton là

$$R = \frac{m\gamma\beta c}{eB} = \frac{m\gamma\beta c^2}{eBc}.$$

Với một proton năng lượng 500 GeV, $\beta \approx 1$, $m\gamma c^2 = 500$ GeV. Do đó, nếu trong trường hợp tổng quát $B \sim 1\ T$ thì ta có

$$R = \frac{500 \times 10^9 \times 1,6 \times 10^{-19}}{1,6 \times 10^{-19} \times 1 \times 3 \times 10^8} = \frac{5}{3} \times 10^3 \text{ m}.$$

Do vậy câu trả lời là 10^3 m.

4122

Trong một máy syncrotron proton hiện đại (máy gia tốc hạt), một từ trường B được sử dụng để giữ các hạt trên một quỹ đạo cân bằng (bán kính R). Sự ổn định của proton gần quỹ đạo cân bằng được đảm bảo bằng từ trường không đồng nhất, không phụ thuộc và θ, và có thể được tham số hóa theo biểu thức

$$B_z = B_0 \left(\frac{R}{r}\right)^n,$$

Trong đó z là tọa độ vuông góc với mặt phẳng của quỹ đạo cân bằng (theo hướng thẳng đứng) với $z = 0$ trên quỹ đạo cân bằng, B_0 là một trường không đổi để giữ các hạt trên quỹ đạo cân bằng bán kính R, r là vị trí thực tế của hạt theo phương bán kính ($\rho = r - R$ là sự dịch chuyển theo phương ngang ra

khỏi quỹ đạo cân bằng), và n là một hằng số. Hãy rút ra tần số của dao động betatron thẳng đứng và dao động betatron ngang với một giá trị của n. Với giá trị nào của n thì hạt diễn ra quá trình dao động bền quanh quỹ đạo cân bằng trong cả phương thẳng đứng và phương ngang?

(*Columbia*)

Lời giải:

Dùng hệ trục tọa độ trụ (r, θ, z), ta có thể viết phương trình chuyển động của hạt

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = e\mathbf{E} + e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

thành

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dr}{dt}\right) - mr\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = eE_r + eB_z r\frac{d\theta}{dt} - eB_\theta\frac{dz}{dt},$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(mr^2\frac{d\theta}{dt}\right) = eE_\theta + eB_r\frac{dz}{dt} - eB_z\frac{dr}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dz}{dt}\right) = eE_z + eB_\theta\frac{dz}{dt} - eB_r r\frac{d\theta}{dt}.$$

Trên quỹ đạo của hạt, điện trường bằng không và từ trường không phụ thuộc vào θ, cụ thể là

$$E_\theta = E_r = E_z = B_\theta = 0.$$

Số phương trình thứ nhất và thứ ba ở trên được rút gọn lại như sau

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dr}{dt}\right) - mr\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = eB_z r\frac{d\theta}{dt}, \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dz}{dt}\right) = -eB_r r\frac{d\theta}{dt}. \qquad (2)$$

Trên quỹ đạo cân bằng, $r = R$ và phương trình (1) trở thành

$$mR\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -eB_0 R\left(\frac{d\theta}{dt}\right),$$

hay

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{eB_0}{m} = -\omega_0,$$

ω_0 là vận tốc góc của chuyển động tròn của hạt, nó chính là tần số góc.

Quỹ đạo thực thăng giáng xung quanh quỹ đạo cân bằng. Ở gần quỹ đạo cân bằng, ta viết $r = R + \rho$, trong đó ρ là lượng vô cùng nhỏ bậc nhất, giống như z, và chỉ giữ lại các đại lượng nhỏ bậc nhất, ta có

$$B_z(r,z) \approx B_0\left(\frac{B}{r}\right)^n \approx B_0\left(1+\frac{\rho}{R}\right)^{-n} \approx B_0\left(1-\frac{n\rho}{R}\right).$$

Do

$$\nabla \times \mathbf{B} = 0,$$

Xét thành phần θ ta có

$$\frac{\partial B_r}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial r},$$

Từ đó kết hợp với

$$B_r(\rho,z) \approx B_r(\rho,0) + \left(\frac{\partial B_r}{\partial z}\right)_{z=0} z = 0 + \left(\frac{\partial B_z}{\partial r}\right)_{z=0} z$$
$$= -\left(\frac{nB_z}{r}\right)_{z=0} z = -\frac{nB_0}{R} z,$$

từ $B = B_z = B_0$ với $\rho = 0$ ta có

Để xét dao động quanh R, cho $r = R + \rho$. Bằng cách biểu diễn gần đúng B_z và B_r và giữ lại những đại lượng nhỏ bậc một, phương trình (1) và (2) rút gọn trở thành

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = -\omega_0^2(1-n)\rho,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\omega_0^2 nz.$$

Do đó nếu $n < 1$, ta sẽ có dao động bền theo phương bán kính với tần số

$$\omega_\rho = \sqrt{1-n}\,\omega_0 = \frac{\sqrt{1-n}\,eB_0}{m}.$$

Nếu $n > 0$, ta có dao động bền theo phương thẳng đứng với tần số

$$\omega_z = \sqrt{n}\,\omega_0 = \frac{\sqrt{n}\,eB_0}{m}.$$

Do chỉ khi thỏa mãn điều kiện $0 < n < 1$ thì hạt sẽ có dao động bền quanh quỹ đạo cân bằng theo cả phương thẳng đứng và phương ngang.

4123

Một máy gia tốc hiện đại tạo ra hai chùm proton chuyển động quay tròn ngược chiều va chạm trực diện với nhau. Mỗi chùm đều có các proton năng lượng 30 GeV.

(a) Năng lượng va chạm toàn phần trong hệ quy chiếu khối tâm là bao nhiêu?

(b) Máy gia tốc proton truyền thống phải cần năng lượng bao nhiêu để khi proton bắn vào bia hydro cố định cũng cho năng lượng khối tâm như trên?

(c) Nếu tốc độ va chạm proton-proton trong máy gia tốc mới là 10^4/s, ước tính độ chân không cần thiết trong hệ sao cho tốc độ va chạm giữa proton với các phân tử khí còn lại có cùng bậc về độ lớn trong ống dài 5 m. Lấy chu vi máy gia tốc là 1000 m, $\sigma_{p\text{-khí}} = 10^{-25}$ cm^2, và diện tích của chùm hạt là 1 mm^2.

(Columbia)

Lời giải:

(a) Hệ quy chiếu khối tâm được định nghĩa là hệ quy chiếu mà trong đó động lượng toàn phần của các hạt bằng 0. Do vậy đối với các chùm hạt va chạm, hệ khối tâm đồng nhất với hệ quy chiếu phòng thí nghiệm. Từ đó năng lượng toàn phần của va chạm trong hệ khối tâm là $2E_p = 2 \times 30 = 60$ GeV.

(b) Nếu sử dụng máy gia tốc truyền thống và một bia cố định thì ta có bình phương khối lượng bất biến là

$$\begin{aligned} S &= (E_p + m_p)^2 - p_p^2 \\ &= E_p^2 - p_p^2 + 2E_p m_p + m_p^2 \\ &= 2E_p m_p + 2m_p^2 . \end{aligned}$$

Trong hệ quy chiếu khối tâm ta có

$$S = (60)^2 = 3600 \text{ GeV}^2 .$$

Do S không đổi qua phép biến đổi Lorentz nên ta có

$$2E_p m_p + 2m_p^2 = 3600 ,$$

Hay năng lượng cần có của chùm proton là

$$E_p = \frac{1800 - 0,938^2}{0,938} = 1918 \text{ GeV},$$

(c) Gọi n, s là mật độ proton trên diện tích tiết diện của mỗi chùm hạt, L là chu vi của quỹ đạo của chùm hạt, l là chiều dài của ống chứa khí còn dư với mật độ ρ. Số va chạm trong một đơn vị thời gian trong máy chùm hạt va chạm là

$$r = \frac{N}{\Delta t} = \frac{N_p N_p \sigma_{pp}}{\left(\frac{L}{c}\right)} = \frac{(nsL)^2 c\sigma_{pp}}{L} = n^2 s^2 Lc\sigma_{pp}.$$

Số va chạm trên một đơn vị thời gian trong ống khí là

$$r' = \frac{N'}{\Delta t'} = \frac{N_p N_a \sigma_{pa}}{\left(\frac{L+l}{c}\right)} \approx (nsL)\left(\frac{\rho s_l N_A}{A}\right)\frac{c\sigma_{pa}}{L}.$$

trong đó A là khối lượng phân tử của chất khí và N_A là số Avogadro.

Nếu $r' = r$, ta có

$$\rho = \frac{A}{N_A}\frac{L}{l}\frac{\sigma_{pp}}{\sigma_{pa}}n.$$

Do $r = 10^4$ s^{-1}, nên ta có

$$n = \left(\frac{10^4}{s^2 Lc\sigma_{pp}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{10^4}{10^{-4} \times 10^5 \times 3 \times 10^{10} \times 3 \times 10^{-26}}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= 1,8 \times 10^9 \text{ cm}^{-3},$$

Trong đó lấy $\sigma_{pp} = 30$ mb$= 3 \times 10^{-26}$ cm^2. Do vậy ta thu được

$$\rho = \frac{29}{6,02 \times 10^{23}}\left(\frac{1000}{5}\right)\left(\frac{3 \times 10^{-26}}{10^{-25}}\right) \times 1,8 \times 10^9$$
$$= 5,3 \times 10^{-12} \text{ g cm}^{-3},$$

Áp suất P của không khí còn dư trong ống là

$$\frac{5,3 \times 10^{-12}}{1,3 \times 10^{-3}} = \frac{P}{1},$$

Do vậy mức độ chân không là $P = 4 \times 10^{-9}$ atm.

4124

Giả sử bạn có thể tạo ra một chùm proton năng lượng E trong phòng thí nghiệm (với $E \gg m_p c^2$) và có thể chế tạo một máy có một chùm bắn vào bia cố định hoặc chia chùm hạt thành hai phần (năng lượng E) để tạo ra máy chùm hạt va chạm.

(a) Hãy so sánh các đặc điểm của hai cách chế tạo trên theo các mặt sau:

(1) năng lượng ngưỡng cho việc sinh hạt,

(2) tốc độ sự kiện,

(3) phân bố góc của các hạt được tạo ra và ảnh hưởng của nó tới việc thiết kế đầu dò.

(b) Xét hạt Z^0 ($Mc^2 \approx 90$ GeV) sinh ra trong va chạm $p + p$ tại ngưỡng. Năng lượng cần thiết trong từng loại máy là bao nhiêu?

(c) Với chùm hạt năng lượng E, năng lượng cực đại của một meson π được sinh ra trong mỗi loại máy là bao nhiêu?

(*CUSPEA*)

Lời giải:

(a) (i) Khối lượng bất biến bình phương là như nhau trước và sau phản ứng

$$S = -(p_1 + p_2)^2 = -(p_1' + p_2' + p)^2 ,$$

Trong đó p_1, p_2 là động lượng 4 chiều ban đầu của hai proton, p_1', p_2' là động lượng bốn chiều cuối cùng của chúng, và p là động lượng 4 chiều của hạt mới khối lượng nghỉ M.

Khi đó với một proton ban đầu đứng yên, $p_1 = (\mathbf{p}_1, E_p)$, $p_2 = (0, m_p)$ và do vậy

$$\begin{aligned} S &= (E_1 + m_p)^2 - \mathbf{p}_1^2 \\ &= (E_1^2 - \mathbf{p}_1^2) + m_p^2 + 2E_1 m_p \\ &= 2m_p^2 + 2E_1 m_p . \end{aligned}$$

Tại ngưỡng, trạng thái cuối cùng có

$$p'_1 = p'_2 = (0, m_p), \qquad p = (0, M) \qquad \text{và như vậy}$$
$$S' = (2m_p + M)^2 .$$

Để phản ứng xảy ra ta cần

$$S \geq S' ,$$

hay

$$E_1 \geq m_p + 2M + \frac{M^2}{2m_p} .$$

Đối với trường hợp chùm hạt va chạm ta có $p_1 = (\mathbf{p}_c, E_c)$, $p_2 = (-\mathbf{p}_c, E_c)$ và khối lượng bất biến bình phương là

$$S'' = (2E_c)^2 - (\mathbf{p}_c - \mathbf{p}_c)^2 = 4E_c^2 .$$

Điều kiện $S'' \geq S'$ cho ta

$$E_c \geq m_p + \frac{M}{2} .$$

Để ý rằng $E_1 \gg E_c$ nếu $M \gg m_p$. Do vậy máy va chạm chùm hạt có thể tạo ra cùng một hạt mới với năng lượng proton ở năng lượng thấp hơn rất nhiều.

(ii) Do bia cố định cho ta rất nhiều proton bia tồn tại trong hạt nhân của nó, do vậy tốc độ sự kiện xảy ra trong máy có bia cố định lớn hơn nhiều so với máy chùm hạt va chạm.

(iii) Với máy có bia cố định, hầu hết các hạt cuối đều chuẩn trực theo chiều tiến của chùm hạt trong phòng thí nghiệm. Việc phát hiện các hạt mới sẽ phải đối mặt với phân bố hạt có tính định hướng hình học cao và có thể gặp khó khăn trong việc phân biệt chúng với nền của chùm hạt tới.

Với máy chùm hạt va chạm, các hạt được sinh ra có sự phân bố đồng đều hơn trong phòng thí nghiệm do động lượng toàn phần trong hệ va chạm bằng 0. Trong trường hợp này các đầu dò sẽ phải bao trùm toàn bộ góc khối 4π.

(b) Sử dụng công thức trong câu (a) (i) với $m_p = 0,94$ GeV, $M = 90$ GeV, ta có năng lượng ngưỡng cho máy có bia cố định là

$$E_1 = m_p + 2M + \frac{M^2}{2m_p} = 0,94 + 2 \times 90 + \frac{90^2}{2 \times 0,94} = 4489 \text{ GeV} ,$$

Và cho máy va chạm chùm hạt là

$$E_c = m_P + \frac{M}{2} = 0,94 + \frac{90}{2} = 45,94 \text{ GeV}.$$

(c) *Trường hợp máy va chạm chùm hạt*

Gọi p_1, p_2 là động lượng của proton ở trạng thái cuối, và p_π là động lượng của pion sinh ra. Bảo toàn năng lượng đòi hỏi

$$2E = \sqrt{m_p^2 + p_1^2} + \sqrt{m_p^2 + p_2^2} + \sqrt{m_\pi^2 + p_\pi^2}.$$

Bảo toàn động lượng đòi hỏi

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_\pi = 0,$$

hay

$$p_\pi^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2 \cos\alpha.$$

Điều này có nghĩa là để p_π đạt cực đại, góc α giữa $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ phải bằng 0, do $\frac{\partial p_\pi}{\partial \alpha} = \frac{p_1 p_2}{p_\pi} \sin\alpha$. Như thế tại giá trị cực đại p_π, hạt ở trạng thái cuối phải chuyển động trên cùng một phương. Ta có

$$\mathbf{p}_2 = -(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_\pi).$$

Phương trình năng lượng trở thành

$$2E = \sqrt{m_p^2 + (p_\pi + p_1)^2} + \sqrt{m_\pi^2 + p_\pi^2} + \sqrt{m_p^2 + p_1^2}.$$

Lấy đạo hàm ta được

$$0 = \frac{(p_\pi + p_1)d(p_\pi + p_1)}{\sqrt{m_p^2 + (p_\pi + p_1)^2}} + \frac{p_\pi dp_\pi}{\sqrt{m_\pi^2 + p_\pi^2}} + \frac{p_1 dp_1}{\sqrt{m_p^2 + p_1^2}}.$$

Cho $dp_\pi/dp_1 = 0$, ta tìm được

$$-\frac{p_1}{\sqrt{m_p^2 + p_1^2}} = \frac{(p_\pi + p_1)}{\sqrt{m_p^2 + (p_\pi + p_1)^2}}.$$

Do vậy

$$p_\pi = -2p_1, \quad p_2 = p_1.$$

Tại năng lượng cực đại E_π ta có,

$$2E = 2\sqrt{m_p^2 + p_1^2} + \sqrt{m_\pi^2 + (2p_1)^2}\,,$$

hay

$$4E^2 - 4EE_{\pi\,\max} + m_\pi^2 + 4p_1^2 = 4m_p^2 + 4p_1^2\,,$$

Từ đó ta thu được năng lượng cực đại (do $E \gg m_p$) của pion là

$$E_{\pi\,\max} = \frac{4E^2 + m_\pi^2 - 4m_p^2}{4E} \approx E\,,$$

Trường hợp máy có bia cố định: Khi E_π đạt cực đại, hai proton ở trạng thái cuối sẽ đứng yên và pion lấy toàn bộ động lượng của proton tới. Do vậy

$$E_\pi + 2m_p = E + m_p\,.$$

Hay ta có

$$E_\pi = E - m_p \approx E \qquad \text{do} \qquad E \gg m_p\,.$$

4125

Một electron (khối lượng m, điện tích e) chuyển động trong mặt phẳng vuông góc với một từ trường đều. Nếu năng lượng tổn hao do bức xạ có thể bỏ qua thì quỹ đạo là đường tròn với bán kính R. Gọi E là tổng năng lượng electron, tính tới động học tương đối tính nên $E \gg mc^2$.

(a) Dùng giải tích để giải thích độ lớn cần thiết của B theo các tham số trên. Tính giá trị bằng số của B, theo gaoxơ, khi $R = 30$ m, $E = 2,5 \times 10^9$ eV. Trong phần này cần nhớ lại một số hằng số vũ trụ.

(b) Thực tế, electron bức xạ năng lượng điện từ bởi vì nó được gia tốc bằng từ trường B. Tuy nhiên, giả sử rằng năng lượng tổn hao trên một vòng ΔE là rất nhỏ so với E. Dùng giải tích để giải thích tỉ số $\Delta E/E$ dựa và các tham số đã có. Tính toán số tỉ số đó với R cho ở trên.

(*CUSPEA*)

Lời giải:

(a) Gọi $\mathbf{v}$ là vận tốc electron. Động lượng của nó sẽ là $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$, trong đó $\gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}$. Theo định luật II Newton ta có

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\gamma\frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}\,,$$

do $|\mathbf{v}|$, $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$ và do đó γ sẽ là hằng số, hay ta có

$$\left|\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right| = \frac{evB}{m\gamma}.$$

Ta lại có

$$\left|\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right| = \frac{v^2}{R},$$

với R là bán kính cong của quỹ đạo electron, nên

$$B = \frac{m\gamma v}{eR},$$

hay

$$B = \frac{pc}{eRc} = \frac{\sqrt{E^2 - m^2c^4}}{eRc} \approx \frac{E}{eRc}$$

$$= \frac{2,5 \times 10^9 \times 1,6 \times 10^{-19}}{1,6 \times 10^{-19} \times 30 \times 3 \times 10^8} = 2,8 \times 10^{-1}\ \text{T}$$

$$= 2,8 \times 10^3\ \text{Gs}.$$

(b) Do $\dot{\mathbf{v}} \perp \mathbf{v}$ nên năng lượng bức xạ của electron là

$$P = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\gamma^6\left[\dot{v}^2 - \left(\frac{\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}}}{c}\right)^2\right]$$

$$= \frac{e^2\dot{v}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\gamma^4$$

$$= \frac{e^2v^4}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{\gamma^4}{R^2},$$

Năng lượng tổn hao trên một vòng là

$$\Delta E = \frac{2\pi RP}{v} = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2 R}\right)(\gamma\beta)^3\gamma mc^2$$

$$= \frac{4\pi}{3}\left(\frac{r_0}{R}\right)(\gamma\beta)^3 E = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{r_0}{R}\right)(\gamma^2 - 1)^{\frac{3}{2}} E,$$

trong đó $r_0 = 2,8 \times 10^{-15}$ m là bán kính cổ điển của electron và $\beta = \frac{v}{c}$. Với $\gamma = \frac{2,5\times 10^9}{0,51\times 10^6} = 4,9 \times 10^3$ ta có

$$\frac{\Delta E}{E} \approx \frac{4\pi}{3} \times \frac{2,8 \times 10^{-15}}{30} \times (4,9 \times 10^3)^3$$

$$= 4,6 \times 10^{-5}.$$

Các kết quả cũng có thể thu được bằng cách sử dụng công thức liên hệ như sau

(a)

$$p(\text{GeV}/c) = 0,3B(\text{T})R(\text{m})$$

từ đó rút ra

$$B = \frac{p}{0,3R} = \frac{2,5}{0,3 \times 30} \approx 0,28\ \text{T}\,.$$

(b)

$$\Delta E(\text{keV}) \approx 88E(\text{GeV})^4/R(\text{m})$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\frac{\Delta E}{E} &= 88E^3 \times 10^{-6}/R \\ &= 88 \times 2,5^3 \times 10^{-6}/30 \\ &= 4,6 \times 10^{-5}\,.\end{aligned}$$

4126

Vẽ tiết diện của một nam châm xyclotron đơn giản có các cực đường kính 1 m, đoạn ách và các cuộn dây. Tính số ampe-vòng cần thiết của một cuộn dây khi khoảng cách giữa hai cực là 10 cm và từ trường cần tạo ra là 2 T(= 20 kgaoxơ). $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ J/A$^2\cdot$ m.

(*Columbia*)

Lời giải:

Hình 4.14 mô tả mặt cắt của một nam châm xyclotron. Từ thông ϕ đi qua khí giữa hai cực là

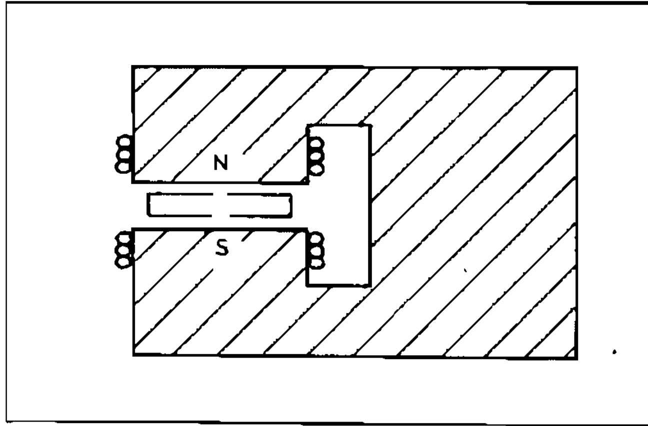
$$\phi = \frac{NI}{R}\,,$$

trong đó

$$R = \frac{d}{\mu_0 S}\,,$$

là từ trở, với d là độ rộng khe và S là diện tích của mỗi cực. Dựa vào định nghĩa cảm ứng từ là $B = \frac{\phi}{S}$. Do vậy ta có

$$NI = \phi R = \frac{Bd}{\mu_0} = \frac{2 \times 10 \times 10^{-2}}{4\pi \times 10^{-7}} = 1,59 \times 10^5\ \text{A vòng}\,.$$



Hình 4.14

4127

Nói chung, khi tạo ra một chùm hạt ion hoặc electron, điện tích không gian bên trong chùm hạt sẽ gây ra sự chênh lệch điện thế giữa trục và bề mặt của chùm hạt. Một chùm hạt 10 mA gồm proton 50 keV ($v = 3 \times 10^6$ m/s) chuyển động dọc theo trục của một ống chân không. Chùm proton có mặt cắt hình tròn đường kính 1 cm. Tính độ sự chênh lệch thế giữa trục và bề mặt của chùm hạt, giả thiết rằng mật dộ dòng là như nhau theo trên đường kính của chùm hạt.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Chùm có dòng là

$$I = \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^R j 2\pi r dr = \pi R^2 j = \pi R^2 \rho v \, ,$$

trong đó j và ρ tương ứng là mật độ dòng và mật độ điện tích. Do vậy ta có

$$\rho = \frac{I}{\pi R^2 v} \, .$$

Ở khoảng cách r từ trục, định lý thông lượng Gauss cho ta

$$2\pi r l E = \pi r^2 l \rho / \varepsilon_0$$

từ đó cho ta cường độ điện trường là

$$E = \frac{r\rho}{2\varepsilon_0} = \frac{r}{2\pi\varepsilon_0}\frac{I}{vR^2}.$$

Do $E = -\frac{dV}{dr}$, độ chênh lệch điện thế là

$$\Delta V = \int_0^R E(r)dr = \frac{I}{2\pi\varepsilon_0 v R^2}\int r dr = \frac{I}{4\pi\varepsilon_0 v}$$
$$= \frac{9\times 10^9 \times 10 \times 10^{-3}}{3\times 10^6} = 30\text{ V}.$$

4128

Thông lượng tia vũ trụ ở mức cơ bản là 1/năm, 1/phút, 1/ms, 1/μs, cm^{-2} $sterad^{-1}$.

(*Columbia*)

Lời giải:

Câu trả lời là 1/(phút · cm^2· sterad). Ở mức cơ bản, tổng thông lượng tia vũ trụ là $1,1\times 10^2$/(m^2· s · sterad), trong đó có chứa một phần cứng là $0,8\times 10^2$/(m^2· s · sterad) và một phần mềm là $0,3\times 10^2$/(m^2· s · sterad).

4129

Thông lượng hạt trong một máy gia tốc khổng lồ là 10^4, 10^8, 10^{13}, 10^{18} trên một xung.

(*Columbia*)

Lời giải:

Một thông lượng hạt thông thường trong một máy gia tốc proton khổng lồ là 10^{13}/xung.

4130

Hạt nào phát ra ánh sáng bức xạ syncrotron nhiều nhất khi bị bẻ cong trong từ trường?

(a) Proton.

(b) Muyon.

(c) Electron.

(*CCT*)

Lời giải:

Bức xạ syncrotron được phát ra khi quỹ đạo của một hạt mang điện bị bẻ cong bởi từ trường. Từ **Bài tập 4125** ta có năng lượng tiêu hao trên một vòng là

$$\Delta E = \left(\frac{4\pi}{3}\right)\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{1}{R}\beta^3\gamma^4 ,$$

Trong đó R, là bán kính cong của quỹ đạo và cho bởi

$$R = \frac{m\gamma\beta c}{eB} .$$

Vì vậy đối với các hạt có cùng điện tích và γ, $\Delta E \propto m^{-1}$. Do vậy câu trả lời là (c).

4131

Bán kính quỹ đạo của một hạt 400 GeV trong trong từ trường 15 kgaoxơ là

(a) 8,8 km.

(b) 97 m.

(c) 880 m.

(*CCT*)

Lời giải:

Từ công thức

$$p(\text{GeV}/c) = 0,3B(T)R(m)$$

Ta có

$$R = \frac{p}{0,3B} = \frac{400}{0,3 \times 1,5} = 880 \text{ m} .$$

Hay, từ nguyên lý thứ nhất ta thu được

$$R = \frac{m\gamma\beta c}{eB} \approx \frac{m\gamma c^2}{eBc} = \frac{400 \times 10^9 \times 1,6 \times 10^{-19}}{1,6 \times 10^{-19} \times 1,5 \times 3 \times 10^8} = 880 \text{ m} ,$$

với $B = 15$ kGs $= 1{,}5$ T.

Do đó câu trả lời là (c).

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung:
Phó Tổng biên tập NGÔ ÁNH TUYẾT
Giám đốc Công ty Sách dịch và Từ điển Giáo dục NGUYỄN NHƯ Ý

Biên tập lần đầu:
PHẠM VĂN THIỀU
ĐỖ THỊ TỐ NGA

Biên tập tái bản.
ĐẶNG VĂN SỨ

Xử lý bìa:
HOÀNG ANH TUẤN

Sửa bản in:
CÔNG TY CP SÁCH DỊCH VÀ TỪ ĐIỂN GIÁO DỤC

Chế bản:
NGUYỄN HỮU ĐIỂN

BÀI TẬP VÀ LỜI GIẢI VẬT LÝ NGUYÊN TỬ, HẠT NHÂN VÀ CÁC HẠT CƠ BẢN

Mã số: 8Z073z0-SBQ

In 1000 cuốn (QĐ: 3396/QĐ-GD), khổ 16 x 24cm,
tại Công ty cổ phần In Phúc Yên - Đường Trần Phú, TX. Phúc Yên
Số xuất bản: 114-2010/CXB/44-129/GD
In xong và nộp lưu chiểu tháng 9 năm 2010

Bài tập và lời giải của các
Trường Đại học nổi tiếng Hoa Kỳ

Bộ sách gồm 7 cuốn:

Bài tập và lời giải

1. Cơ học
2. Cơ học lượng tử
3. Quang học
4. Nhiệt động lực học và vật lý thống kê
5. Điện từ học
6. Vật lý nguyên tử, hạt nhân và các hạt cơ bản
7. Vật lý chất rắn, thuyết tương đối và các vấn đề liên quan

Bộ sách tuyển chọn 2550 bài tập từ các bài thi kiểm tra chất lượng và kiểm tra đầu vào của các trường đại học nổi tiếng ở Hoa Kỳ, bao quát toàn diện các vấn đề của vật lý học. Các câu hỏi trải rộng trên nhiều chủ đề, có những bài vận dụng nhiều lĩnh vực khác nhau của vật lý, áp dụng linh hoạt nhiều nguyên lý và định luật vật lý, đưa ra các tình huống sát thực và cập nhật, không đòi hỏi nhiều các kỹ năng về toán.

Các lời giải được đưa ra để gợi ý sinh viên tự giải quyết vấn đề hơn là hướng dẫn thao tác từng bước.

Bộ sách là tài liệu tham khảo quý bổ trợ cho các sách giáo khoa, giáo trình chuyên ngành vật lý.



Công ty cổ phần Sách dịch và Từ điển Giáo dục
25 Hàn Thuyên - Hai Bà Trưng - Hà Nội
Tel/Fax: 04.39726508 - 04.38266359
Www.tudiengiaoduc.com.vn
Mua sách tại: www.sach24.vn; www.vinabook.com



